

GeoGebra による複素積分の可視化 その1. 積分の定義

生越 茂樹
ATCM 2019 in 楽山

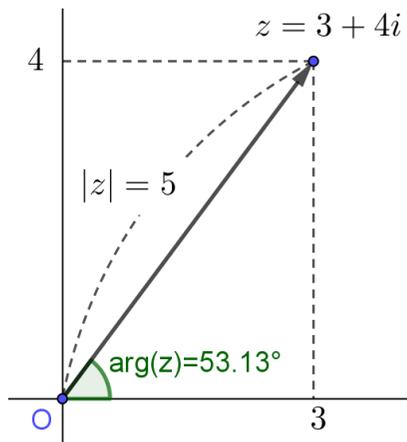
§ 0. 参考文献



1. 解析概論. 高木貞治著, 岩波書店

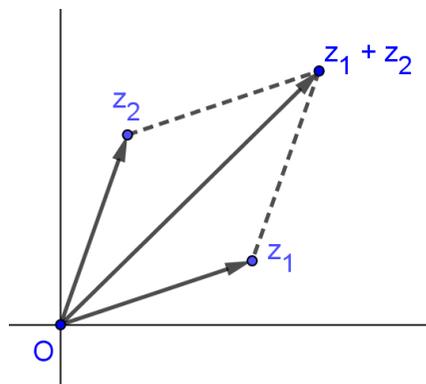
2. 複素関数論の基礎. 山本直樹著, 裳華房

§ 1. 複素数平面上での基本計算



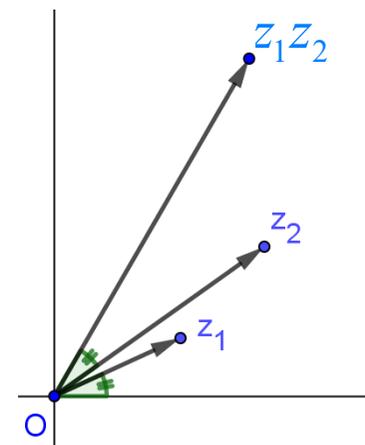
定義

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)
 \Downarrow
 (x, y) , \mathbb{R}^2 上の点
 $|z| \cdots O$ と z の距離
 $\arg(z) \cdots z$ の偏角



和と差

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ の時
 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
 \Downarrow
 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$
 平面ベクトルと同じ



積と商

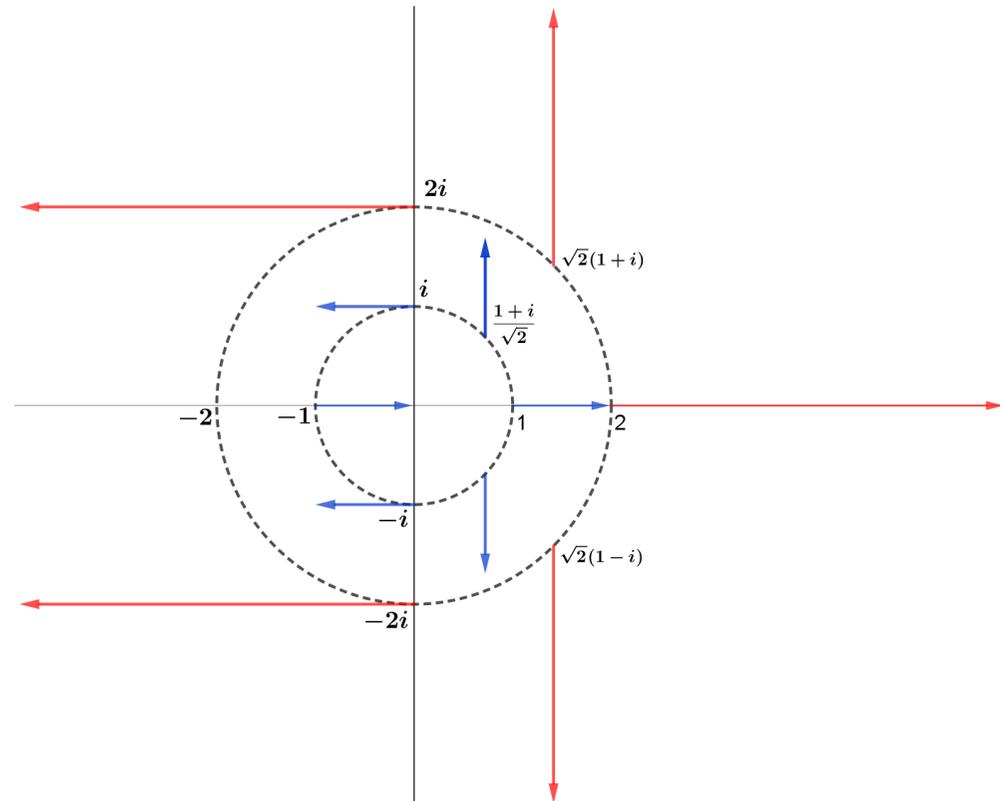
$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \\ \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \end{cases}$
 ' z_2 に z_1 を掛ける事 ' は
 ' z_2 を原点の周りに $\arg(z_1)$ だけ回転し
 O からの距離を $|z_1|$ 倍にする事.'
 例. $(a + bi) \times i = -b + ai$
 ' i を掛ける事 ' は ' O を中心の 90° の回転'

§ 2. ベクトル場としての複素関数

複素関数 $f(z) = u(z) + v(z)i$ ($z \in C$, $u(z), v(z) \in R$) に対し、
ベクトル場 $\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix}$ を対応させることができる。

例. $f(z) = z^2$ のベクトル場.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\pm 1) = 1, \quad f(\pm i) = i^2 = -1, \\ f\left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pm i \\ f(\pm 2) = 4, \quad f(\pm 2i) = 4i^2 = -4, \\ f(\sqrt{2}(1 \pm i)) = \pm 4i \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array} \right.$$

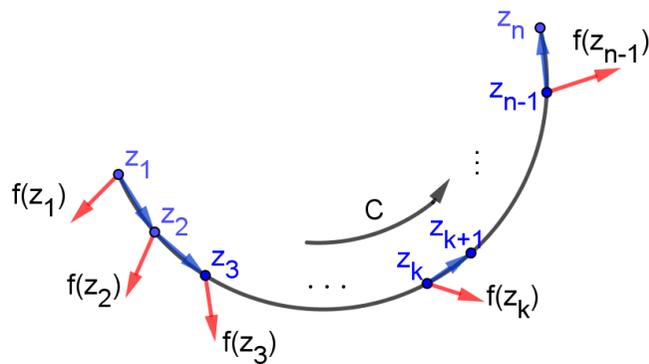


§ 3. 複素積分の定義

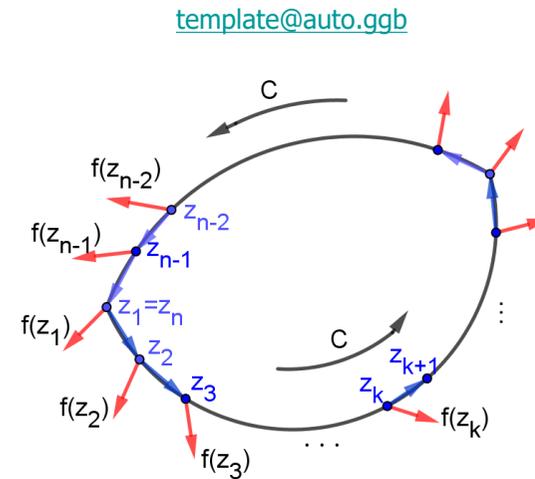
C は区分的に連続で方向のついた曲線 $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ は C 上の点 δ は隣り合う2点間の距離 $|z_{k+1} - z_k|$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$) の最大値とする. 分割数 n が増加する時, δ が 0 に収束するならば, $f(z)$ の C に沿っての積分は次のように定義される.

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k$$

始点 z_1 と終点 z_n は一致してもよく, その場合は C は閉曲線, 積分は周回積分と呼ばれる. 周回積分はしばしば $\oint_C f(z) dz$ と表される.



Line Integral

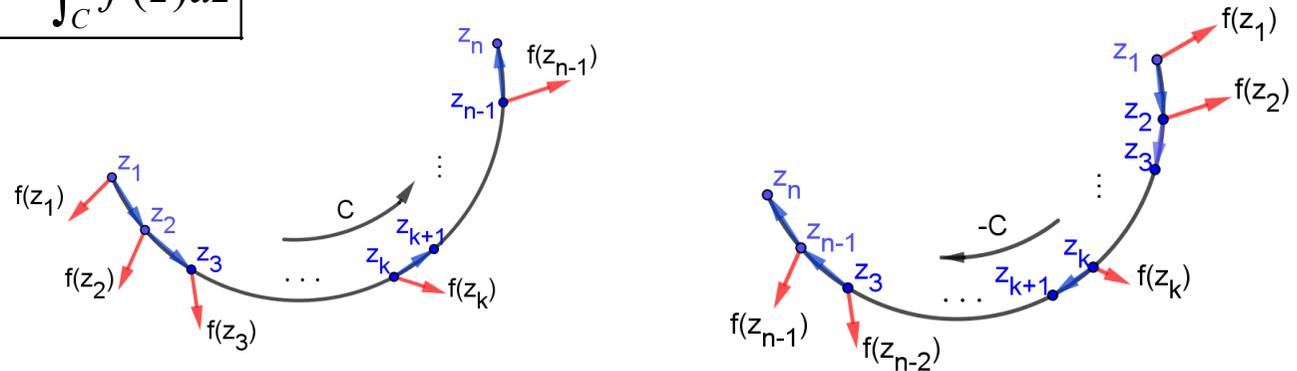


Contour Integral

複素積分の基本性質

(1) [reversed curve] $(-C)$ は C の始点と終点を入れ替えた曲線とする。この時、

$$\int_{-C} f(z) dz = -\int_C f(z) dz$$



(2) 経路の分割. $C_1 + C_2$ は、2曲線を一つにまとめた曲線とする。このとき、

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_1 + C_2} f(z) dz$$



$C_1 + C_2 = C$ (semicircle)

$C_1 + C_2$ is closed.

これらは、実関数の積分の以下の性質に対応し、証明も同様。

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

GeoGebra による複素積分の可視化 その2. Cauchyの積分定理

生越 茂樹

ATCM 2019 in 樂山

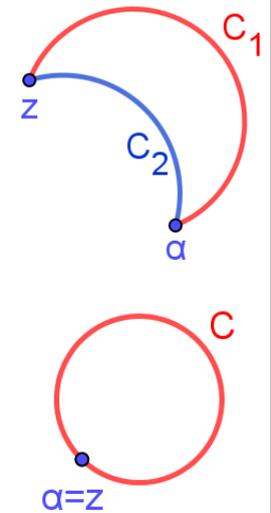
§ 4. 複素積分の基本定理

D を複素数平面上の領域、 $f(z)$ と $F(z)$ は D 上の複素解析関数とする。
 D 上で $F'(z) = f(z)$ が成り立つならば、 D 内の2点 α, z に対し、 α, z を結ぶ D 内の**任意の**曲線 C に対し

$$\int_C f(z) dz = [F(z)]_\alpha^z = F(z) - F(\alpha).$$

が成り立ち、積分値は α と z のみで定まる。即ち C の取り方によらない。このとき $F(z)$ を $f(z)$ の原始関数という。また $\alpha = z$ の時は、

$$\oint_C f(z) dz = 0$$



例.

[template@auto.ggb](#) [rectangle@auto.ggb](#) [1overz.;basic.ggb](#)

$(z^n)' = nz^{n-1}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) であるから、

$$\int_\alpha^z \frac{1}{z^3} dz = -\frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2\alpha^2}, \quad \int_\alpha^z \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} + \frac{1}{\alpha}, \quad \int_\alpha^z 1 dz = z - \alpha, \quad \int_\alpha^z z dz = \frac{z^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \int_\alpha^z z^2 dz = \frac{z^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3}$$

これらの積分値は、経路によらない。

注: $\int_\alpha^z \frac{1}{z} dz$ の値は α と z を結ぶ経路に依るので、 $\frac{1}{z}$ の原始関数は存在しない。

基本定理の「大雑把な」説明

$F'(z) = f(z)$ だから, $z_{k+1} - z_k \approx 0$ のとき,

$$F(z_{k+1}) - F(z_k) \approx F'(z_k)(z_{k+1} - z_k) = f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$$

$\therefore n \gg 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \{F(z_{k+1}) - F(z_k)\}$$

$$= \{F(z_2) - F(z_1)\} + \{F(z_3) - F(z_2)\} + \cdots + \{F(z_n) - F(z_{n-1})\}$$

$$= F(z_n) - F(z_1)$$

実関数の基本定理の証明と, 基本的には同じ.

§ 5. 円に沿った $1/(z-a)$ の積分

C は半径 r , 中心 a の円で, z は C 上の点とすると

$$z - a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\therefore dz = r(-\sin \theta + i \cos \theta)d\theta = i(z - a)d\theta$$

$$\therefore \frac{dz}{z - a} = i d\theta \quad \dots (!)$$

従って, C に沿った積分は (図2),

$$\int_C \frac{1}{z - a} dz = \int_0^\theta i d\theta = i\theta$$

特に C が 円の時,

$$\oint_C \frac{1}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

しかし $F(z) = \int_{a+r}^z \frac{1}{z - a} dz$ は z のみの関数ではない.

例えば C' に沿った積分は (図3)

$$\int_{C'} \frac{1}{z - a} dz = \int_0^{\theta+2\pi} i d\theta = i\theta + 2\pi i$$

同じ z に対し, 積分値は $i(\theta + 2\pi n)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

でありえる.

[1over\(z.ggb\)](#)

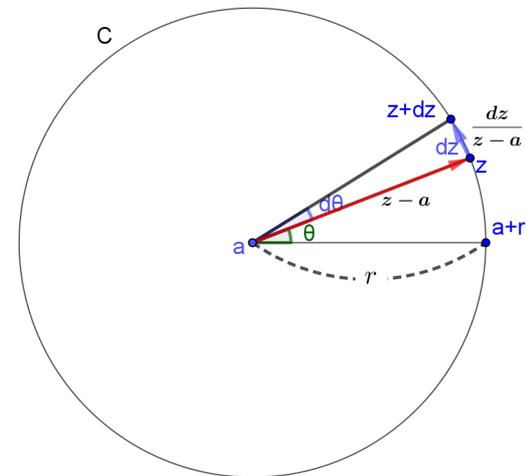


図1

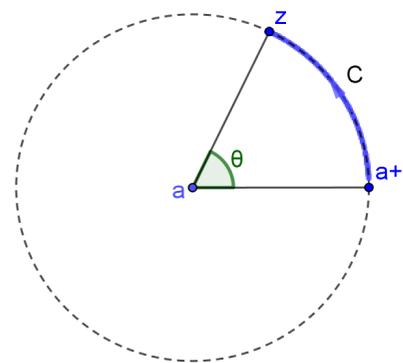


図2

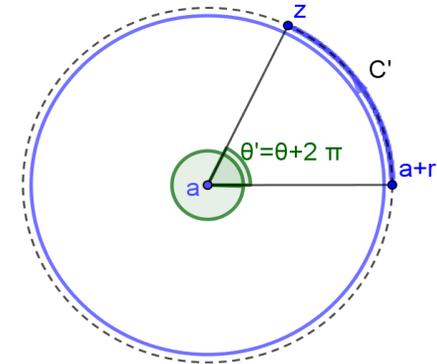


図3

[1over\(z;2circles.ggb\)](#)

§ 6. コーシーの積分定理

もし $f(z)$ が閉曲線 C の内部で解析的なら (もし C の内部に特異点がなければ)

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

• $f(z)$ が微分可能でない点を「特異点」という。

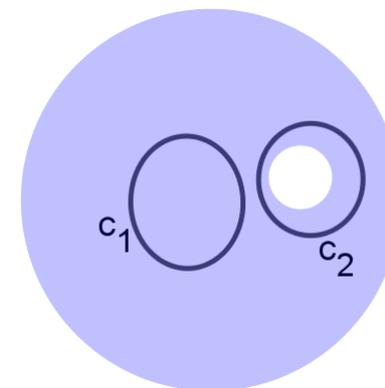
[例] 右図で、コーシーの積分定理は C_1 に適用できる。

しかし C_2 には適用できない。(内部に特異点がある)

しかし原点は $f(z) = \frac{1}{z^2}$ の特異点であるが 原点を含む

単位円の周りの積分「 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = 0$ 」は成り立つ。これは、

コーシーの定理でなく原始関数の存在から導かれる。



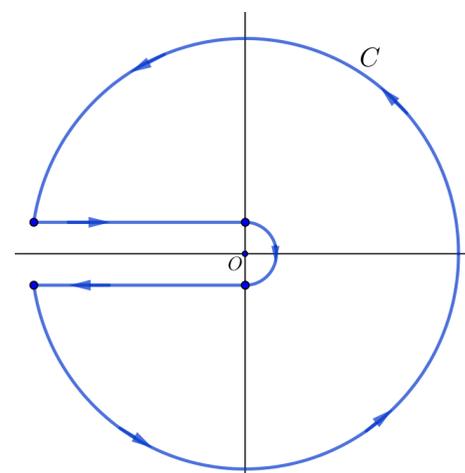
$f(z)$ は影の領域で解析的。

[例].

$f(z) = \frac{1}{z}$ は原点 O 以外で解析的であるから

O を含まない任意の閉曲線 C について

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 0$$



§ 7. 積分路の変形

(始点と終点の変形も考慮.)

$f(z)$ は 閉曲線 C の内部で z_1, z_2 を除き解析的とする. 下図の様に C を $C_a + C_b$ に分け, 小円 C_1, C_2 を z_1, z_2 の周りに作り (全ての円は反時計回り) さらに線分 $T_k (k=1 \dots 4)$ を作る. コーシーの定理より,

$$\oint_{C_a+T_1-C_1+T_2+C_b+T_3-C_2+T_4} f(z)dz = 0$$

積分は加法的なので,

$$\int_{C_a} f(z)dz + \int_{T_1} f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz + \int_{C_b} f(z)dz + \int_{T_3} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz + \int_{T_4} f(z)dz = 0$$

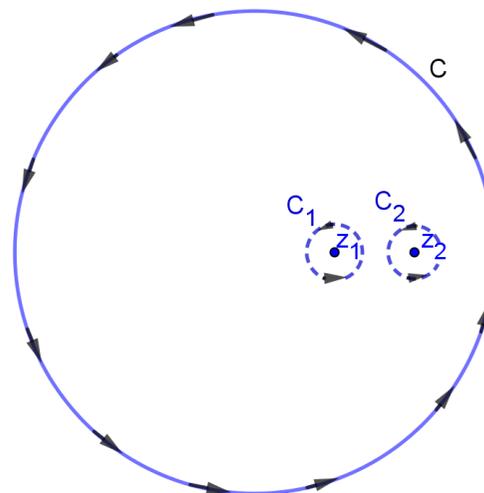
$f(z)$ は連続だから,

$$\int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz = 0, \quad \int_{T_3} f(z)dz + \int_{T_4} f(z)dz = 0, \quad \int_{C_a} f(z)dz + \int_{C_b} f(z)dz = \oint_C f(z)dz$$

従って,

$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

$$\therefore \boxed{\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz}$$



GeoGebra による複素積分の可視化 その3. Cauchyの積分公式

生越 茂樹

ATCM 2019 in 楽山

§ 8. コーシーの積分公式

$f(z)$ は閉曲線 C の内部で解析的で, a, z は C の内部の点とする. a の周りに半径 r の小円 C_a を反時計回りに作る. この時, 経路変形により,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{C_a} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \dots(1)$$

$f(z)$ は解析的なので, r が小さいとき,

$$f(z) \approx f(a) + (z-a)f'(a) \quad (\text{on } C_a)$$

従って

$$\oint_{C_a} \frac{f(z)}{z-a} dz \approx \oint_{C_a} \frac{f(a) + (z-a)f'(a)}{z-a} dz = f(a) \oint_{C_a} \frac{1}{z-a} dz + f'(a) \oint_{C_a} dz = 2\pi i f(a) + 0 \cdot f'(a)$$

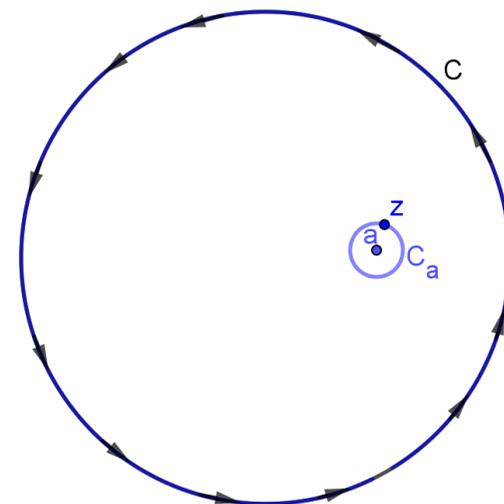
全ての r に対し, (1) が成り立つから,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{C_a} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

即ち,

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)} \quad \left(f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \right)$$

- $\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}$ ($a \neq b$)なども同様, 但し $\frac{f(z)}{(z-a)^2}$, $\frac{f(z)}{(z-a)^3}$ などは, 少し異なる.



What will happen when
 $r \rightarrow +0$

例1

$$I = \oint_C \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = \frac{\pi}{3} \quad \left(\begin{array}{l} C: \text{半径 } r \ (r > 2) \text{ の半円 } \widehat{AB} \\ + \text{線分 } \overline{BA}, \text{ 反時計回り} \end{array} \right)$$

被積分関数 $f(z) = \frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$ は C の内部に 2 つの特異点 i と $2i$ を持つ。

i と $2i$ の周りに, 反時計回りの小円 C_1, C_2 を作る. 経路変形により,

$$\oint_C \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = \oint_{C_1} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz + \oint_{C_2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz$$

ここで $f(z)$ は次の 2 通りに書ける.

$$\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{z^2 / \{(z+i)(z^2+4)\}}{z-i} = \frac{z^2 / \{(z^2+1)(z+2i)\}}{z-2i}$$

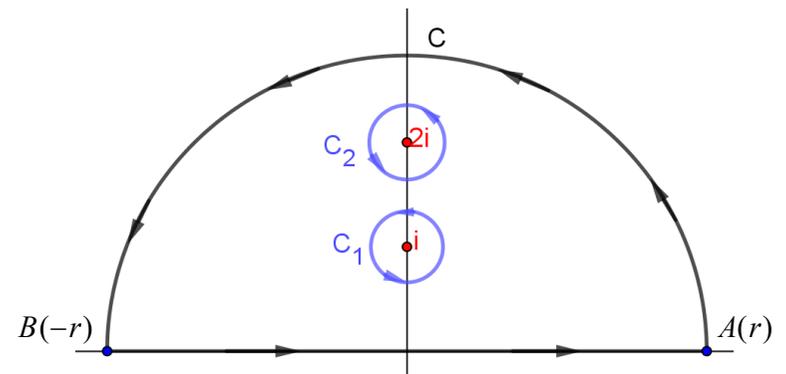
即ち $f(z) = \frac{f_1(z)}{z-i} = \frac{f_2(z)}{z-2i}$, 但し $f_1(z) \equiv \frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)}$, $f_2(z) \equiv \frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)}$

$f_1(z), f_2(z)$ は解析的なので, コーシーの積分公式により,

$$\oint_{C_1} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 2\pi i f_1(i) = 2\pi i \cdot \frac{i^2}{2i \cdot 3} = -\frac{\pi}{3},$$

$$\oint_{C_2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 2\pi i f_2(2i) = 2\pi i \cdot \frac{(2i)^2}{(-3) \cdot 4i} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore I = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$



$$I = \oint_C \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{3}$$

(続き) この積分は任意の $r (> 2)$ に対し成り立つので,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_C \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = \frac{\pi}{3}$$

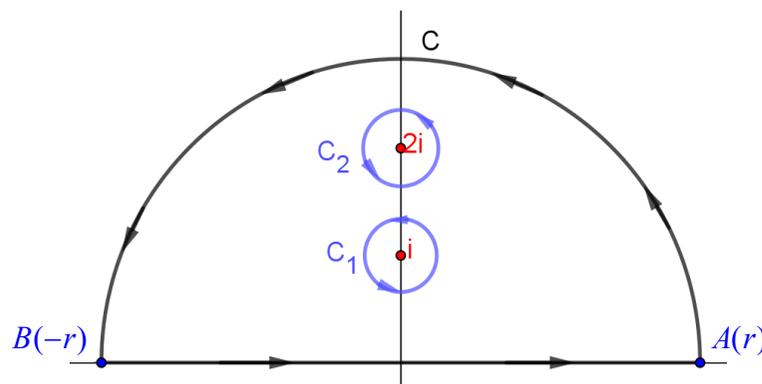
しかし $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ が半円 \widehat{AB} 上にあり, $r \gg 1$ のとき,

$$|f(z)| \approx \frac{r^2}{r^2 \cdot r^2} = \frac{1}{r^2}, \quad |dz| = r d\theta,$$

$$\therefore \int_{\widehat{AB}} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz < \int_{\widehat{AB}} |f(z)| |dz| \approx \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \cdot r d\theta \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

したがって

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_C \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{BA} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{3}$$



What will happen when

$$r \rightarrow \infty$$

寄り道. オイラーの公式

$$\begin{aligned} &\theta, x, y \in R(\text{実数}) \text{ のとき} \\ &e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \\ &e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

任意の複素数 z に対し, e^z は次の級数で定義される:

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

従って θ が実数の時,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

[Check it with GeoGebra]

これはとても簡単! 次の1行で大丈夫.

$$e^x \approx \text{sum}(\text{sequence}(x^n / n!, n, 0, 50))$$

例 2
$$I = \oint_C \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e} \quad \left(\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e} \right) \quad \left(C \text{ は例 1 と同じ曲線} \right)$$

(しかし, $r > 1$ とする)

$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}$ の C の中の特異点は i のみ. i の周りに

反時計回りの小円 C_1 を作る. 経路変形により,

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$$

ここで $f(z)$ を解析的な部分と発散する部分に分ける.

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{iz} / (z+i)}{z-i} = \frac{f_1(z)}{z-i}, \quad f_1(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}$$

$f_1(z)$ は C の中で解析的なので, コーシーの積分公式により,

$$\oint_{C_1} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \oint_C \frac{f_1(z)}{z-i} dz = 2\pi i \times f_1(i) = 2\pi i \times \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

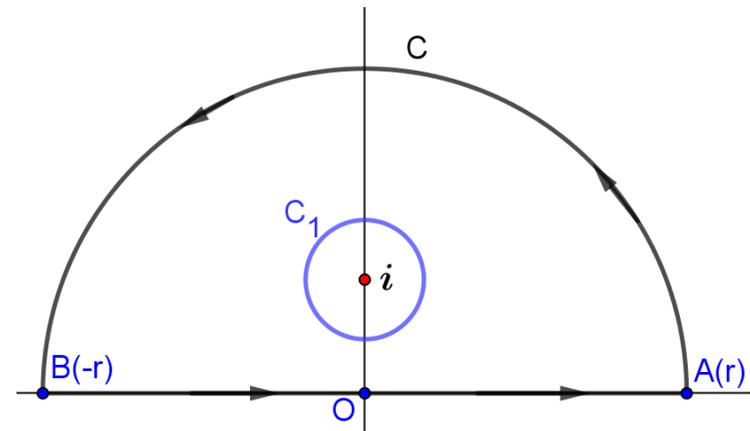
即ち

$$I = \oint_C \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e}$$

従って, $r \rightarrow \infty$ のとき (例 1 と同様にして)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$$



GeoGebra による複素積分の可視化 その4(応用編). 有名な積分

生越 茂樹

ATCM 2019 in 楽山

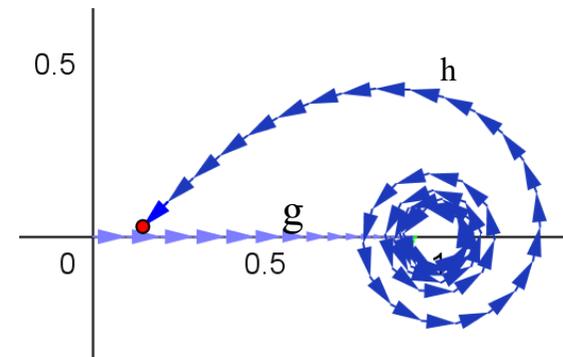
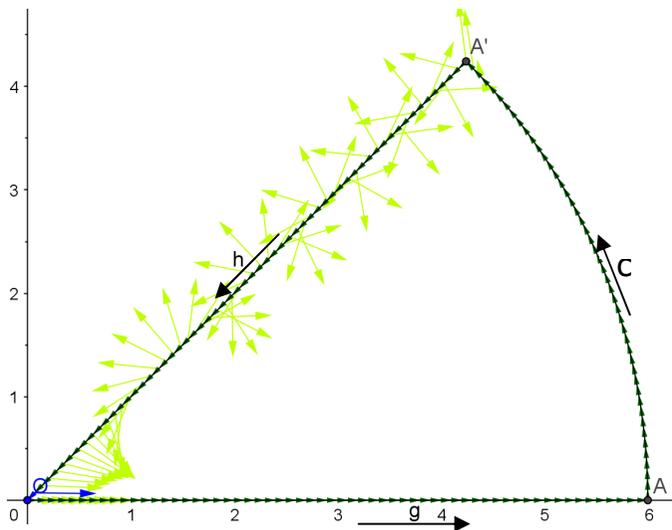
§ 9.有名な積分

例3

(Fresnel 積分)

$$\oint_{g+C+h} e^{-z^2} dz = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

fresnel@manual.ggb

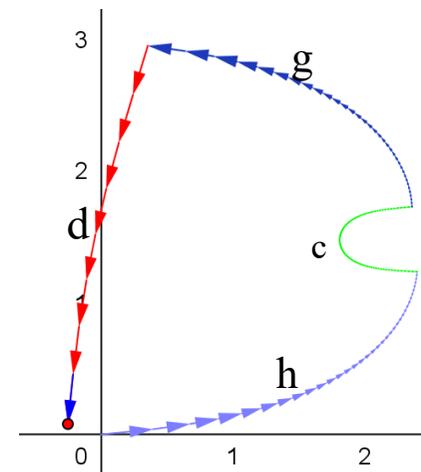
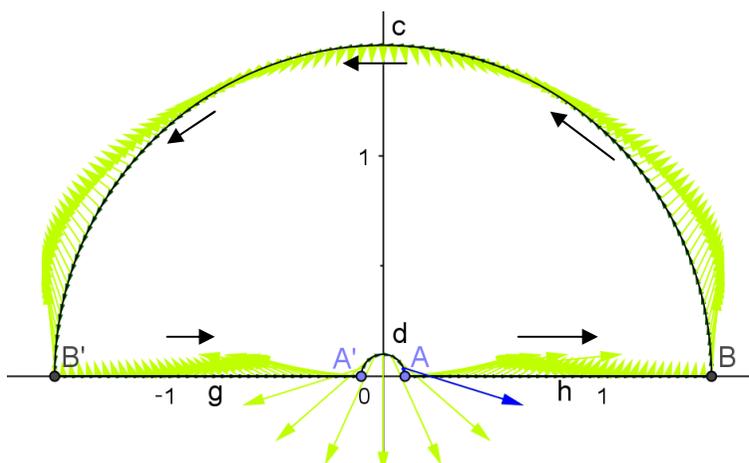


(c 上の積分は小さすぎて見えない)

例 4

$$\oint_{h+C+g+d} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

[e^\(iz\)over z.ggb](mailto:e^(iz)over z.ggb)



例4

$$\oint_{h+C+g+d} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ は正則だから $\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$

$A(\varepsilon, 0), B(b, 0)$ とおくと, $A \rightarrow B$ に沿っての積分は

$$\int_\varepsilon^b \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_\varepsilon^b \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx = \int_\varepsilon^b \frac{\cos x}{x} dx + i \int_\varepsilon^b \frac{\sin x}{x} dx$$

$B' \rightarrow A'$ に沿っての積分は

$$\int_{-b}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-b}^{-\varepsilon} \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx = \int_b^\varepsilon \frac{\cos(-t)}{(-t)} (-dt) + i \int_b^\varepsilon \frac{\sin(-t)}{(-t)} (-dt) = -\int_\varepsilon^b \frac{\cos x}{x} dx + i \int_\varepsilon^b \frac{\sin x}{x} dx$$

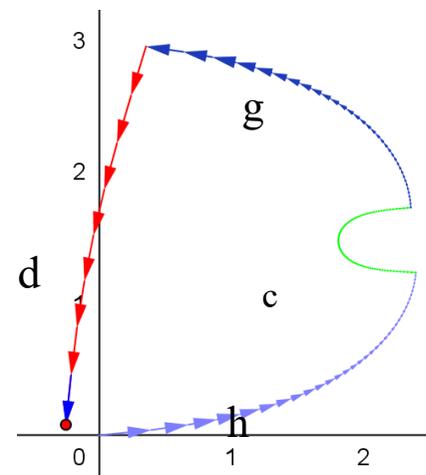
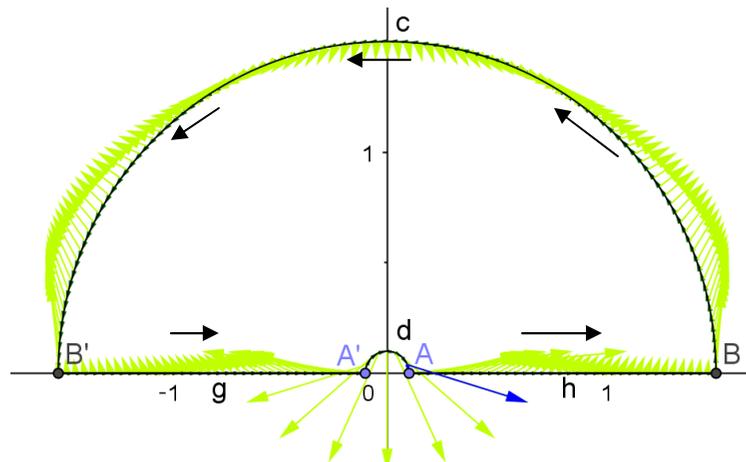
一方,

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots \text{だから, } \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2!} - i \frac{z^2}{3!} + \dots = \frac{1}{z} + P(z), \text{ (} P(z) \text{は正則関数)}$$

故に 弧 $A'A$ に沿っての積分は $\int_{\text{弧}A'A} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\text{弧}A'A} \frac{1}{z} dz = -\pi i$

例1,2と同様 $b \rightarrow \infty$ の時, 半円弧 BB' に沿っての積分は 0 に収束する.

$$\begin{aligned} \text{故に, } \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{A \rightarrow B} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\text{弧}BB'} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{B' \rightarrow A'} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\text{弧}A'A} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx - \pi i = 0 \\ \therefore \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



例3
(Fresnel 積分)

$$I = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \quad (\text{Fresnel 積分})$$

$f(z) = e^{-z^2}$ は全平面で解析的なので、コーシーの定理により、

$$\oint_{g+C+h} f(z) dz = 0 \quad (g, h \text{ は } O \text{ から } A, B \text{ に至る線分, } C \text{ は弧 } AB)$$

ここでは難しいので証明しないが、(例えば解析概論参照)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = 0 \quad \& \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_g f(z) dz = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{Gauss 積分})$$

したがって

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_h f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_g f(z) dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \dots (1)$$

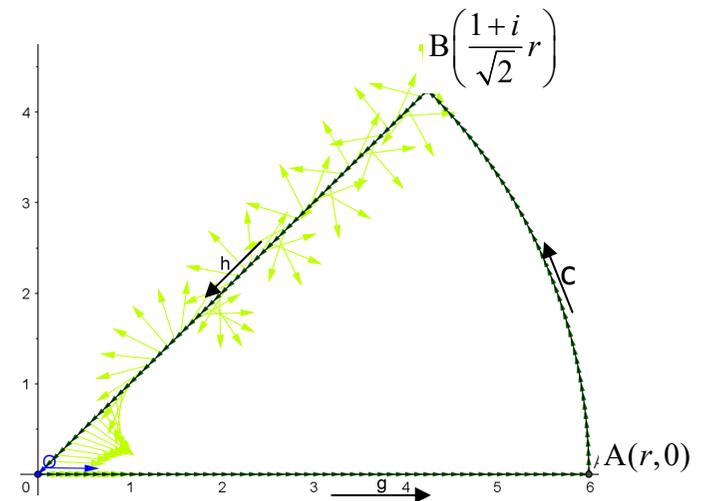
h上では、 z は $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} t$ ($0 \leq t \leq r$) と表示できるから 「 $e^{-z^2} = e^{-it^2} = \cos(t^2) - i \sin(t^2)$, $dz = \frac{1+i}{\sqrt{2}} dt$ 」

$$\therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \int_h f(z) dz = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} (\cos t^2 - i \sin t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} (\cos t^2 - i \sin t^2) dt = \frac{\sqrt{2}}{1+i} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1-i)$$

両辺の実数部分と虚数部分を比較して、

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

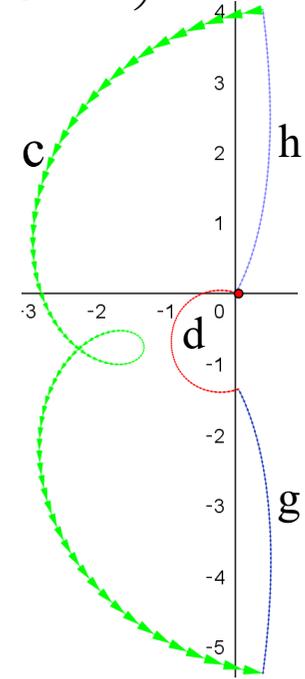
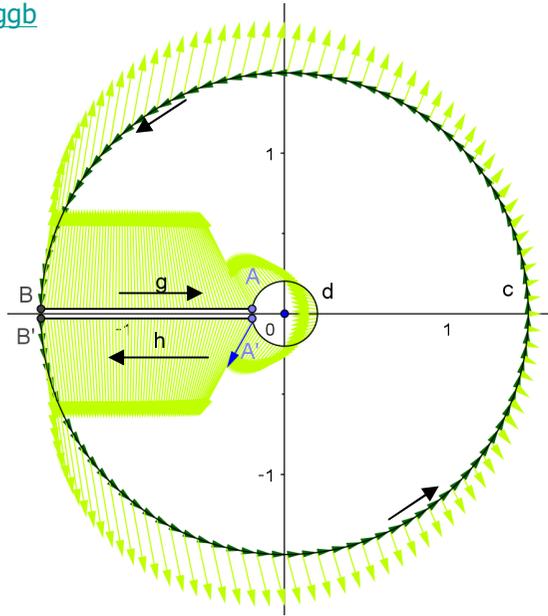


例 5

$$\oint_{h+C+g+d} \text{Log } z \, dz = 0$$

[Log z@auto.ggb](#)

（複素平面を負の実軸で切ったとき, $\text{Log } z \equiv \int_1^z 1/z \, dz$ ）
 は経路によらず z のみで決まり, 解析的になる.



例 6

(Γ 関数)

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad \left(x^{s-1} \equiv e^{(s-1)\log x}, \right.$$

(実軸上で積分)

[gamma@auto.ggb](#)

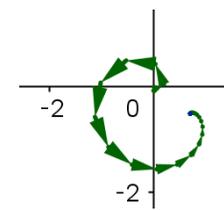
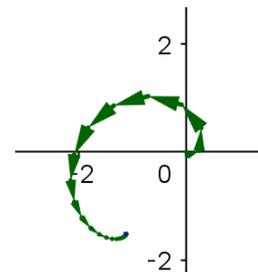
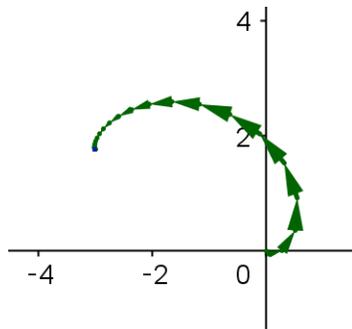
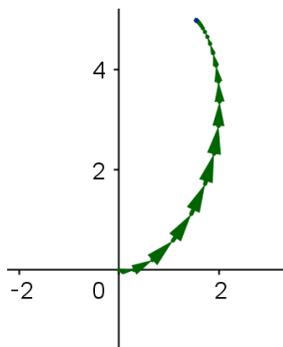
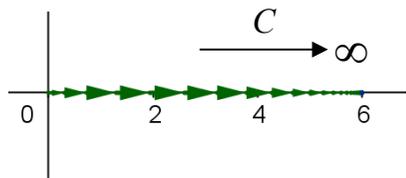
$$s = 4$$

$$s = 4 + i$$

$$s = 4 + 2i$$

$$s = 4 + 3i$$

$$s = 4 + 4i$$



Cauchyの定理の大雑把な証明

反時計回りの曲線 C の内部を多く、かつ境界のみを共有する小領域 D_1, D_2, \dots, D_n に分割し (全て反時計回り), D_k の境界を C_k とする.

このとき D_{k-1} と D_k の境界線に関する積分は打ち消される. したがって,

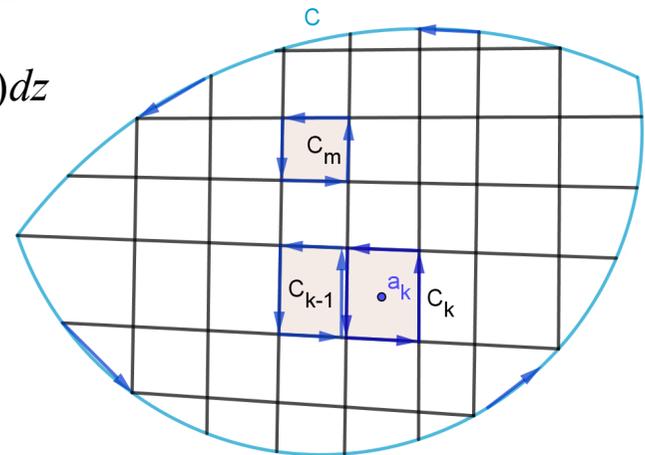
$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz$$

しかし D_k において $f(z)$ は解析的なので, D_k が非常に小さい時,

$$f(z) \approx f(a_k) + (z - a_k) f'(a_k) \quad (a_k \text{ は } D_k \text{ 内の固定点})$$

したがって,

$$\begin{aligned} \oint_{C_k} f(z) dz &\approx \oint_{C_k} \{ f(a_k) + (z - a_k) f'(a_k) \} dz \\ &= f(a_k) \oint_{C_k} dz + f'(a_k) \oint_{C_k} (z - a_k) dz \\ &= 0 \end{aligned}$$



付録. Work sheet の使い方

生越 茂樹

ATCM 2019 in 樂山

Work sheet の種類

- [templatate@circle.ggb](#)
円に沿っての積分. 入力は関数のみ.
- [template@auto.ggb](#)
線分と弧(arc)に沿っての積分 (円は除く, 半円は可). 経路は Path=[A,a,B,b,C] (A,B,C点,a,bは線分または弧)の様に入力. このとき A' の様に「'」をつけない.
- [template@manual.ggb](#)
任意のパラメータ表示された曲線に沿っての積分.
Section(区分曲線)は10個まで増やせる.
Geogebraのコマンド「Sequence」でパラメータ表示する.
このとき S は必ず大文字. また 各区分曲線は必ず連続にすること.
Sequenceは点を取るのに使うだけなので,パラメータは連続でなくても良い.

Worksheet や PowerPoint のファイルは自由にダウンロードできます。ダウンロード先は、このビデオの下にリンクを張っておきます。

このworksheetは 通常のGeoGebraの使い方と異なり、相当無理な使い方です。従ってクラッシュすることが多いです。幸運ならば Cr+Z で戻りますが、戻らない場合は一度閉じて、新しくファイルを開いて下さい。また非常にまれですが、再起動が必要な場合もあります。大事はファイルは保存してから遊んだほうが良いでしょう。もし大切なファイルが消失しても、当方は全く責任を取れません。

ご視聴ありがとうございました。またお会いしましょう。