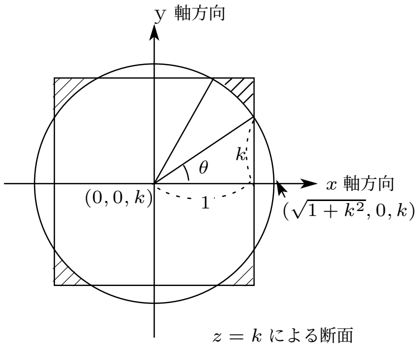
【解答】



平面 $z=k(0\leqq k\leqq 1)$ による断面積を $S(k)$ とする。$z=k$ 上で、図の様に θ をとると、

$$k=\tan\theta, dk=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta, \begin{array}{c|c} k & 0\longrightarrow 1 \\ \hline \theta & 0\longrightarrow \frac{\pi}{4}\end{array}$$

対称性より $x\geqq 0, y\geqq 0$ に含まれる断面積は、平面 $z=k$ による断面積の $\frac{1}{4}$ になるから、図より

$$\frac{S}{4}=1-\left\{k+\frac{(\sqrt{1+k^2})^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}=1-\tan\theta-\frac{1+\tan^2\theta}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$$\therefore\ \frac{V}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{1-\tan\theta-\frac{\pi(1+\tan^2\theta)}{4}\right\}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta(1+\tan^2\theta)\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

右辺の第 1 項、第 2 項をそれぞれ I_1, I_2 とおくと

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{1-\tan\theta-\frac{\pi(1+\tan^2\theta)}{4}\right\}(\tan\theta)'d\theta$$
$$=\left[\tan\theta-\frac{\tan^2\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\cdot\left(\tan\theta+\frac{\tan^3\theta}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{3} \qquad \cdots①$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta(1+\tan^2\theta)\cdot(\tan\theta)'d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\left(\tan\theta+\frac{\tan^3\theta}{3}\right)'d\theta$$
$$=\left[\theta\left(\tan\theta+\frac{\tan^3\theta}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan\theta+\frac{\tan^3\theta}{3}\right)d\theta$$

ここで

$$\int\tan^3\theta d\theta=\int\tan\theta\cdot\tan^2\theta d\theta=\int\tan\theta\left(-1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

であるから

$$I_2=\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{3}\tan\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\theta}{3}(\tan\theta)'d\theta$$
$$=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\Big[\log|\cos\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[\frac{\tan^2\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}-\frac{\log 2}{3} \qquad \cdots②$$

①,② より

$$V=4(I_1+I_2)=\frac{4}{3}(1-\log 2) \qquad \cdots(答)$$