

クリフォードの定理とその発展

—Geo(metry)+(Al)gebra な証明の試み—

2019年1月13日 Cabri 研究会 生越 茂樹

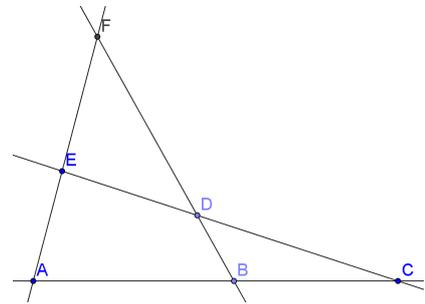
[準備]

複素数 A, B, C, D, E, F の multi ratio M を次の様に定める. (参考文献[1]による. 以下 cf.[1] と略.)

$$M(A, B, C, D, E, F) \equiv \frac{(A-B)(C-D)(E-F)}{(B-C)(D-E)(F-A)}$$

A, \dots, F が右図のメネラウス図形を作っている時, メネラウスの定理より

$$M(A, B, C, D, E, F) = -\frac{\overline{AB \cdot CD \cdot EF}}{\overline{BC \cdot DE \cdot FA}} = -1$$



M は mebius 変換 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ によって不変である.

これは $f(z) = z+d$, $f(z) = kz$ ($d, k \in \mathbb{C}$) の時は明らか. $f(z) = \frac{1}{z}$ の時は

$$M\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}, \frac{1}{E}, \frac{1}{F}\right) = \frac{\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{D}\right)\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{F}\right)}{\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{E}\right)\left(\frac{1}{F} - \frac{1}{A}\right)} = M(A, B, C, D, E, F)$$

mebius変換は「平行移動」と「 k 倍」と「逆数変換」の合成で表せるので, M は mebius変換で不変となる. また次の関係もしばしば使う.

$$M(B, C, D, E, F, A) \equiv \frac{(B-C)(D-E)(F-A)}{(A-B)(C-D)(E-F)} = M(A, B, C, D, E, F)^{-1}$$

なお「 $M(A, B, C, D, E, F) = M(A', B', C', D', E', F')$ 」であっても順序を変更すると等しいままとは限らない. 一般には $M(B, A, C, D, E, F) \neq M(B', A', C', D', E', F')$

さらに M の値と5点が決まれば 残りの1点も一つに定まる. 即ち,

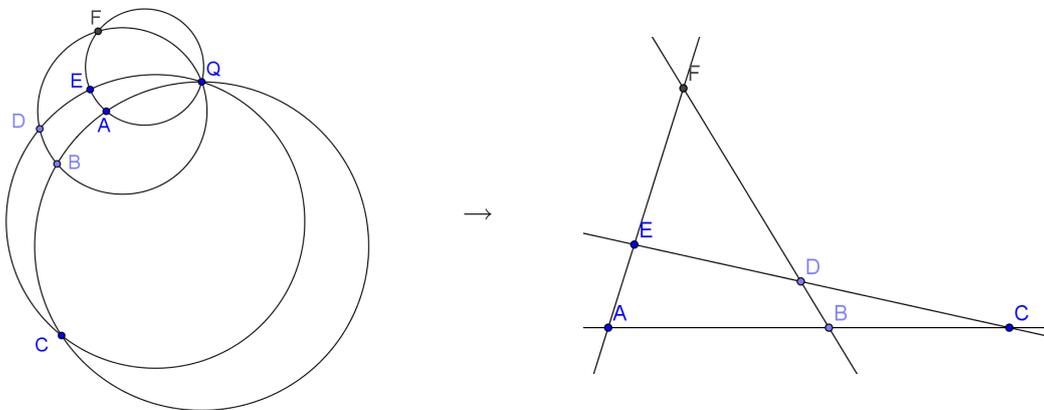
$$M(A, B, C, D, E, X) = M(A, B, C, D, E, Y) \iff X = Y \dots (*)$$

[本論] 以下、円は直線も含み、点は無限遠点 ∞ も含むものとする。

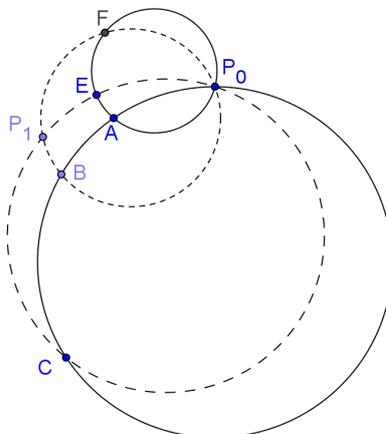
定理1 (cf.[1])

$$M(A,B,C,D,E,F) = -1 \iff \text{円}ABC, \text{円}CDE, \text{円}BDF, \text{円}AEF \text{ は 1 点 で 交 わ る.}$$

[\Leftarrow の証明] 4円が1点 Q で交わっているとすると、 Q に関する反転で例えば4円は下右図の4直線に移る。この時メネラウスの定理より $M(A,B,C,D,E,F) = -1$ が成り立つ。 M は反転不変性があるので、左の図形においても $M(A,B,C,D,E,F) = -1$ が成り立つ。(下図のような直線でない時でも、また4円が4直線で Q が無限遠点の場合も正しい。)



[\Rightarrow の証明] 円 ABC と AEF の A 以外の交点を P_0 , 円 P_0BF と P_0CE の P_0 以外の交点を P_1 とすると、これら4円は1点 P_0 で交わるので $M(A,B,C,P_1, E,F) = -1$ ところが仮定より「 $M(A,B,C,D, E,F) = -1$ 」であるから、前頁の (*) より $P_1 = D$. 故に円 P_0BF , P_0CE は円 DBF , DCE と一致し、4円は1点 P_0 で交わる。



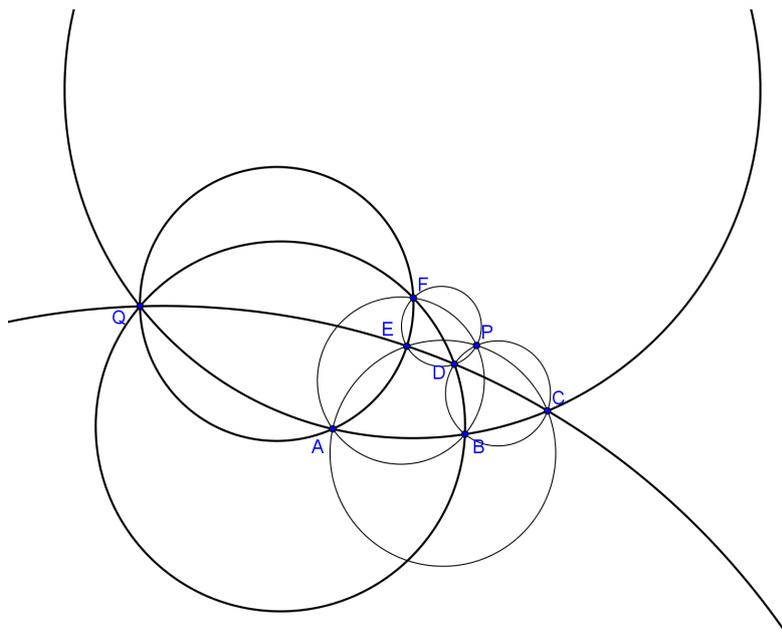
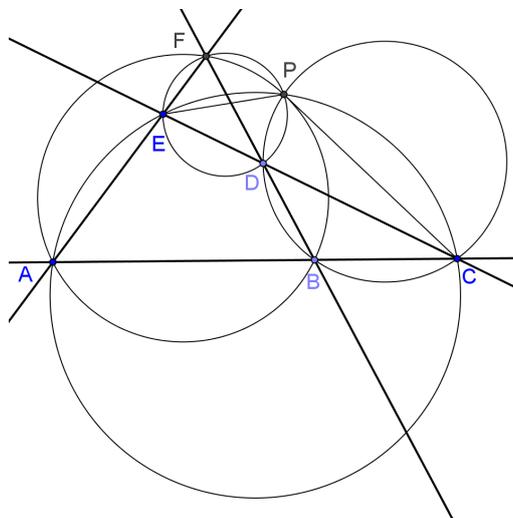
定理2 . クリフォードの定理 (n=4) の発展 (cf.[1])

$M(A,B,C,D,E,F) = -1$ のとき, 円 BCD, DEF, CEA, BFA は 1 点で交わる.
これを Steiner 点という.

[証明]

$$M(B,C,D,E,F,A) = \frac{(B-C)(D-E)(F-A)}{(C-D)(E-F)(A-B)} = M(A,B,C,D,E,F)^{-1}$$

よって 「 $M(A,B,C,D,E,F) = -1 \Leftrightarrow M(B,C,D,E,F,A) = -1$ 」 となるから
定理1より, 円 BCD, DEF, CEA, BFA は 1 点で交わる.



定理3

円 ABC, CDE, AEF, BDF が全て直線の時, 4円 ACE, ABF, BCD, EFD の交点を P とすると

$$P = \frac{BE - CF}{B + E - (C + F)} = \frac{AD - BE}{A + D - (B + E)} = \frac{AD - CF}{A + D - (C + F)}$$

(この定理以降は自作なので間違いがある可能性があります. ご注意ください.)

[証明] 下図で円周角と円の内接四角形の性質を使うと

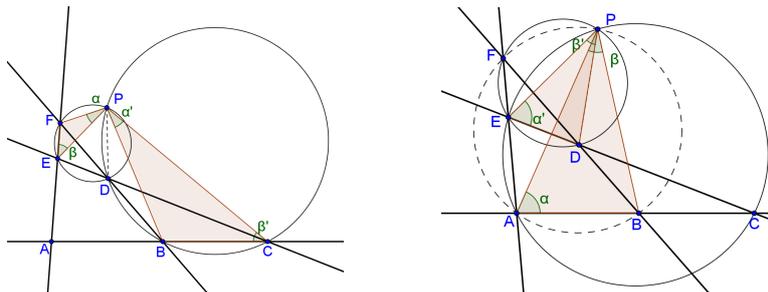
$$\angle FPE = \angle BPC \text{ かつ } \angle FEP = \angle BCP$$

故に $\triangle EPF \sim \triangle CPB$ となるから, 複素数平面上で

$$\frac{P - E}{F - E} = \frac{P - C}{B - C} \iff P = \frac{BE - CF}{B + E - (C + F)}$$

同様に 「 $\triangle APB \sim \triangle EPD$ 」 と 「 $\triangle APC \sim \triangle FPD$ 」 より,

$$P = \frac{AD - BE}{A + D - (B + E)} = \frac{AD - CF}{A + D - (C + F)}$$



定理4. M と擬反転 (正式な用語は不明) の関係

$M(A, B, C, D, E, F) = -1$ のとき, 4円 ABC, CDE, AEF, BDF の交点を Q , 4円 ACE, ABF, BCD, EFD の交点を P とすると,

$$A \xleftrightarrow{f} D, \quad B \xleftrightarrow{f} E, \quad C \xleftrightarrow{f} F, \quad P \xleftrightarrow{f} Q$$

と移す擬反転 $f(z) = p + \frac{k}{z - p}$ (z, k, p は複素数) が存在し, ...(*)

f は名前の付け替えだけを行い メネラウス図形全体は変えない.
逆に(*)の関係があるとき, $M(A, B, C, D, E, F) = -1$ がなりたつ.

[注] 「 $M(A, B, C, D, E, F) = -1$ のとき $\{A, B, C, D, E, F\}$ がメネラウス図形を作る」と定める. さらに $f \circ f = I_d$ (恒等関数) であり f の正式の名前は不明 (対合?).

[証明] Q が無限遠点(円 ABC, CDE, AEF, BDF が直線)のとき **定理3** より

$$(A - P)(D - P) = (B - P)(E - P) = (C - P)(F - P)$$

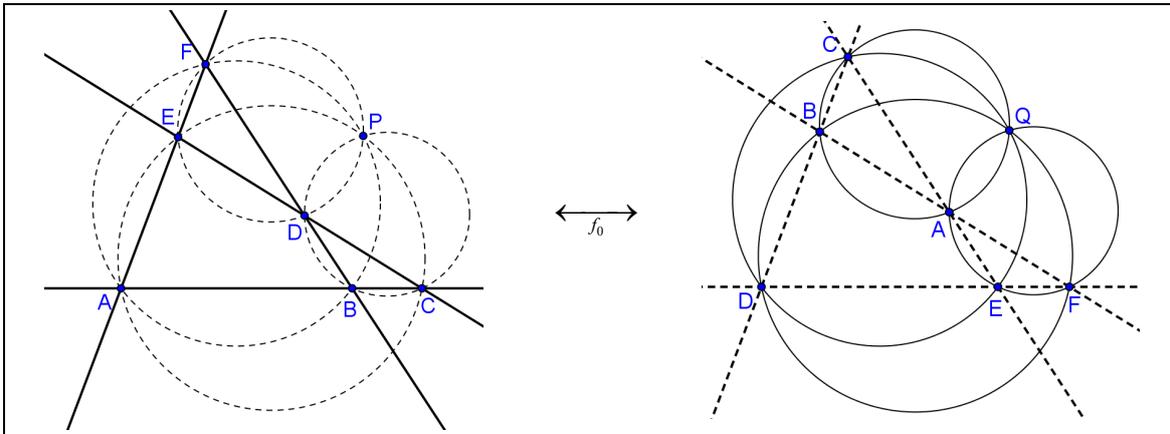
ゆえに

$$f_0(z) \equiv P + \frac{(A-P)(D-P)}{z-P} = P + \frac{(B-P)(E-P)}{z-P} = P + \frac{(C-P)(F-P)}{z-P} \dots (*)$$

と定義すると

$$A \xleftrightarrow{f_0} D, \quad B \xleftrightarrow{f_0} E, \quad C \xleftrightarrow{f_0} F, \quad P \xleftrightarrow{f_0} Q$$

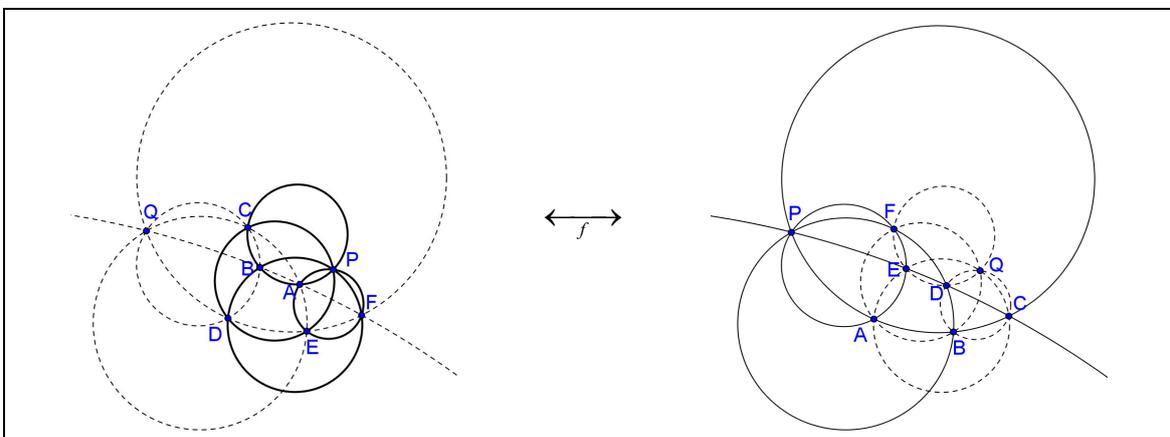
かつ f_0 は P を中心とする円に関する擬反転だから、直線 ABC, CDE, AEF, BDF は、円 DEF, FAB, DBC, EAC に、逆に円 DEF, FAB, DBC, EAC は、直線 ABC, CDE, AEF, BDF に移る。即ち f_0 は「名前の付替え」だけを行い「図形全体」は変えない。



一般の場合は 円 ABC, CDE, AEF, BDF の交点 P を中心とする円に関する反転を g , $f = g^{-1} \circ f_0 \circ g$ とすれば良い。 f_0 は名前の付替えだけを行うので、 f も名前の付替えだけを行う。さらに f は分母が1次式の mebius変換であり「 $A \xleftrightarrow{f} D$ かつ

$B \xleftrightarrow{f} E$ かつ $C \xleftrightarrow{f} F$ 」であることから $f(z) = p + \frac{k}{z-p}$ の形になる。

但し p は **定理3** の P の式 と一致するが、一般には p は Steiner点でない。



[逆の証明] $f(z) = p + \frac{k}{z-p}$ (k, p, z は複素数), $D = f(A), E = f(B), F = f(C)$

とすると, M は平行移動と $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 倍によって変わらないので,

$$\begin{aligned} M(A, B, C, D, E, F) &= M\left(A, B, C, p + \frac{k}{A-p}, p + \frac{k}{B-p}, p + \frac{k}{C-p}\right) \\ &= M\left(\frac{A-p}{\sqrt{k}}, \frac{B-p}{\sqrt{k}}, \frac{C-p}{\sqrt{k}}, \frac{\sqrt{k}}{A-p}, \frac{\sqrt{k}}{B-p}, \frac{\sqrt{k}}{C-p}\right) \\ &= M\left(A', B', C', \frac{1}{A'}, \frac{1}{B'}, \frac{1}{C'}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

[注] 以下, 直線を L_1, L_2, L_3, \dots , $\{L_i, L_j\}$ の交点を P_{ij} , $\{L_i, L_j, L_k\}$ の外接円を C_{ijk} , $\{L_i, L_j, L_k, L_m\}$ の交点を P_0 (無限遠点), $\{L_i, L_j, L_k, L_m\}$ の Steiner点 (定理2参照) を P_{ijkl} , 「 $\{L_i, L_j, L_k, L_l\}$ の メネラウス 図形の名前の付け替え関数; $f(z) = p + \frac{k}{z-p}$ 」を f_{ijkl} とすると, **定理4** は次の様に表せる.

$$M(P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{34}, P_{24}, P_{23}) = -1 \iff \exists f_{1234}, (P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{1234}) \xleftarrow{f_{1234}} (P_{34}, P_{24}, P_{23}, P_0)$$

$$\text{但し } p = \frac{P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24}}{P_{12} + P_{34} - (P_{13} + P_{24})} = \frac{P_{13}P_{24} - P_{14}P_{23}}{P_{13} + P_{24} - (P_{14} + P_{23})} = \frac{P_{14}P_{23} - P_{12}P_{34}}{P_{14} + P_{23} - (P_{12} + P_{34})} \quad (\text{一般には } p \neq P_{1234})$$

定理5 (複比と M の関係)

任意の複素数 A, B, C, X, Y, Z, P に対し

$$\begin{cases} [A, B; X, P] \times [B, C; Y, P] \times [C, A; Z, P] = -M(A, X, B, Y, C, Z) \\ [A, B; P, X] \times [B, C; P, Y] \times [C, A; P, Z] = -M(X, B, Y, C, Z, A) \end{cases}$$

$$\text{但し } [A, B; C, D] \equiv \frac{(A-C)(B-D)}{(A-D)(B-C)} \quad (\text{複比})$$

[証明]

$$(\text{左辺}) = \frac{(A-X)(B-P)(B-Y)(C-P)(C-Z)(A-P)}{(A-P)(B-X)(C-Y)(B-P)(C-P)(A-Z)} = \frac{(A-X)(B-Y)(C-Z)}{(B-X)(C-Y)(A-Z)} = (\text{右辺})$$

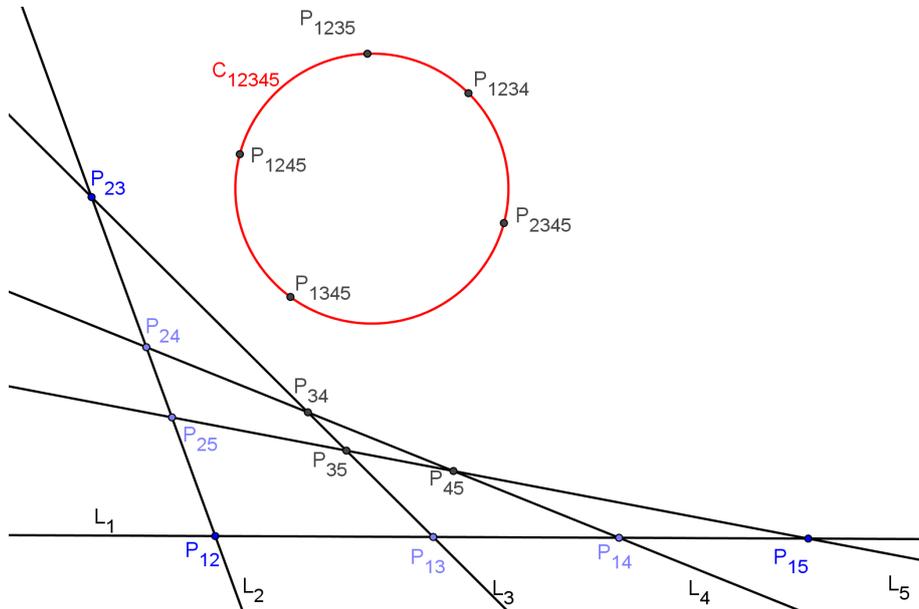
また $[A, B; D, C] = [A, B; C, D]^{-1}$ より

$$[A, B; P, X] \times [B, C; P, Y] \times [C, A; P, Z] = -M(A, X, B, Y, C, Z)^{-1} = -M(X, B, Y, C, Z, A)$$

定理6. 直線上の4点とSteiner点の対応 (n=5)

5直線 $L_1, L_2 \dots L_5$ の作る図形のSteiner点は $P_{1234}, P_{1235}, P_{1245}, P_{1345}, P_{2345}$ の5点あるが, 適当な4個の点 P_{ijklm} を取ると, L_i 上の4点との間に擬反転 f_i が存在し, 次の関係が成り立つ. [添え字]

$(P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}) \xrightarrow{f_1} (P_{1345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234})$	$\dots 1 + \{2, 3, 4, 5\}$
$(P_{12}, P_{23}, P_{24}, P_{25}) \xrightarrow{f_2} (P_{2345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234})$	$\dots 2 + \{1, 3, 4, 5\}$
$(P_{13}, P_{23}, P_{34}, P_{35}) \xrightarrow{f_3} (P_{2345}, P_{1345}, P_{1235}, P_{1234})$	$\dots 3 + \{1, 2, 4, 5\}$
$(P_{14}, P_{24}, P_{34}, P_{45}) \xrightarrow{f_4} (P_{2345}, P_{1345}, P_{1245}, P_{1234})$	$\dots 4 + \{1, 2, 3, 5\}$
$(P_{15}, P_{25}, P_{35}, P_{45}) \xrightarrow{f_5} (P_{2345}, P_{1345}, P_{1245}, P_{1235})$	$\dots 5 + \{1, 2, 3, 4\}$



[証明] 定理4 (とその注) より

$$\begin{cases} f_{1235} \circ f_{2345}(P_{24}) = f_{1235}(P_{35}) = P_{12}, & f_{1235} \circ f_{2345}(P_{45}) = f_{1235}(P_{23}) = P_{15} \\ f_{1235} \circ f_{2345}(P_{34}) = f_{1235}(P_{25}) = P_{13}, & f_{1235} \circ f_{2345}(P_{2345}) = f_{1235}(P_0) = P_{1235} \end{cases}$$

したがって

$$(P_{24}, P_{34}, P_{45}, P_{2345}) \xrightarrow{f_{1235} \circ f_{2345}} (P_{12}, P_{13}, P_{15}, P_{1235}) \quad \dots 4 + \{2, 3, 5\} \rightarrow 1 + \{2, 3, 5\}$$

同様にして

$$(P_{34}, P_{23}, P_{35}, P_{2345}) \xrightarrow{f_{1245} \circ f_{2345}} (P_{14}, P_{12}, P_{15}, P_{1245}), \quad \dots 3 + \{4, 2, 5\} \rightarrow 1 + \{4, 2, 5\}$$

$$(P_{23}, P_{24}, P_{25}, P_{2345}) \xrightarrow{f_{1345} \circ f_{2345}} (P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{1345}), \quad \dots 2 + \{3, 4, 5\} \rightarrow 1 + \{3, 4, 5\}$$

複比は mebius 変換で不変だから, 以上 3 式より

$$\begin{cases} [P_{24}, P_{34}; P_{45}, P_{2345}] = [P_{12}, P_{13}; P_{15}, P_{1235}] \\ [P_{34}, P_{23}; P_{35}, P_{2345}] = [P_{14}, P_{12}; P_{15}, P_{1245}] \\ [P_{23}, P_{24}; P_{25}, P_{2345}] = [P_{13}, P_{14}; P_{15}, P_{1345}] \end{cases}$$

ここで両辺の積を作ると **定理5** より,

$$\begin{cases} (\text{左辺の積}) = -M(P_{24}, P_{45}, P_{34}, P_{35}, P_{23}, P_{25}) \\ (\text{右辺の積}) = -M(P_{1235}, P_{13}, P_{1345}, P_{14}, P_{1245}, P_{12}) \end{cases}$$

「 $(P_{24}, P_{45}, P_{34}) \xleftarrow{f_{2345}} (P_{35}, P_{23}, P_{25})$ 」だから **定理4**より,

$$\begin{aligned} M(P_{24}, P_{45}, P_{34}, P_{35}, P_{23}, P_{25}) &= -1 \\ \therefore M(P_{1235}, P_{13}, P_{1345}, P_{14}, P_{1245}, P_{12}) &= -1 \end{aligned}$$

故に 「 $(P_{1235}, P_{13}, P_{1345}) \xleftarrow{f} (P_{14}, P_{1245}, P_{12})$ 」 となる擬反転 f が存在する.

f は擬反転だから

$$\left[(P_{12}, P_{13}, P_{14}) \xleftarrow{f} (P_{1345}, P_{1245}, P_{1235}) \right] \cdots (\text{ア})$$

同様にある擬反転 g が存在し (4 ↔ 5 を入れ替えて)

$$\left[(P_{12}, P_{13}, P_{15}) \xleftarrow{g} (P_{1345}, P_{1245}, P_{1234}) \right] \cdots (\text{イ})$$

ところが, 擬反転 「 $f(z) = p + \frac{k}{z-p}$ 」 は 2 点の像で決まるから $f = g$ である.

故に

$$(P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}) \xleftarrow{f} (P_{1345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234})$$

同様にして残りの式も成り立つ.

定理7. クリフォードの定理(n=5)

5直線のうち1直線のみ省いた図形の Steiner 点は 5つ出来るが, それらは同一の円(Miquel円)上にある. (前頁の図参照)

[証明] **定理6** より 「 $(P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}) \xleftarrow{f_1} (P_{1345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234})$ 」であり,

「擬反転による円の像は円」だから, $P_{1345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234}$ は同一円上にある.

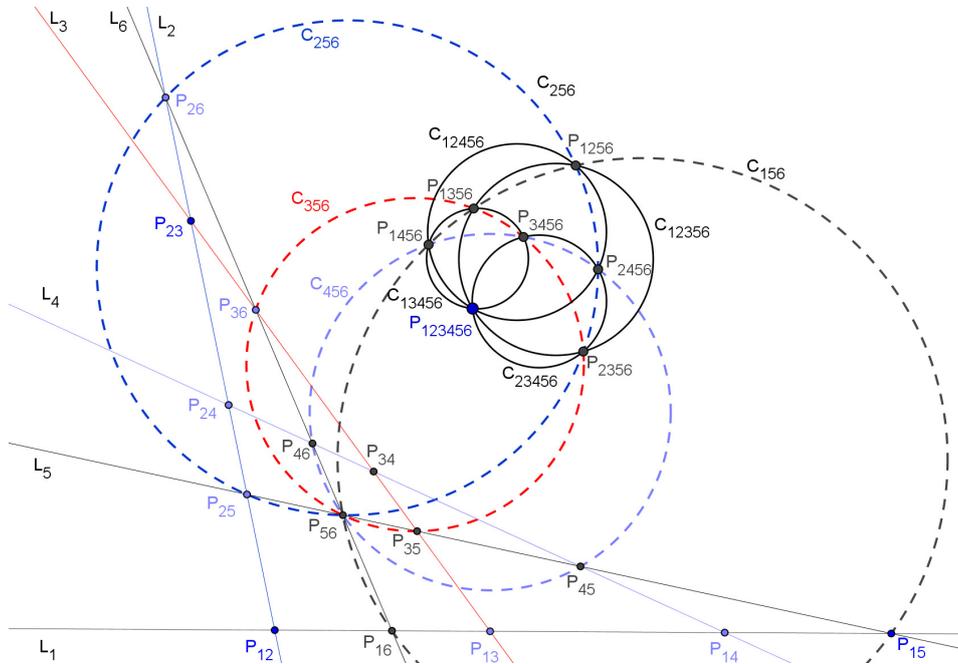
同様 「 $(P_{12}, P_{23}, P_{24}, P_{25}) \xleftarrow{f_2} (P_{2345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234})$ 」だから $P_{2345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234}$

も同一円上にある. 故に $P_{2345}, P_{1345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234}$ は, 同一円上にある.

[注]この円を $\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$ から作られる Miquel 円と言い C_{12345} で表す.

定理8. クリフォードの定理(n=6)

6直線のうち1直線のみ省いた図形の Miquel 円は ${}_6C_5=6$ 個出来るが、それらは1点で交わる。これを Clifford 点という。(下図では P_{123456} が Clifford 点)



[証明] **定理6** と同様にして $\{L_1, L_3, L_4, L_5, L_6\}$ の作る図形から

$$(P_{51}, P_{53}, P_{54}, P_{56}) \xleftrightarrow{f} (P_{3456}, P_{1456}, P_{1356}, P_{1345}) \quad \dots 5+\{1,3,4,6\}$$

f は擬反転だから 「 $(P_{53}, P_{54}, P_{51}, P_{1345}) \xleftrightarrow{f} (P_{1456}, P_{1356}, P_{3456}, P_{56})$ 」 でもある。

よって

$$[P_{53}, P_{54}; P_{51}, P_{1345}] = [P_{1456}, P_{1356}; P_{3456}, P_{56}]$$

同様に $\{L_1, L_2, L_4, L_5, L_6\}$ と $\{L_1, L_2, L_3, L_5, L_6\}$ から

$$[P_{54}, P_{52}; P_{51}, P_{1245}] = [P_{1256}, P_{1456}; P_{2456}, P_{56}]$$

$$[P_{52}, P_{53}; P_{51}, P_{1235}] = [P_{1356}, P_{1256}; P_{2356}, P_{56}]$$

以上 3 式の両辺を掛けると **定理5** より

$$\begin{cases} \text{(左辺の積)} = -M(P_{1345}, P_{54}, P_{1245}, P_{52}, P_{1235}, P_{53}) \\ \text{(右辺の積)} = -M(P_{1356}, P_{2356}, P_{1256}, P_{2456}, P_{1456}, P_{3456}) \end{cases}$$

ここで **定理6** と同様に 「 $(P_{15}, P_{25}, P_{35}, P_{45}) \xleftrightarrow{f} (P_{2345}, P_{1345}, P_{1245}, P_{1235})$ 」 $\dots 5+\{1,2,3,4\}$

となる擬反転 f が存在するから **定理4** より

$$\begin{aligned} M(P_{1345}, P_{45}, P_{1245}, P_{25}, P_{1235}, P_{35}) &= -1 \\ \therefore M(P_{1356}, P_{2356}, P_{1256}, P_{2456}, P_{1456}, P_{3456}) &= -1 \quad \dots (*) \end{aligned}$$

従って $\{P_{1356}, P_{2356}, P_{1256}, P_{2456}, P_{1456}, P_{3456}\}$ は メネラウス図形を作る.

よって**定理1**より

$P_{1356}, P_{2356}, P_{1256}$ の外接円; C_{12356} , $P_{1256}, P_{2456}, P_{1456}$ の外接円; C_{12456} ,
 $P_{2356}, P_{2456}, P_{3456}$ の外接円; C_{23456} , $P_{1356}, P_{1456}, P_{3456}$ の外接円; C_{13456} ,
 の4円は1点で交わる.

同様に「 $C_{12356}, C_{12456}, C_{12345}, C_{13456}$ 」, 「 $C_{12356}, C_{12456}, C_{12346}, C_{13456}$ 」の4円も1点で交わる. 結局6つの円はクリフォード点 P_{123456} で交わる. 【証明終】

[注] $\{L_1, \dots, L_6\}$ から作られる clifford 点を P_{123456} と書く. また前頁(*)と**定理2**より,
 円 $P_{2356} P_{1256} P_{2456} = C_{256}$, 円 $P_{2456} P_{1456} P_{3456} = C_{456}$, 円 $P_{1256} P_{1456} P_{1356} = C_{156}$, 円 $P_{2356} P_{3456} P_{1356} = C_{356}$
 も1点で交わるが, C_{ijk} の定義より明らかにその点は P_{56} である. (前頁の図参照.)

即ち $\{P_{1356}, P_{2356}, P_{1256}, P_{2456}, P_{1456}, P_{3456}\}$ の作るメネラウス図形の2つの結節点は
 P_{123456} と P_{56} となる. これは $\{P_{13}, P_{23}, P_{12}, P_{24}, P_{14}, P_{34}\}$ の作るメネラウス図形の結節点
 が P_{1234} と P_0 である事の発展である.

[一言] 「 C_{ijk} の定義より4円 C_{i56} が1点 P_{56} で交わるので**定理1**より $M = -1$ 」としても**定理8**
 は証明できた. しかしここでは代数的に証明しなかった.

$n = 5, n = 6$ の時の証明は「 $n = 4$ の時, メネラウス図形ができる事」だけを利用して
 利用しているので「 $n = 6$ の時, メネラウス図形ができる事」から「任意の
 自然数 n についてクリフォードの定理が成り立つ事」が容易に証明できる.
 それは, 形式的には「添え字の付け足し」をするだけである.

例えば, 前頁(*)より「 $(P_{1356}, P_{2356}, P_{1256}, P_{123456}) \xleftarrow{f} (P_{2456}, P_{1456}, P_{3456}, P_{56})$ 」となる

擬反転 $f(z) = p + \frac{k}{z - p}$ が存在する. これを $f_{1234,56}$ と書くと,

$$(P_{1356}, P_{2356}, P_{1256}, P_{123456}) \xleftarrow{f_{1234,56}} (P_{2456}, P_{1456}, P_{3456}, P_{56})$$

これは「 $(P_{13}, P_{23}, P_{12}, P_{1234}) \xleftarrow{f_{1234}} (P_{24}, P_{14}, P_{34}, P_0)$ 」の発展である.

同様 $n = 7, n = 8$ の時も**定理6,7,8**を拡張した定理が成り立ち, 証明は添え字の追加だけでできる. 実際, 以下は殆んどコピーである.

定理9. 直線上の4点とClifford点の対応 (n=7)

直線 $\{L_1, L_2, \dots, L_7\}$ のClifford点は7個あるがこのうち 適当な4個の点 P_{ijklmn} を取ると、 C_{imn} 上の4点との間に擬反転 f_i が存在し、次の関係が成り立つ。例えば、
$(P_{1267}, P_{1367}, P_{1467}, P_{1567}) \xleftrightarrow{f_1} (P_{134567}, P_{124567}, P_{123567}, P_{123467}) \quad \dots 167 + \{2, 3, 4, 5\}$
$(P_{1267}, P_{2367}, P_{2467}, P_{2567}) \xleftrightarrow{f_2} (P_{234567}, P_{124567}, P_{123567}, P_{123467}) \quad \dots 267 + \{1, 3, 4, 5\}$
$(P_{1367}, P_{2367}, P_{3467}, P_{3567}) \xleftrightarrow{f_3} (P_{234567}, P_{134567}, P_{123567}, P_{123467}) \quad \dots 367 + \{1, 2, 4, 5\}$
$(P_{1467}, P_{2467}, P_{3467}, P_{4567}) \xleftrightarrow{f_4} (P_{234567}, P_{134567}, P_{124567}, P_{123467}) \quad \dots 467 + \{1, 2, 3, 5\}$
$(P_{1567}, P_{2567}, P_{3567}, P_{4567}) \xleftrightarrow{f_5} (P_{234567}, P_{134567}, P_{124567}, P_{123567}) \quad \dots 567 + \{1, 2, 3, 4\}$

[証明] **定理6** の証明に「67」という添え字を付け加えるだけで良い。

$$\begin{cases} f_{1235,67} \circ f_{2345,67}(P_{2467}) = f_{1235,67}(P_{3567}) = P_{1267}, & \begin{cases} f_{1235,67} \circ f_{2345,67}(P_{4567}) = f_{1235,67}(P_{2367}) = P_{1567} \\ f_{1235,67} \circ f_{2345,67}(P_{3467}) = f_{1235,67}(P_{2567}) = P_{1367}, & \begin{cases} f_{1235,67} \circ f_{2345,67}(P_{234567}) = f_{1235,67}(P_{67}) = P_{123567} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

したがって

$$(P_{2467}, P_{3467}, P_{4567}, P_{234567}) \xrightarrow{f_{1235,67} \circ f_{2345,67}} (P_{1267}, P_{1367}, P_{1567}, P_{123567}) \quad \dots 467 + \{2, 3, 5\} \rightarrow 167 + \{2, 3, 5\}$$

同様にして

$$(P_{3467}, P_{2367}, P_{3567}, P_{234567}) \xrightarrow{f_{1245,67} \circ f_{2345,67}} (P_{1467}, P_{1267}, P_{1567}, P_{124567}) \quad \dots 367 + \{4, 2, 5\} \rightarrow 167 + \{4, 2, 5\}$$

$$(P_{2367}, P_{2467}, P_{2567}, P_{234567}) \xrightarrow{f_{1345,67} \circ f_{2345,67}} (P_{1367}, P_{1467}, P_{1567}, P_{134567}), \quad \dots 267 + \{3, 4, 5\} \rightarrow 167 + \{3, 4, 5\}$$

この複比を取って両辺を掛けると、**定理6**と同様にして、

$$M(P_{2467}, P_{4567}, P_{3467}, P_{3567}, P_{2367}, P_{2567}) = M(P_{123567}, P_{1367}, P_{134567}, P_{1467}, P_{124567}, P_{1267})$$

「 $(P_{2467}, P_{4567}, P_{3467}) \xleftrightarrow{f_{2345,67}} (P_{3567}, P_{2367}, P_{2567})$ 」だから「(左辺)=-1」となる。よって

$$M(P_{123567}, P_{1367}, P_{134567}, P_{1467}, P_{124567}, P_{1267}) = -1$$

故に「 $(P_{123567}, P_{1367}, P_{134567}) \xleftrightarrow{f} (P_{1467}, P_{124567}, P_{1267})$ 」となる擬反転 f が存在する。

f は擬反転だから

$$\left[(P_{1267}, P_{1367}, P_{1467}) \xleftrightarrow{f} (P_{134567}, P_{124567}, P_{123567}) \right] \dots (\text{ア})$$

同様に ある擬反転 g が存在し (4 ↔ 5 を入れ替えて)

$$\left[(P_{1267}, P_{1367}, P_{1567}) \xleftrightarrow{g} (P_{134567}, P_{124567}, P_{123467}) \right] \dots (\text{イ})$$

ところが、擬反転「 $f(z) = p + \frac{k}{z-p}$ 」は2点の像で決まるから $f = g$ 。故に

$$(P_{1267}, P_{1367}, P_{1467}, P_{1567}) \xleftrightarrow{f} (P_{134567}, P_{124567}, P_{123567}, P_{123467})$$

となる擬反転 f が存在する。残りの式も同様に証明できる。

定理10. クリフォードの定理(n=7)

7直線のうち1直線のみ省いた図形の Clifford 点は ${}_7C_6 = 7$ 個出来るが、それらは同一の円(Clipford円)上にある。

[証明] **定理9**より $(P_{1267}, P_{1367}, P_{1467}, P_{1567}) \xleftrightarrow{f_1} (P_{134567}, P_{124567}, P_{123567}, P_{123467})$ であり、「擬反転による円の像は円」だから、 $P_{134567}, P_{124567}, P_{123567}, P_{123467}$ は同一円上にある。同様 $(P_{1267}, P_{2367}, P_{2467}, P_{2567}) \xleftrightarrow{f_2} (P_{234567}, P_{124567}, P_{123567}, P_{123467})$ だから $P_{234567}, P_{124567}, P_{123567}, P_{123467}$ も同一円上にある。故に $P_{234567}, P_{134567}, P_{124567}, P_{123567}, P_{123467}$ は、同一円上にある。「67」を「12」に変えて同様の議論を繰り返すと、 P_{ijklmn} は全て同一円上にあることが言える。 [注]この円を $C_{1234567}$ で表し Clifford 円と言うことにする。

定理11. クリフォードの定理(n=8)

8直線のうち1直線のみ省いた図形の Clifford 円は ${}_8C_7 = 8$ 個出来るが、それらは1点で交わる。

[証明] **定理8** の証明に添え字の「78」を付け加えるだけで、

$$M(P_{135678}, P_{235678}, P_{125678}, P_{245678}, P_{145678}, P_{345678}) = -1 \dots (*)$$

が得られる。よって

$\{P_{135678}, P_{235678}, P_{125678}, P_{245678}, P_{145678}, P_{345678}\}$ は $\{P_{1356}, P_{2356}, P_{1256}, P_{2456}, P_{1456}, P_{3456}\}$ と同様にメネラウス図形を作る。

故に**定理1**より

$P_{135678}, P_{235678}, P_{125678}$ の外接円; $C_{1235678}$, $P_{125678}, P_{245678}, P_{145678}$ の外接円; $C_{1245678}$, $P_{235678}, P_{245678}, P_{345678}$ の外接円; $C_{2345678}$, $P_{135678}, P_{145678}, P_{345678}$ の外接円; $C_{1345678}$, の4円は1点で交わる。

よって **定理8** と同様の議論で、8つのClifford円;

$$C_{2345678}, C_{1345678}, C_{1245678}, C_{1235678}, C_{1234678}, C_{1234578}, C_{1234568}, C_{1234567}$$

は1点で交わる。

【証明終】

以下同様にして、一般化したClifford点とClifford円が定義される。そして n 本の特別な位置にない直線に対し、 n が偶数の時 Clifford円は Clifford点の1点で交わり、 n が奇数の時 Clifford点は1つのClifford円を作る。即ちクリフォードの定理が4以上の全ての整数 n に関して成り立つ。なお「添え字の相補性」はもっと一般に成り立つと予想され、個人的には非常に興味深い。

[参考文献]

- [1]. 「Menelaus' theorem, Clifford configurations and inversive geometry of the Schwarzian KP hierarchy」
by B.G.Konopelchenko and W.K.Schief,
School of mathematics, the university of New South Wales, Sydney, NSW 2052, Australia
- [2]. 「反転法によるクリフォードの定理の証明」 横田 捷宏著, 「初等数学」2013年9月号
- [3]. 「幾何学大辞典 第1巻 242,341, 第4巻 1248,1261」 岩田至康編, 槇書店
- [4]. 「初等幾何学特論」 窪田忠彦著, 共立出版

以上は実際に読んで参考にしたものだけ. その中でも特に[1](前半)と[3]を参考にした.

[1] の Shief は ソリトンの研究者.

クリフォードの定理ではなく, (多分)メネラウス格子とソリトン方程式の関係について書いてあり, 途中からは読めていないが, 初めは M ratio について書いてあり, そこは非常に参考になった.

[2],[3],[4]は純幾何的な証明. まずネットで見つけた[2]のコピーを国会図書館から送ってもらった. 次に[2]の参考文献に[3]と[4]があり, [3]は市立図書館で, [4]は古本屋で手に入れた.

クリフォードの定理の証明だけなら, 私には[1]~[4]のうち [3] が一番分りやすかったが, [1] の $n=4$ の時の証明が非常に鮮明で, それを発展させてみたかった. なお [1]には $n \geq 5$ の時の証明は載っていない. [2],[4]には載っている. [3]は $n=4,5,6$ の時は厳密かつ簡明に証明してある. $n \geq 7$ については「同様に出来る」としている.

英語の参考文献は [1] に沢山載っている. この中にもっと良い証明が載っているかも と思うのだが 入手が難しく [1]しか読んでいない. (多すぎて全部は買えないし, 市立図書館には置いてない.)

なお間違い, ご意見, 良い参考文献(1~2冊に絞って頂けると有難いです) などありましたら
math@mixedmoss.com

までご連絡ください.