同じものを含む円順列と数珠順列

2023 年 7 月 21 日　生越　茂樹

a2 個,b2 個,c1 個の円順列の様に或る文字が 1 個しかない時は，その文字を固定して考え，円順列が 4!/(2!2!)=$_4C_2$=6 個．また或る軸に関して対称な円順列は 2 通りだから，数珠順列は (6 - 2)/2+2=4 個となる．しかし a4 個,b4 個,c2 個の様に，1 個だけの文字が無い時は，上記の「固定法」が使えない．

このうち「同じものを含む円順列」については，例えば おいしい数学 が分かり易かった．しかし「同じものを含む数珠順列」については適当な説明が見つからなかったので自分で書くことにしました．(すこし難しい公式なら「バーンサイドの補題」があります)

この解説は高校生，大受生，と数学愛好家向けにできるだけ解りやすく書きましたが，高校生や大受生の方には，難しすぎるかもしれません．しかし，同じものを含む数珠順列で全てが偶数個かつ個数が多いもの（赤 4,白 4，青 4 など）はまず出題されないので，遊びのつもりで気楽に読んで下さい．

公式は驚くほど簡単です．多分あっていますが，一人で考えたので，100%確実では有りません．^_^;　間違っている場合も責任は取れませんが，是非 こちら にご連絡下さい．

§はじめに．*Mathematica* と円順列，数珠順列

解説を読む前にまずは触ってみると良く分かることがあります．私もまずプログラムを作った後で公式に気づきました．使ったソフトは *Mathematica* です．ファイルはこちら に置いてあります．*Mathematica* をお持ちでない方でも「Wolfram　player」という無料のソフト（アプリ）をインストールすれば，簡単に 円順列や数珠順列を数え上げたり，表示したりする事ができます．なお 2023 年 7 月現在で Windows，Mac，Linux，iOS 用が有ります．残念ながら Android 用はまだです．先に触ってみたい人は，是非アクセスして下さい．

§1.　或る軸に関して対称な円順列

$$\boxed{(\text{数珠順列の個数})=\frac{(\text{円順列の個数})-(\text{或る軸に関して対称な円順列の個数})}{2}+(\text{或る軸に関して対称な円順列の個数})}$$

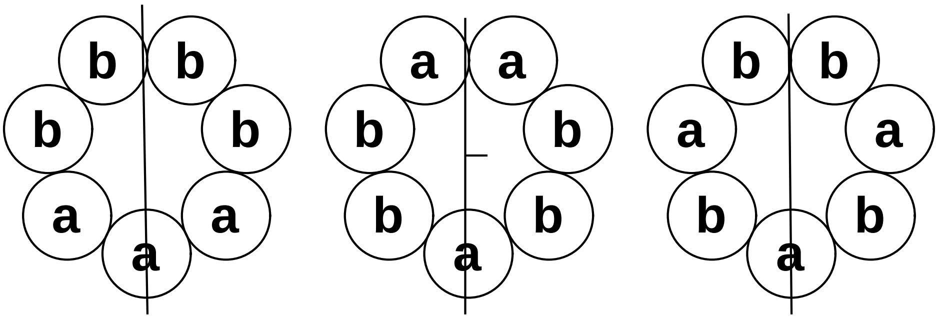
であるから「或る軸に関して対称な円順列」の個数が分かれば，数珠順列の個数も求まる．
（同じものを含む円順列の解説は，Web 上に沢山あります．例えば，前書きのリンク参照.）

以後 簡単のため「或る軸に関し対称な円順列」を「対称な円順列」と呼び，また a,b,c,⋯ と書いてある玉を並べるものとします．

1. a,b,c…のうち奇数個あるものが1種類のとき,

例えば a3個,b4個を並べる円順列では, 奇数個であるaを通る直線に関してのみ対称となりえる. 故に対称な円順列は

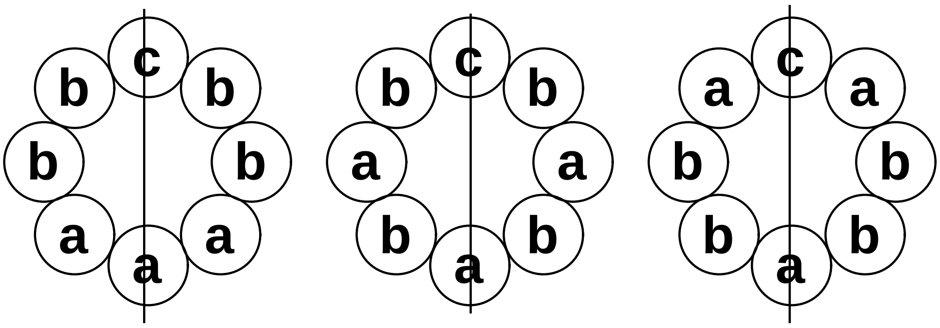
$$(\text{左半分の } a,b,b \text{ の順列}) = \frac{3!}{2!} = 3 \text{ 通り}$$



2. a,b,c…のうち奇数個あるものが2種類のとき

例えば a3個,b4個,c1個を並べる円順列では, 奇数個であるaとcを結ぶ図の様な直線に関してのみ対称となりえる. よって対称な円順列は

$$(\text{左半分の } a,b,b \text{ の順列}) = \frac{3!}{2!} = 3 \text{ 通り}$$



3. a,b,c…のうち奇数個あるものが3種類以上有るとき

例えば a3個,b3個,c3個を並べる円順列では, 対称な円順列は存在しない.

以上は簡単であった. 以下 a,b,c… が全て偶数個の時を考える.

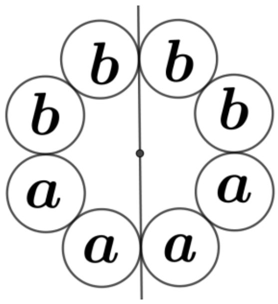
4. a,b,c…が全て偶数個のとき

例4-1. a4個,b4個のとき

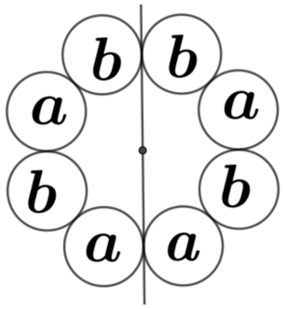
対称軸は「玉の間を通る軸」(ア,イ,ウの場合) と「2つの玉を結ぶ軸」(エ, オ, カの場合) の2種類が存在する. 以後, 前者の対称性を持つ円順列を TypeI, 後者の対称性を持つ円順列を TypeII と呼ぶ事とする.

［TypeⅠ］

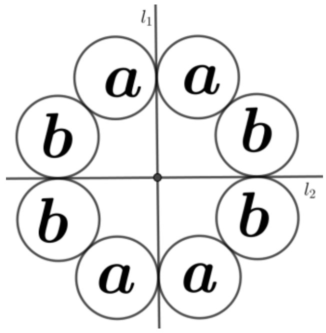
（ア）(a, a, b, b)と(b, b, a, a)



（イ）(a, b, a, b)と(b, a, b, a)



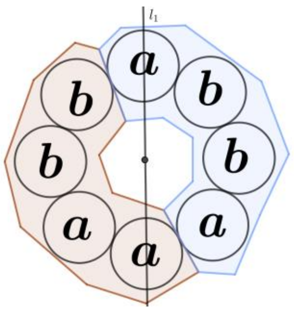
（ウ）(a, b, b, a)と(b, a, a, b)



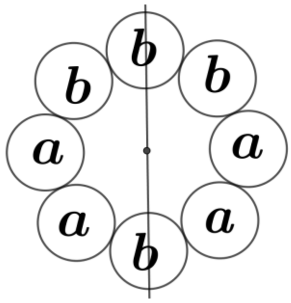
TypeⅠ の各々の円順列に対し，その軸の片側のみを並べる順列を対応させる．（時計回りにとるとする）すると（ア）では (a, a, b, b) と (b, b, a, a) が，（イ）では (a, b, a, b) と (b, a, b, a) の各々2 つが対応する．（ウ）では 対称軸が 2 本あり l_1 に対して(a, b, b, a)が，l_2 に対して(b, a, a, b)が対応し，合計ではやはり 2 個となる．このような順列を，対称のある円順列の「表現」ということにする．（次の TypeⅡ でも同じ）

［TypeⅡ］

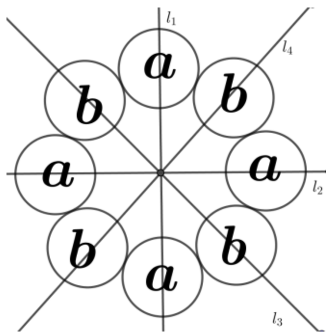
（エ）(a, a, b, b)と(a, b, b, a)



（オ）(b, a, a, b)と(b, b, a, a)



（カ）(a, b, a, b)と(b, a, b, a)



TypeⅡ の各々の円順列に対し，軸は同じ文字の球を結んだ直線となる．その玉を先頭にし，それに続く軸の片側のみの玉を並べた順列を対応させる．（やはり時計回りにとるとする）すると （エ）では (a, a, b, b) と (a, b, b, a) が，（オ）では (b, a, a, b) と (b, b, a, a) の各々 2 つが対応する．（カ）では 対称軸が 4 本あるが重複するものを除くと，その「表現」は (a, b, a, b) と (b, a, b, a) の 2 つとなる．

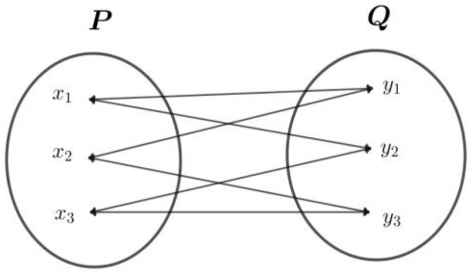
a2 個, b2 個の順列の集合を P とすると，

$$P = \{(a, a, b, b), (a, b, a, b), (a, b, b, a), (b, a, a, b), (b, a, b, a), (b, b, a, a)\}$$

或る軸に関して対称な円順列の集合を Q とすると，P の各々に対し，TypeⅠ の表現と見るか TypeⅡ の表現と見るかの 2 通りある．一方 Q の各々の要素に対し，P の要素への対応がやはり 2 通りある．そしてこの対応は相互対応である(→注)． 即ち，P の要素 x に対し Q の要素 y が対応しているとすると，y に対しても x は対応し，逆に y に対して x が対応すれば x に対しても y は対応する．(例えば (a, a, b, b)に TypeⅠ の対応で(ア)，そして(ア)に(a, a, b, b)は対応している．） よって集合 X の要素の数を $n(X)$ と表すと

$$n(Q) = n(P) = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

【注】残念ながら適当な述語が見つけられなかった．例えば $n(P)=3$ のとき，右の様な対応がその例となり $n(Q)=n(P)=3$．もし P の要素を TypeI/II の矢印を出すもので区別し x_1, x_1' … x_3, x_3' と個数を倍増し，Q の各要素は単純に倍増して P' と Q' を作ると，P' から Q' への１対１写像が作れるので $n(Q)=n(P)$ と考えても良い．



例 4-2．a6 個, b4 個のとき

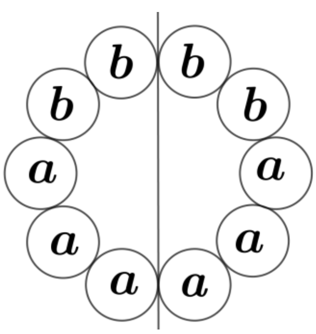
例 4-1 では TypeI と TypeII は別れていたが，今度は TypeI と TypeII の両方の軸を持つものが有る．次の(オ), (カ), (サ), (シ)がそれに当たる．例えば(オ)で TypeI は(a, b, a, b, a)の一つしかない．しかし TypeII の順列(a, b, a, a, b)が 1 つ存在する．同様（カ）は TypeI の軸(b, a, a, a, b)と TypeII の軸(a, a, b, b, a)を持つ．さらに(オ)=(サ)かつ(カ)=(シ)であり，これらは TypeI と TypeII の両方の軸を持つ．（結局，全部で 10 通りになる．）

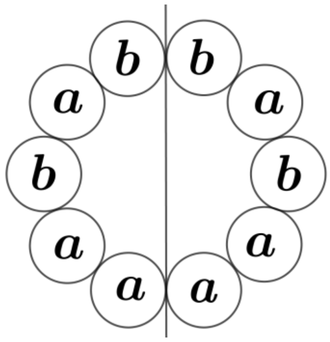
結局, a3 個, b2 個の順列の集合を P，或る軸に関して対称な円順列の集合を Q とすると，Q の各々の要素に対し, P の要素の対応が(TypeI と TypeII を合わせると)やはり 2 通りある．よって**例 4-1** と同様にして

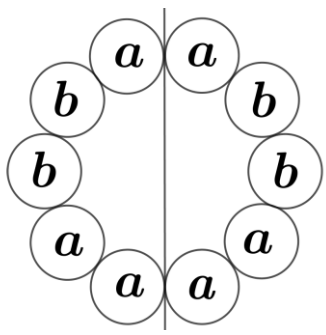
$$n(Q)=n(P)=\frac{5!}{2!3!}=10$$

[TypeI]の軸を持つもの

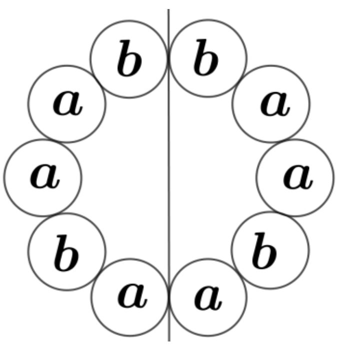
(ア) (a, a, a, b, b)と(b, b, a, a, a)　(イ) (a, a, b, a, b)と(b, a, b, a, a)　(ウ) (a, a, b, b, a)と(a, b, b, a, a)

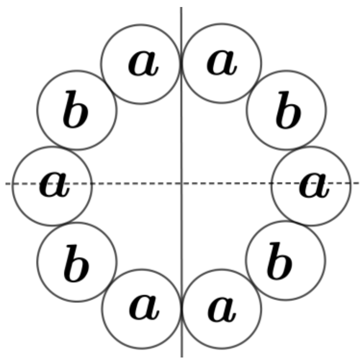


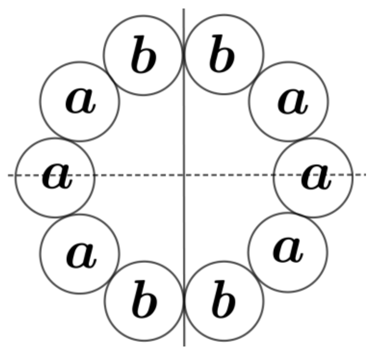




(エ) (a, b, a, a, b)と(b, a, a, b, a)　(オ) (a, b, a, b, a)と(a, b, a, a, b)　(カ) (b, a, a, a, b)と(a, a, b, b, a)

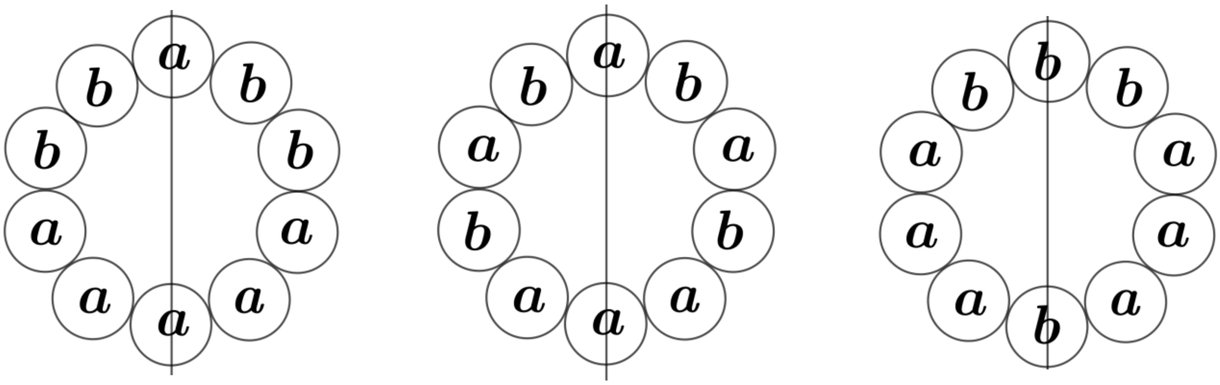




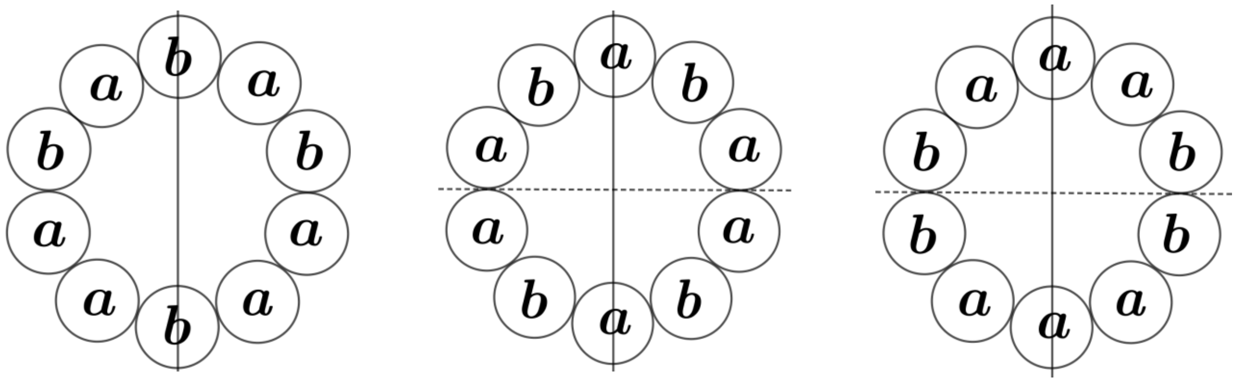


[TypeII]の軸を持つもの

（キ）(a, a, a, b, b) と (a, b, b, a, a)　（ク）(a, a, b, a, b) と (a, b, a, b, a)　（ケ）(b, a, a, a, b) と (b, b, a, a, a)



（コ）(b, a, a, b, a) と (b, a, b, a, a)　（サ）(a, b, a, a, b) と (a, b, a, a, b)　（シ）(a, a, b, b, a) と (b, a, a, a, b)



以上より, a, b, c…が全て偶数個 $(2n_1, 2n_2, 2n_3 ...$個$)$ の場合は，対称な円順列の個数は

$$(a\text{が}n_1\text{個}, b\text{が}n_2\text{個}, c\text{が}n_3\text{個}\cdots\text{の順列}) = \frac{(n_1+n_2+n_3+\cdots)!}{n_1!n_2!n_3!\cdots}\text{通り}$$

5．まとめ

以上より a, b, c, …がそれぞれ $m_1, m_2, m_3, \cdots$個あるとき，これらを全て並べてできる対称な円順列の個数を N, $n_1 = [m_1/2], n_2 = [m_2/2], \cdots$ とすると（$[x]$はガウス記号）

$$N = \begin{cases} 0\text{個} & (m_1, m_2, m_3\cdots\text{のうち奇数が3つ以上のとき}) \\ (a\text{が}n_1\text{個}, b\text{が}n_2\text{個}, c\text{が}n_3\text{個}\cdots\text{の順列}) = \dfrac{(n_1+n_2+n_3+\cdots)!}{n_1!n_2!n_3!\cdots}\text{個} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

§2. 数珠順列

$$(\text{数珠順列の個数}) = \frac{(\text{円順列の個数}) - (\text{対称な円順列の個数})}{2} + (\text{対称な円順列の個数})$$

が成り立つので，数珠順列の個数も簡単に求まる．

§ 付録　証明

2 種類以上の文字が各々偶数個ある時，これら全てを並べてできる「対称な円順列」の表現はちょうど 2 通りとなる事を大雑把に証明してみます．（以下，この頁では *a, b, c* は実数）

一般に $y=f(x)$ のグラフが $x=0$ と $x=a\ (a>0)$ について対称のとき，任意の x について

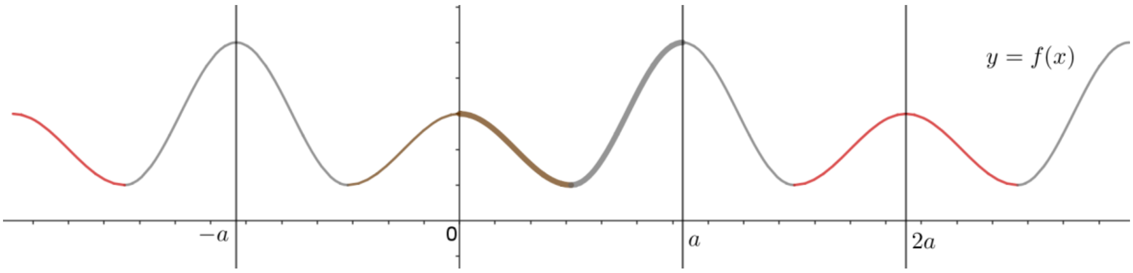
$$f(-x)=f(x) \text{ かつ } f(a-x)=f(a+x) \cdots ①$$

が成り立ちます(右側の式は $f(2a-x)=f(x)$ と同値.) このとき

$$f(2a+x)=f(a+(a+x))=f(a-(a+x))=f(-x)=f(x)$$

が成り立つので $f(x)$ の周期の 1 つは $2a$ です.

以下, a を①を満たす最小の正の数とします．このとき $f(x)$ の最小周期は $2a$ です.
$f(x)$ は $0 \le x \le a$ においては任意の値を取りえますが，自由なのはその区間だけです.



さらに　$f(b-x)=f(b+x)\ \ (0<a<b)$ が成り立つとすると,

$$f(b-(a+x))=f(b+(a+x))=f(a+(b+x))=f(a-(b+x))=f(-a+(b+x))$$

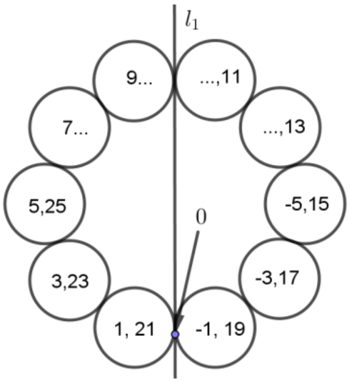
結局 $f(b-a-x)=f(b-a+x)$ も成り立つので　b が a の倍数でないとすると
繰り返しにより $f(c-x)=f(c+x)\ (0<c<a)$ となり矛盾です．即ち
$f(b-x)=f(b+x)\ \ (a<b)$ が成り立つならば, b は a の倍数です.　$\cdots$②

次に $f(a+x)=f(x)\cdots$③　が成り立つ場合を考えます.

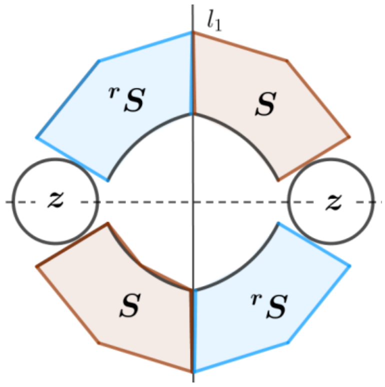
このとき　$f\left(\frac{a}{2}-x\right)=f\left(a-\left(\frac{a}{2}+x\right)\right)=f\left(a+\left(\frac{a}{2}+x\right)\right)=f\left(\frac{3a}{2}+x\right)=f\left(\frac{a}{2}+x\right)$

これは a が①をみたす最小の正の数であることに矛盾します.
したがって　a が①を満たす最小の正の数のとき，③は成り立ちません.

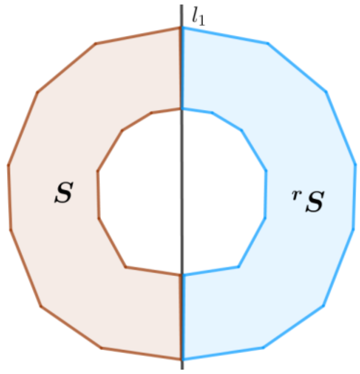
［図 1］



［図 2］



［図 3］



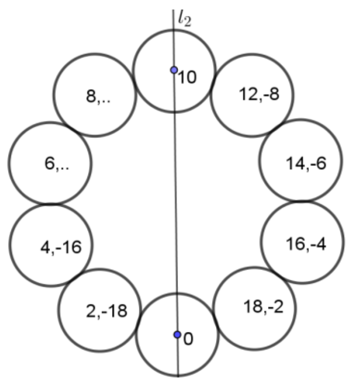
次に 例4-2 の拡張を考えます．$a,b,c\cdots$と書いた玉が計10個．2種類以上の文字を使い各々偶数個とします．これら全てを並べてできる対称な円順列で TypeI の軸 l_1 を持つものを考えます.［図1］の様に循環座標を取り（$x+20k$ (k は整数) に対する点は同じ点），x に対応する文字を $f(x)$ とすると，l_1 に関し対称なので

$$f(-x)=f(x) \text{ かつ } f(10-x)=f(10+x) \cdots④$$

ここで　$f(m-x)=f(m+x)\cdots⑤$　をみたす最小の正の数を m とします.

②より m は10の約数と成るので $m=1,2,5,10$ の何れか.
しかし $m=1$ のときは明らかに $f(x)$ は定数関数．$m=2$ のとき自由に設定できるのは $0\le x\le 2$ の区間だけ（すなわち $x=1$ の点にある玉だけ）なのでやはり $f(x)$ は定数関数.
$m=5$ のとき．S を玉2個の並びとし，${}^{r}S$ を S を逆に並べたもの ($S=(a,b)$ なら ${}^{r}S=(b,a)$)，
z は $a,b,c\cdots$ のいずれかで，ある特定の文字　とすると［図2］の様になる.
②より S や ${}^{r}S$ を貫く対称軸はなく，また③より $S\neq {}^{r}S$ であるから，この円順列の表現は $(S,z,{}^{r}S)$ と $(z,{}^{r}S,S)$ のちょうど2つ.
$m=10$ のときは，［図3］の様になり，$m=5$ のときと同様に考えて，この円順列の表現は S と ${}^{r}S$ のちょうど2つ.

以上から $a,b,c\cdots$ 合わせて10個(2種類以上の文字があり，全て偶数個)を並べた, TypeI の対称軸を持つ円順列の表現はちょうど2通りとなる.



TypeII の対称軸を持っている円順列の場合も右の様に座標を取れば　④と全く同じ式が成り立ち，同様に証明できる.

一般に「S や ${}^{r}S$ が軸で貫かれないこと」と「$S \neq {}^{r}S$」が成り立つので，玉の個数や m が変化しても $\{S, {}^{r}S\}, \{z, {}^{r}S, S\}$ などのセットの数が増減するだけとなり，合計が10個以外のときも成り立つ.