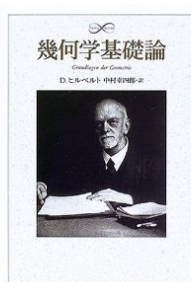


Hilbert 「幾何学基礎論」 から 折れ線モデル



Cabri 研究会 2014年4月27日
生越 茂樹

§ 0. Hilbert 「幾何学基礎論」



ちくま学芸文庫 中村幸四郎訳

目次

第1章 五つの公理群
第2章 公理の無矛盾性および相互独立性
第3章 比例の理論
第4章 平面における面積の理論
第5章 デザルグの定理
第6章 パスカルの定理
第7章 公理I-IVに基づく幾何学的作図

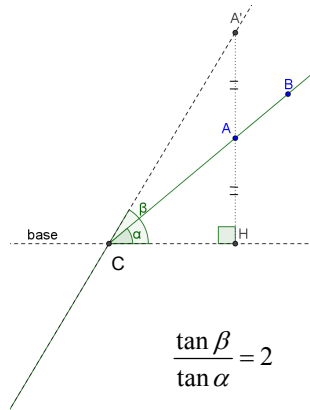
5つの公理群

I ₁₋₈ : 結合の公理
II ₁₋₄ : 順序の公理
III ₁₋₅ : 合同の公理
IV: 平行の公理
V ₁₋₂ : 連続の公理

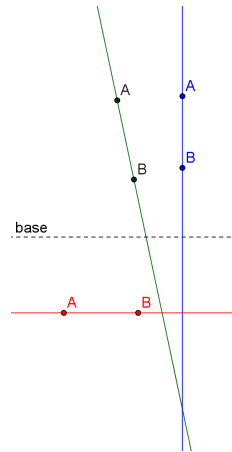
1. ユークリッドの「原論」では、暗黙の内に使われていた事を、公理(5つの公理群)として、明示した。
2. 「Desargue の定理」、「Pascal の定理」と公理群の関係を明らかにした。

§ 1. 直線, 角度, 長さの定義

1-1. 直線 (H-Line) の定義



ユークリッド直線ABの傾きが正のとき
上図の折れ線(半直線2つの集合)

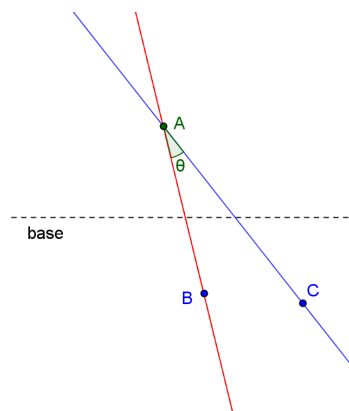
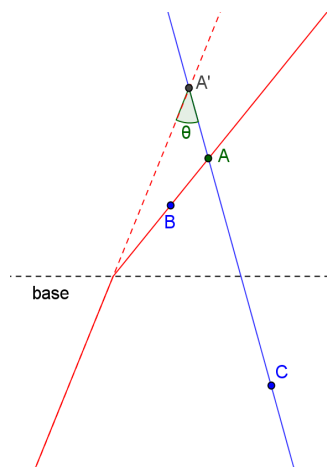


ユークリッド直線ABの傾きが0以下のとき
ユークリッド直線ABと一致

1-2. 角度 (H-Angle) の定義

軸と交点を持つH-lineに対し, その軸より下の部分を延長したユークリッド直線をU-line と名づける. (軸と平行な H-line に対しては, U-line は H-line と同じとする.)

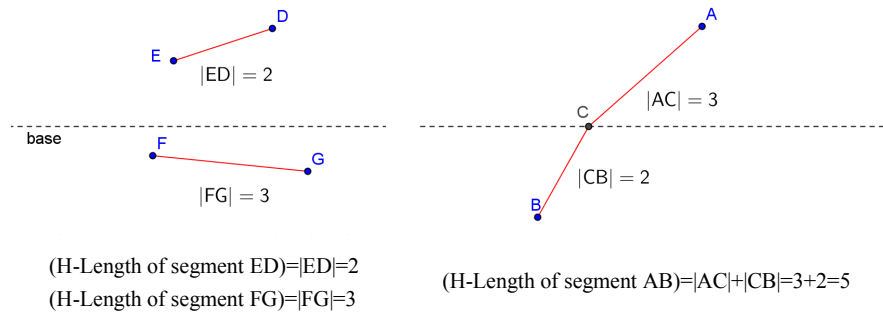
2つのH-lineのなす角度は, 対応する U-Line のユークリッド的角度とする



$$\angle BAC \text{ (H-angle として)} = \theta$$

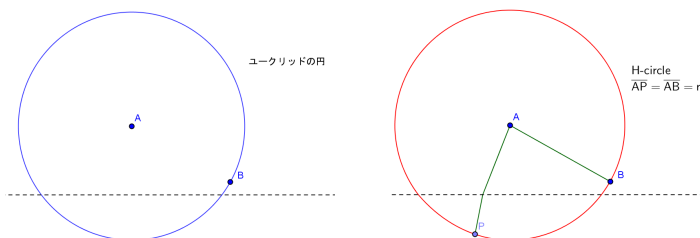
1-3. 長さ(H-Length)の定義

線分(H-Segment)が 軸と交点を持たないときは, 通常の(ユークリッド的な)線分の長さ.
交点を持つときは, 通常の(ユークリッド的に考えた) 折れ線の長さ.



[definitions.ggb](#)

§ 2. 円は描けるか？



線分の合同「定理」

A,Bを直線 α 上の2点, A'を直線 α' 上の点とすると
直線 α' 上で (A'に関し与えられた側に) **ただ 1点** B'を見だし,
線分ABと線分A'B'が合同にできる. 記号で,

$$AB \equiv A'B'$$

【注】「幾何学基礎論」では, 公理III₁では「一意性」を仮定していない.
一意性は, 公理III₂, III₄, III₅ を使って「証明」される.

上の定理は H平面でも成り立つので, **円が描ける.**

[Hcircle.ggb](#)

§ 3. 「合同公理」は成り立つか？

III₅ (三角形の合同公理)

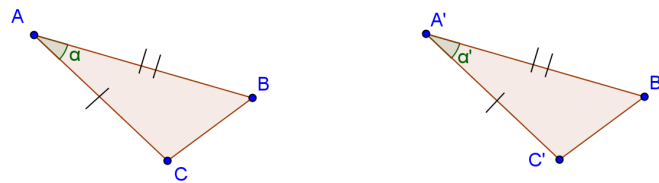
2つの三角形ABCおよびA'B'C'において，合同関係

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad \angle BAC = \angle B'A'C'$$

が成り立てば，常に

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$

も成り立つ．



ユークリッド平面では，上の命題は成り立つが，H-平面では 成り立たない．

[regularTriangle.ggb](#)

【参考】

III₁ (線分の合同公理1)

A, Bを直線 α 上の2点, A'を直線 α' 上の点とすると
直線 α' 上で (A'に関し与えられた側に) **少なくとも1点B'**を見だし,
線分ABと線分A'B'が合同にできる. 記号で,

$$AB \equiv A'B'$$

III₂ (線分の合同公理2)

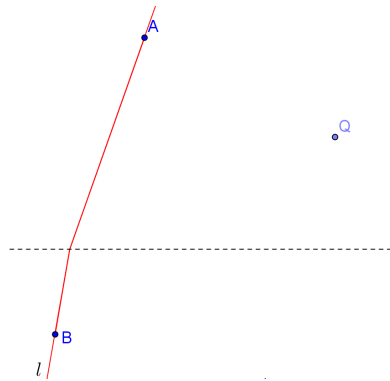
$AB \equiv CD, AB \equiv EF$ ならば $CD \equiv EF$ (推移律)

III₄ (角の合同公理)

与えられた平面上の与えられた半直線を一边とし,
この直線に対して与えられた側に，任意の角を**ただ一通りに**
合同に移すことができる．

以上&三角形の合同公理III₅ から, III₁の**B'**が**一つに決まる**．

§ 4. 平行線はあるか？

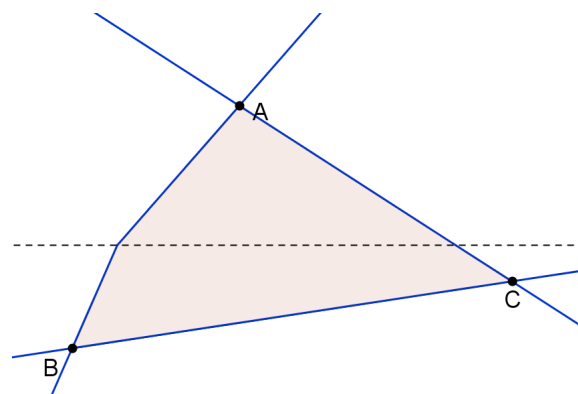


平行線は「ただ一本」ある. それでは, 同位角は等しいか？

2つのH-Line のなす角は, 対応する U-Lineのなす角で
定義されるので, 等しい.

parallel.ggb
construction of parallel line.ggb

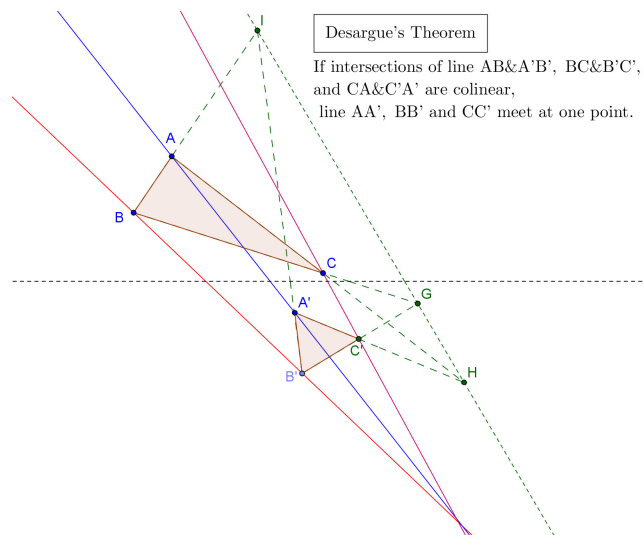
§ 5. 三角形の内角の和は？



平行線がただ一つ引けて, かつ同位角が等しいので,
ユークリッド平面と同様に, 内角の和は180度.

sumofangles.ggb

§ 6. Desargue の定理は成り立つか？

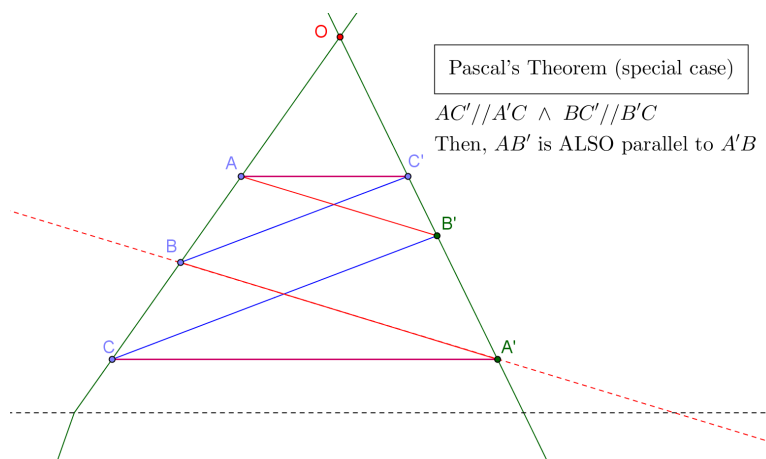


[Desargue.ggb](#)

成り立たない。

Desargueの定理は「三角形の合同公理III₅」を含む平面の公理群から証明される。
(合同公理III₅が成り立たなくとも、空間の公理群も使えば証明できる。)

§ 7. Pascal の定理は成り立つか？



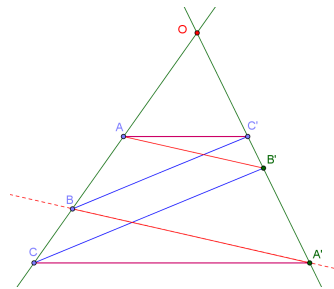
[Pascal.ggb](#)

成り立たない。

Pascalの定理は「三角形の合同公理III₅」を含む平面の公理群から証明される。
(合同公理III₅が成り立たなくとも、「空間の公理群」と連続公理V₁からも証明される。)

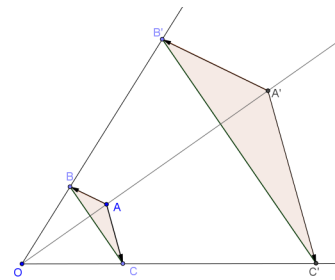
おまけ

定理61. デザルグの定理は、合同の定理IIIおよび連続の公理Vを用いることなく、公理 I_{1-3} , II, IV^* のみを仮定して、パスカルの定理から証明することができる。



Pascal's Theorem (special case)

$AC' // A'C$ $BC' // B'C$
Then, AB' is ALSO parallel to $A'B$



Desargue's Theorem

$AB // A'B'$, $AC // A'C'$,
Then $BC // B'C'$

[From Pascal to Desargue.ggb](#)