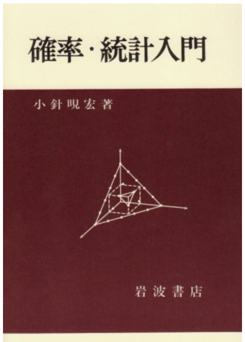
逆正弦法則の
「できるだけ直感的な」
証明

2017年1月27日

Cabri研究会
生越　茂樹

Thanks To

小針晛宏著「確率・統計入門」(特に第6章)



逆正弦法則の証明.pdf

§1. 準備編 – 径路の数

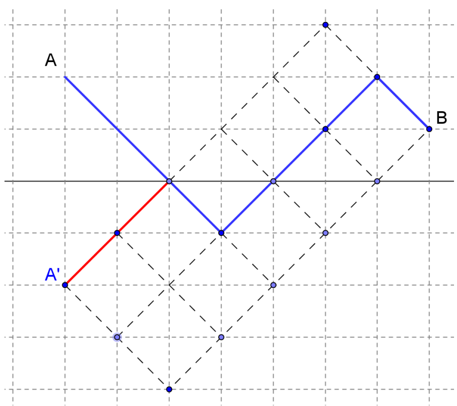
鏡像の原理

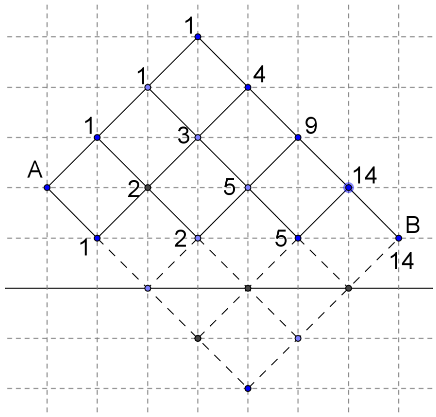
点 A,B は t 軸に関して同じ側にあるとする. A から B へ至る経路のうち t 軸と共有点を持つもの(接するものも含む) の数は, A と t 軸に関し対称な点 A' から B へ至る経路の数と等しい.

[証明] A から進んで初めて t 軸と共有点を持つまでの道を t 軸に関して反転すれば A' から B へ至る道ができ,

(A から B へ至る道で t 軸と共有点を持つもの) $\underset{1対1}{\longleftrightarrow}$ (A' から B へ至る道)

[例]下の図で A から B へ行く道のうち t 軸と共有点を持つものは ${}_7C_3 - 14 = 35 - 14 = 21$
一方 A' から B へ行く経路は ${}_7C_5 = 21$ だから, この 2 つは一致する.





命題1 (tan公式)

n,m を自然数，原点から $\mathrm{G}(n,m)$ に至る経路の総数を $N_{n,m}$ とする.
このうち 正領域を通り G に至る経路の総数は $\dfrac{m}{n}N_{n,m}$
(注)正領域を通る経路とは $\{(k,s_k) \mid k=1,2,3,\cdots n,\ s_k>0\}$ の事.

[証明] n 回中 p 回右，q 回左に進んだとすると，$p+q=n,\ p-q=m,$

また

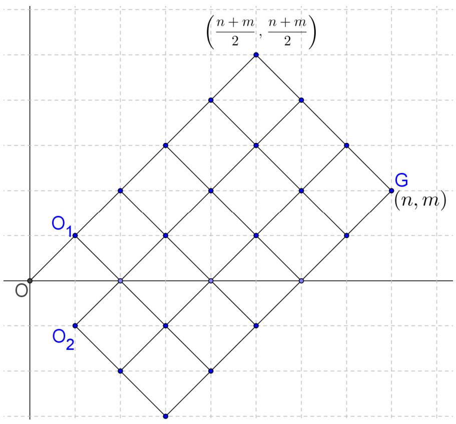
$$N_{n,m}={}_{n}C_{\frac{n+m}{2}}={}_{p+q}C_{p}=\frac{(p+q)!}{p!q!}\quad\cdots(*)$$

$O_1(1,1),\ O_2(1,-1)$ とする．Oから $G(n,m)$ へ行く道は O_1 を必ず通るから，求める道の総数は

$(O_1$ から G へ行く径路の数$)-(O_1$ から G へ行く径路のうち t 軸と共有点を持つ径路の数$)$

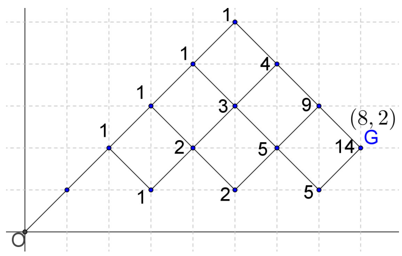
$=(O_1$ から G へ行く径路の数$)-(O_2$ から G へ行く径路の数$)$

$$=N_{n-1,m-1}-N_{n-1,m+1}={}_{n-1}C_{\frac{n+m}{2}-1}-{}_{n-1}C_{\frac{n+m}{2}}={}_{p+q-1}C_{p-1}-{}_{p+q-1}C_{p}=\frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!}-\frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!}=\frac{(p+q)!(p-q)}{p!q!(p+q)}=\frac{m}{n}N_{n,m}$$



[例] 正領域を通り原点から (8,2) へ至る径路の数は

$$\frac{2}{8}N_{8,2}=\frac{1}{4}\ {}_{8}C_{5}=\frac{1}{4}\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=14$$



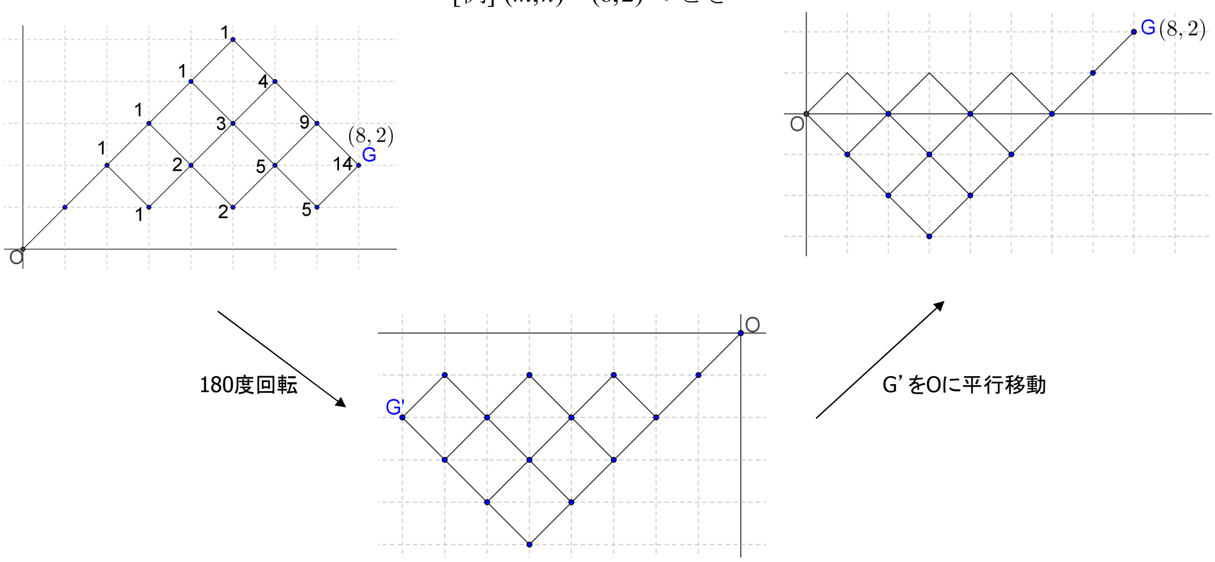
命題1'
(tan公式)

> n,m を自然数，原点から $G(n,m)$ に至る径路の総数を $N_{n,m}$ とすると，
> このうち n 回目に初めて $x=m$ に至る径路の総数は $\dfrac{m}{n}N_{n,m}$
> (注) n 回目に初めて $x=m$ に至る径路とは $s_1<m, s_2<m, \cdots, s_{n-1}<m, s_n=m$ をみたす道.

[証明] 正領域を通り $G(m,n)$ に至る径路を, O を中心に 180° 回転して，$\vec{u}=(m,n)$ 平行移動すれば

（O から G へ正領域を通る径路) $\underset{1対1}{\longleftrightarrow}$ (n 回目に初めて $x=n$ に達する径路)

[例] $(m,n)=(8,2)$ のとき



§2. 準備編 – 原点回帰の確率

命題2
（原点回帰の確率）

$u_0 = 1,\ u_{2n} = \dfrac{{}_{2n}C_n}{2^n},\quad f_0 = 0,\ f_{2n} = \dfrac{u_{2n-2}}{2n}$ とすると

(a) 途中はどうであれ $2n$ 回目に原点に回帰する確率は u_{2n}

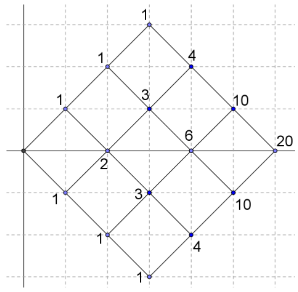
(b) $2n$ 回目に初めて原点に回帰する確率は f_{2n}

(d) $2n$ 回目までに，決して原点に戻らない確率は u_{2n}

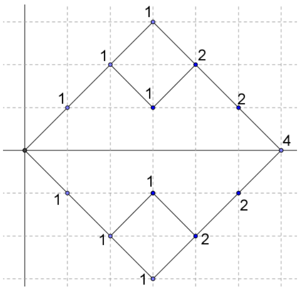
(e) $2n$ 回目までに，決して負の領域に入らない確率は u_{2n}

(注)
(b) は (命題1; tan公式)
からすぐ導けるが
f_{2n} の定義と考えても
良い. 式は当分不要.

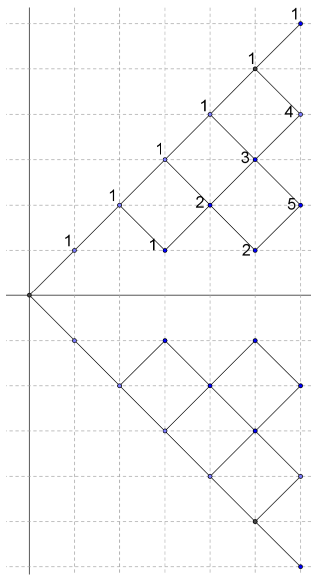
[a]



[b]



[d]



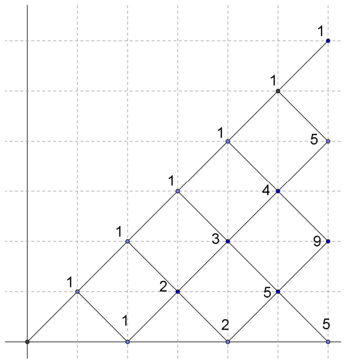
[例] $(n=3$ のとき) 図より 6 回目までに，

決して原点に戻らない確率は $\dfrac{2(1+4+5)}{2^6} = \dfrac{20}{2^6}$,

決して負の領域に入らない確率は $\dfrac{1+5+9+5}{2^6} = \dfrac{20}{2^6}$

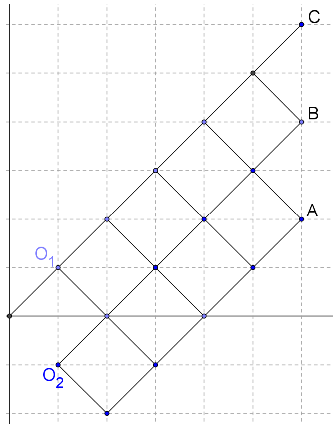
これらはともに $u_6 = \dfrac{{}_6C_3}{2^6}$ と等しい

[e]



$\boxed{(d)\ 2n \text{ 回目までに，決して原点に戻らない確率は } u_{2n}\left(\text{但し } u_0=1,\ u_{2n}=\frac{{}_{2n}C_n}{2^n}\right)}$ の証明

$n=3$ の時で説明する．図の様にA,B,C,O_1,O_2 をとり「点 X から Y の全ての径路数」を $n(X\to Y)$ と表す．



(O から A へ正領域を通って行く道の数)

$=$ (O_1 から A へ行く道の数) $-$ (O_1 から A へ行く道のうち t 軸と共有点を持つ道の数)

$=$ (O_1 から A へ行く道の数) $-$ (O_2 から A へ行く道の数)

$=$ (O_1 から A へ行く道の数) $-$ (O_1 から B へ行く道の数) $\leftarrow$ 平行移動しても径路数は同じ

$=n(O_1\to A)-n(O_1\to B)\cdots$①

同様にして

(O から B へ正領域を通って行く道の数) $=n(O_1\to B)-n(O_1\to C)\cdots$②

(O から C へ正領域を通って行く道の数) $=n(O_1\to C)\cdots$③

$\therefore$ (O から A, B, C へ正領域を通って行く道の数) $=$ (①$+$②$+$③) $=n(O_1\to A)={}_5C_2$

したがって 6回まで原点に戻らない確率は $\dfrac{2\times{}_5C_2}{2^6}=\dfrac{{}_6C_3}{2^6}=u_6$

同様にして，

($2n$ 回まで原点に戻らないで正領域を進む道の数)

$=n(O_1\to A(2n,2))=n(O\to(2n-1,1))={}_{2n-1}C_n$ $\leftarrow$ O から $(2n-1,1)$ へ行くには，右へ n 回，左へ$(n-1)$回

$$\therefore (2n \text{ 回まで原点に戻らない確率})=\frac{2\times{}_{2n-1}C_n}{2^{2n}}=\frac{\frac{2(2n-1)!}{n!(n-1)!}}{2^{2n}}=\frac{\frac{(2n)\cdot(2n-1)!}{n!\cdot n\cdot(n-1)!}}{2^{2n}}=\frac{\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}}{2^{2n}}=\frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}}=u_{2n}$$

$\boxed{(e)\ 2n \text{ 回目までに，決して負の領域に入らない確率は } u_{2n} \left(\text{但し } u_0 = 1,\ u_{2n} = \dfrac{{}_{2n}C_n}{2^n} \right)}$ の証明

$n = 3$ の時で説明する．
[図d] で t 軸と x 軸をそれぞれ 1 平行移動して考えると [図d] の径路と [図e] の径路のうち $0 \le t \le 5$ の部分が 1 対 1 に対応する．

さらに [図e] において図の様に A,B,C,P,Q,R,S をとり
「$x \ge 0$ を通り点 X から Y へ行く径路数」を $n_{\ge 0}(X \to Y)$ と表すと，

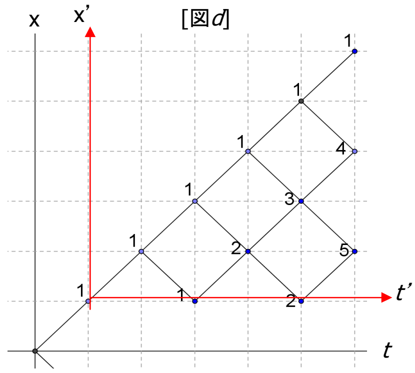
$$\begin{cases} n_{\ge 0}(O \to P) = n_{\ge 0}(O \to A), \\ n_{\ge 0}(O \to Q) = n_{\ge 0}(O \to A) + n_{\ge 0}(O \to B), \\ n_{\ge 0}(O \to R) = n_{\ge 0}(O \to B) + n_{\ge 0}(O \to C), \\ n_{\ge 0}(O \to S) = n_{\ge 0}(O \to C) \end{cases}$$

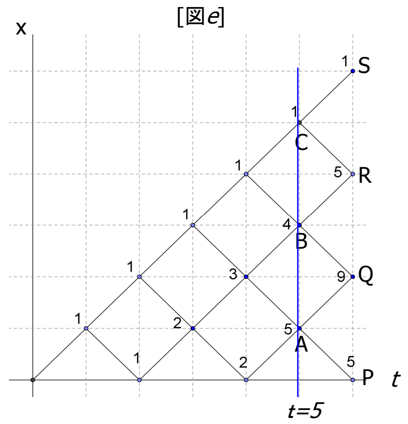
よって，

$$n_{\ge 0}(\mathrm{O \to P}) + n_{\ge 0}(\mathrm{O \to Q}) + n_{\ge 0}(\mathrm{O \to R}) + n_{\ge 0}(\mathrm{O \to S})$$
$$= 2\{ n_{\ge 0}(\mathrm{O \to A}) + n_{\ge 0}(\mathrm{O \to B}) + n_{\ge 0}(\mathrm{O \to C}) \}$$

[図d]の見えない下半分 (負領域) についても考慮すると,

(e) の確率 ＝ (d) の確率





命題2(続き)

(f) n が自然数の時 $u_{2n}=\sum_{k=1}^{n} f_{2k}u_{2n-2k}$ $\left(\text{但し } u_0=1,\ u_{2n}=\frac{{}_{2n}C_n}{2^n},\ f_0=0,\ f_{2n}=\frac{u_{2n-2}}{2n}\right)$

[例]$u_2=f_2u_0$,

$u_4=f_2u_2+f_4u_0$,

$u_6=f_2u_4+f_4u_2+f_6u_0$,

$u_8=f_2u_6+f_4u_4+f_6u_2+f_8u_0$

[証明]

(a) 途中はどうであれ $2n$ 回目に原点に回帰する確率は u_{2n}
(b) $2n$ 回目に初めて原点に回帰する確率は f_{2n}
の性質を使う.

$n=3$ のときの式「$u_6=f_2u_4+f_4u_2+f_6u_0$」を例にとり説明する．(a),(b) より,

f_2u_4=(2 回目に初めて原点に回帰する確率)×(さらに4 回後に原点に回帰する確率)

f_4u_2=(4 回目に初めて原点に回帰する確率)×(さらに2 回後に原点に回帰する確率)

f_6u_0=(6 回目に初めて原点に回帰する確率)

したがって,

$f_2u_4+f_4u_2+f_6u_0$=(途中はどうであれ 6 回目に原点に回帰する確率)$=u_6$

一般の場合も同様.

§ 3. 逆正弦法則

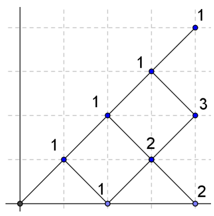
[離散バージョン] 長さ $2n$ の全ての道2^{2n}個から任意に 1 つを選ぶ時, $2k(k=0,1,2,\cdots n)$ の長さが正領域, $(2n-2k)$ が負領域にあるような道が選ばれる確率を$P_{2k,2n}$ とすると,

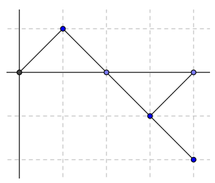
$$P_{2k,2n}=u_{2k}u_{2n-2k}\quad\left(\text{但し } u_0=1,\ \ u_{2n}=\frac{{}_{2n}C_n}{2^n}\right)$$

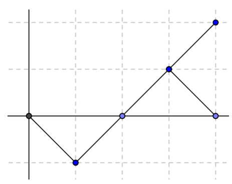
$n=1$ のとき, $P_{2,2}=P_{0,2}=u_2u_0=\dfrac{{}_2C_1}{2^2}\times1=\dfrac{1}{2}$

$n=2$ のとき

$$\begin{cases} P_{4,4}=u_4u_0=\dfrac{{}_4C_2}{2^4}\cdot1=\dfrac{6}{16} \\ P_{2,4}=u_2u_2=\dfrac{{}_2C_1}{2^2}\cdot\dfrac{{}_2C_1}{2^2}=\dfrac{4}{16} \\ P_{0,4}=u_0u_4=1\cdot\dfrac{{}_4C_2}{2^4}=\dfrac{6}{16} \end{cases}$$

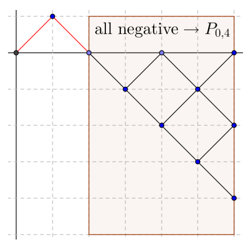


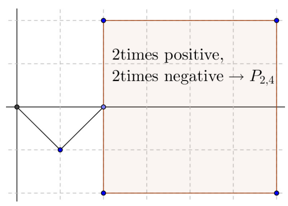


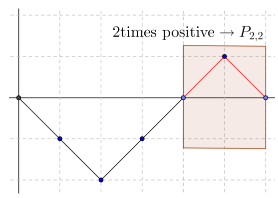


$n=3$ のとき

$$\begin{cases} P_{6,6}=P_{0,6}=u_6u_0=\dfrac{{}_6C_3}{2^6}\cdot1=\dfrac{20}{2^6} \\ P_{2,6}=u_2u_4=\dfrac{{}_2C_1}{2^2}\cdot\dfrac{{}_4C_2}{2^4}=\dfrac{12}{2^6} \\ P_{4,6}=u_4u_2=\dfrac{{}_4C_2}{2^4}\cdot\dfrac{{}_2C_1}{2^2}=\dfrac{12}{2^6} \end{cases}$$







(例えば $P_{2,6}$ は大きく分けて図の3通り)

$$\boxed{P_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k} \quad \left(\text{但し } u_0 = 1,\ \ u_{2n} = \frac{{}_{2n}C_n}{2^n}\right)\cdots(*)}$$ の証明

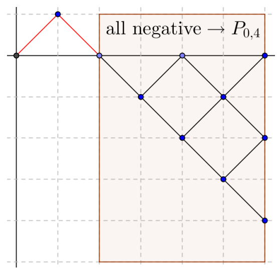
(b) $2n$ 回目に初めて原点に回帰する確率は f_{2n} $\left(\text{但し} f_0 = 0,\ f_{2n} = \dfrac{u_{2n-2}}{2n}\right)$
(e) $2n$ 回目までに，決して負の領域に入らない確率は u_{2n} $\left(\text{但し } u_0 = 1,\ u_{2n} = \dfrac{{}_{2n}C_n}{2^n}\right)$
(f) n が自然数の時 $u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k}u_{2n-2k}$

を使う.

(e)より $P_{2n,2n} = u_{2n} = u_{2n}u_0$.　　また t 軸に関する対称性から $P_{0,2n} = u_{2n} = u_0u_{2n}$

故に「n についての数学的帰納法」で $1 \le k \le n-1$ に対し, 成り立つ事を示せばよい.

例として「$n=2 \to n=3$」の場合を示す.（「$n=1 \to n=2$」の場合も同様にできる.）



$P_{2,6} =$ (正領域を通り 2 回目に原点回帰) × (残り 4 回の内 0 回正領域)

　+(負領域を通り 2 回目に原点回帰) × (残り 4 回の内 2 回は正領域)

　+(負領域を通り 4 回目に原点回帰) × (残り 2 回の内 2 回は正領域)

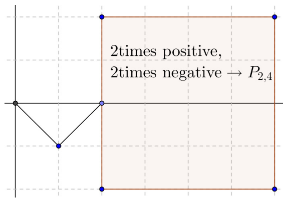
$$= \frac{1}{2}f_2 \cdot P_{0,4} + \frac{1}{2}f_2 \cdot P_{2,4} + \frac{1}{2}f_4 \cdot P_{2,2}$$

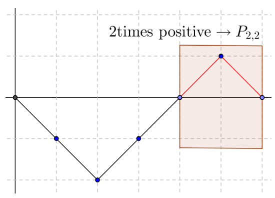
$$= \frac{1}{2}f_2 \cdot u_0u_4 + \frac{1}{2}f_2 \cdot u_2u_2 + \frac{1}{2}f_4 \cdot u_2u_0 \leftarrow \boxed{\text{帰納法の仮定}}$$

$$= \frac{1}{2}f_2u_0 \cdot u_4 + \frac{1}{2}u_2(f_2u_2 + f_4u_0)$$

$$= \frac{1}{2}u_2u_4 + \frac{1}{2}u_2u_4 \quad \leftarrow \boxed{f_2u_0 = u_2,\ f_2u_2 + f_4u_0 = u_4}$$

$$= u_2u_4$$





($P_{4,6}$ も同様にできる. $P_{6,6}$ や $P_{0,6}$ は途中で原点に戻るとは限らないので, 数学的帰納法では出来ない)

同様に「$n=3 \to n=4$」の場合もできる．例えば $P_{6,8}$ の場合は次の様になる.

$$P_{6,8}=\left(\frac{1}{2}f_2\cdot P_{4,6}+\frac{1}{2}f_4\cdot P_{2,4}+\frac{1}{2}f_6\cdot P_{0,2}\right)+\frac{1}{2}f_2\cdot P_{6,6}$$

$$=\left(\frac{1}{2}f_2\cdot u_4u_2+\frac{1}{2}f_4\cdot u_2u_2+\frac{1}{2}f_6\cdot u_0u_2\right)+\frac{1}{2}f_2\cdot u_6u_0 \leftarrow \boxed{\text{帰納法の仮定}}$$

$$=\frac{1}{2}(f_2u_4+f_4u_2+f_6u_0)\,u_2+\frac{1}{2}u_6\cdot f_2u_0$$

$$=\frac{1}{2}u_6u_2+\frac{1}{2}u_6u_2 \quad \leftarrow \boxed{f_2u_4+f_4u_2+f_6u_0=u_6,\quad f_2u_0=u_2}$$

$$=u_6u_2$$

一般に「$P_{2k,2\mathrm{N}}=u_{2k}u_{2\mathrm{N}-2k}$が, N=1, 2, 3⋯$(n-1)$ において成り立つ」と仮定すると

$$P_{2k,2n}=\left(\frac{1}{2}f_2P_{2k-2,2n-2}+\cdots+\frac{1}{2}f_{2k}P_{0,2n-2k}\right)+\left(\frac{1}{2}f_2P_{2k,2n-2}+\cdots+\frac{1}{2}f_{2n\text{-}2k}P_{2k,2k}\right)$$

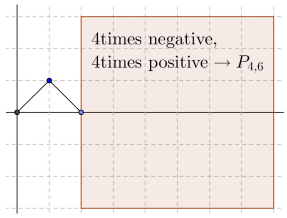
$$=\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{2}f_{2r}\ P_{2k-2r,2n-2r}+\sum_{r=1}^{n-k}\frac{1}{2}f_{2r}\ P_{2k,2n-2r}$$

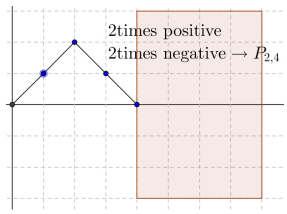
$$=\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{2}f_{2r}\ u_{2k-2r}u_{2n-2k}+\sum_{r=1}^{n-k}\frac{1}{2}f_{2r}\ u_{2k}u_{2n-2k-2r} \quad \leftarrow \boxed{\text{帰納法の仮定}}$$

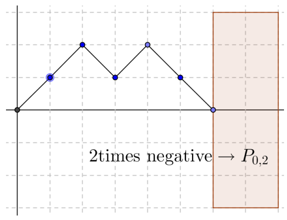
$$=\frac{1}{2}u_{2n-2k}\sum_{r=1}^{k}f_{2r}\ u_{2k-2r}+\frac{1}{2}u_{2k}\sum_{r=1}^{n-k}f_{2r}\ u_{2n-2k-2r}$$

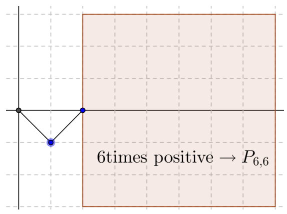
$$=\frac{1}{2}u_{2n-2k}u_{2k}+\frac{1}{2}u_{2k}u_{2n-2k} \qquad \leftarrow \boxed{u_{2n}=\sum_{r=1}^{n}f_{2r}u_{2n-2r}}$$

$$=u_{2n-2k}u_{2k}$$ (N= n の時も成り立つ)









逆正弦法則(ArcSin法則)

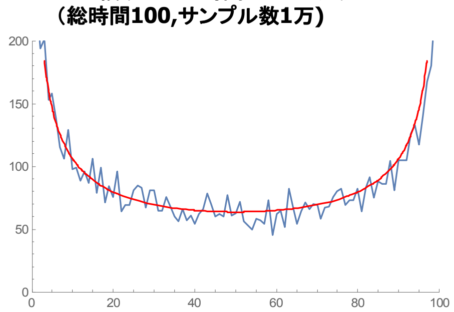
［連続バージョン］偏りの無いコイン投げによる乱歩で,
単位時間の間に 正の領域にいる時間を t とすると，確率密度関数は

$$p(t)=\frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}$$

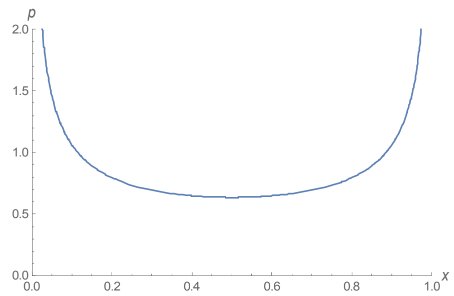
また 単位時間の間に正の領域にいる時間が $\alpha \le t \le \beta$ となる確率は

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(t)dt=\frac{2}{\pi}\left(\sin^{-1}\sqrt{\beta}-\sin^{-1}\sqrt{\alpha}\right)$$

正の領域にいた時間のヒストグラム
(総時間100,サンプル数1万)



「正の領域にいた時間の割合」の密度関数 *p(x)*



[証明] $\boxed{n >> 1 \text{ のとき}, \ n! \sim \sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n}}$ を使う. ($n! \sim n^n e^{-n}$ では駄目)

十分大きい n に対し, 上の 「スターリングの公式」から,

$$u_{2n} = \frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4n\pi}(2n)^{2n} e^{-2n}}{2^{2n}\cdot 2n\pi \cdot n^{2n} e^{-2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

従って

$$P_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k} \sim \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}$$

故に「$k_1 \le k \le k_2$」となる確率 (図の網掛け領域の面積)は,

$$P(k_1 \le k \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\, dk \ \cdots ①$$

$\frac{k}{n} = t$ と置換し, $t_i = \frac{k_i}{n} (i = 1,2)$ とおくと

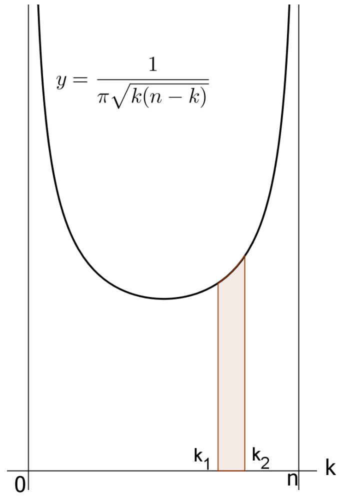
$$① = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\pi\sqrt{nt(n-nt)}}\, n\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\, dt$$

即ち, 確率密度関数は

$$p(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}$$

単位時間に, 正の領域にいる時間が $\alpha \le t \le \beta$ となる確率は

$$\int_\alpha^\beta p(t)dt = \left[\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{t}\right]_\alpha^\beta = \frac{2}{\pi}\left(\sin^{-1}\sqrt{\beta} - \sin^{-1}\sqrt{\alpha}\right)$$



[例] $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = 1$ を代入して

$$P(\alpha \le t \le \beta) \approx \frac{1}{3}.$$

対称性も考えると, 3人中2人は原点に戻らずに その人生の $\frac{3}{4}$ 以上を過ごす.