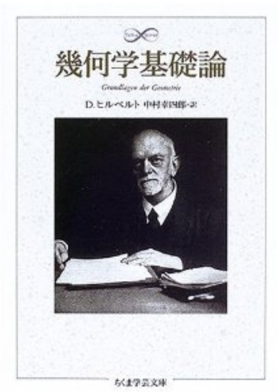
Hilbert 「幾何学基礎論」から 折れ線モデル

Cabri 研究会　2014年4月27日
生越　茂樹

§ 0. Hilbert「幾何学基礎論」



ちくま学芸文庫 中村幸四郎訳

目次

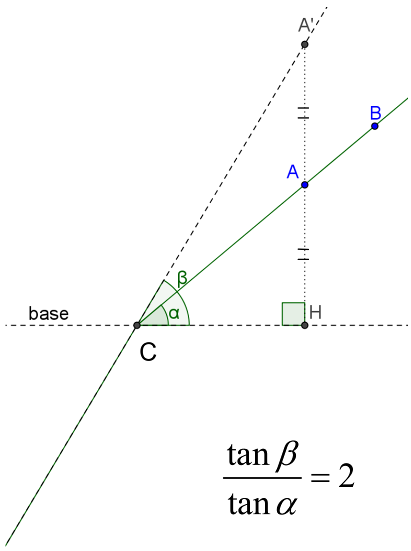
5つの公理群

$\mathrm{I}_{1\text{–}8}$: 結合の公理
$\mathrm{II}_{1\text{–}4}$: 順序の公理
$\mathrm{III}_{1\text{–}5}$: 合同の公理
IV : 平行の公理
$\mathrm{V}_{1\text{–}2}$: 連続の公理

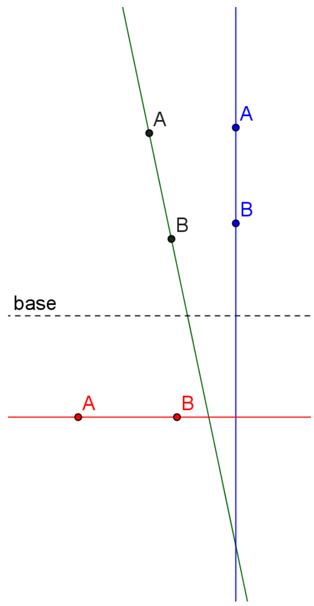
1. ユークリッドの「原論」では，暗黙の内に使われていた事を，公理(5つの公理群)として，明示した.
2. 「Desargue の定理」，「Pascal の定理」と 公理群の関係を 明らかにした.

§ 1. 直線，角度，長さの定義

1-1. 直線（H-Line)の定義



$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 2$$



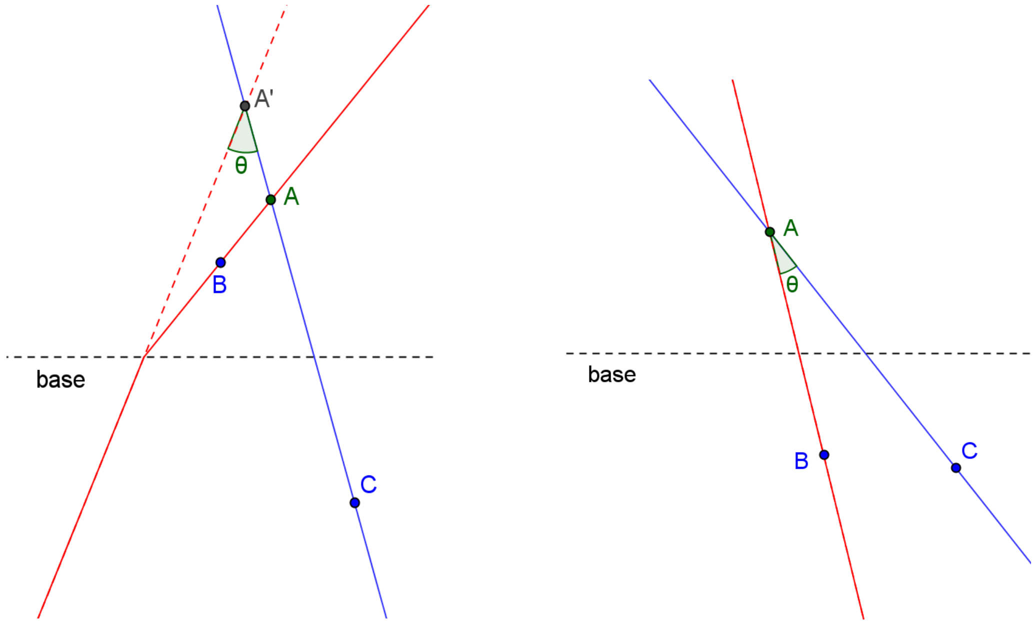
ユークリッド直線ABの傾きが正のとき
上図の折れ線(半直線2つの集合)

ユークリッド直線ABの傾きが0以下のとき
ユークリッド直線ABと一致

1-2. 角度（H-Angle)の定義

軸と交点を持つH-lineに対し, その軸より下の部分を延長したユークリッド直線をU-line と名づける. (軸と平行な H-lineに対しては, U-lineは H-line と同じとする.）

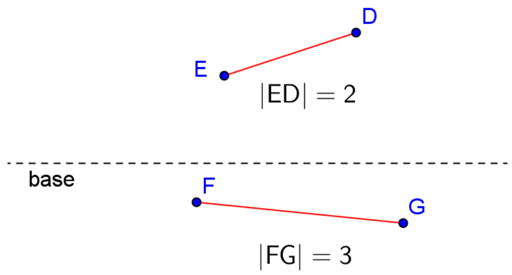
2つのH-lineのなす角度は，対応する U-Line のユークリッド的角度とする

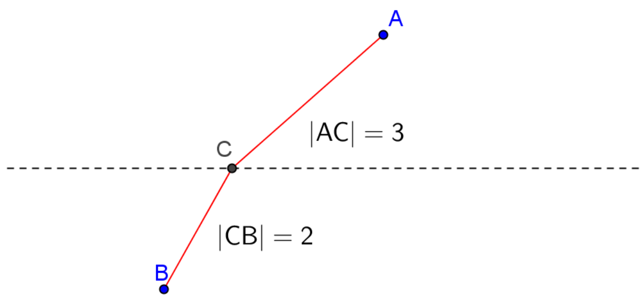


$$\angle BAC \text{ (H-angleとして)} = \theta$$

1-3. 長さ(H-Length)の定義

線分(H-Segment)が 軸と交点を持たないときは，通常の(ユークリッド的な)線分の長さ.
交点を持つときは，通常の(ユークリッド的に考えた) 折れ線の長さ.



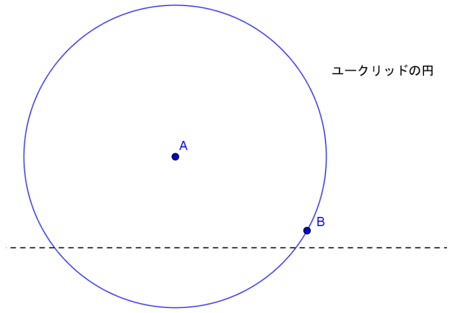


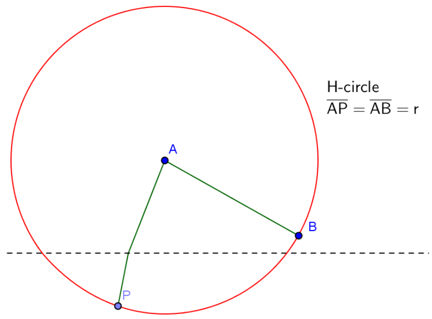
(H-Length of segment ED)=|ED|=2
(H-Length of segment FG)=|FG|=3

(H-Length of segment AB)=|AC|+|CB|=3+2=5

definitions.ggb

§2. 円は描けるか？





線分の合同「定理」

A,Bを直線α上の2点, A'を直線α'上の点とすると 直線α'上で (A'に関し与えられた側に)ただ 1点B'を見だし, 線分ABと線分A'B'が合同にできる. 記号で, $$AB \equiv A'B'$$

【注】「幾何学基礎論」では，公理III_1では「一意性」を仮定していない．
一意性は，公理III_2,III_4,III_5 を使って「証明」される．

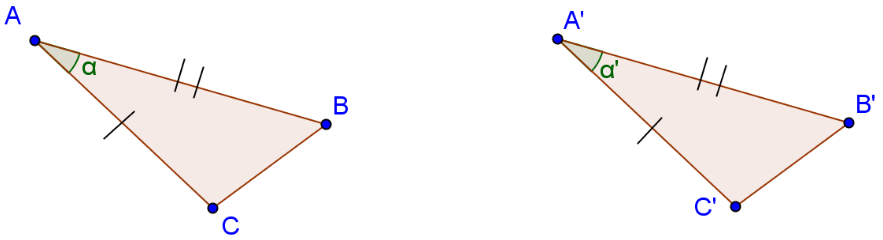
上の定理は H平面でも成り立つので，**円が描ける.**

Hcircle.ggb

§3.「合同公理」は成り立つか？

III_5 (三角形の合同公理)

2つの三角形ABCおよびA'B'C'において，合同関係 $AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad \angle BAC = \angle B'A'C'$ が成り立てば，常に $\angle ABC = \angle A'B'C'$ も成り立つ．



ユークリッド平面では，上の命題は成り立つが，H-平面では 成り立たない．

regularTriangle.ggb

【参考】

III_1 (線分の合同公理1)

A,Bを直線α上の2点, A'を直線α'上の点とすると
直線α'上で (A'に関し与えられた側に)少なくとも1点B'を見だし,
線分ABと線分A'B'が合同にできる. 記号で,

$$AB \equiv A'B'$$

III_2 (線分の合同公理2)

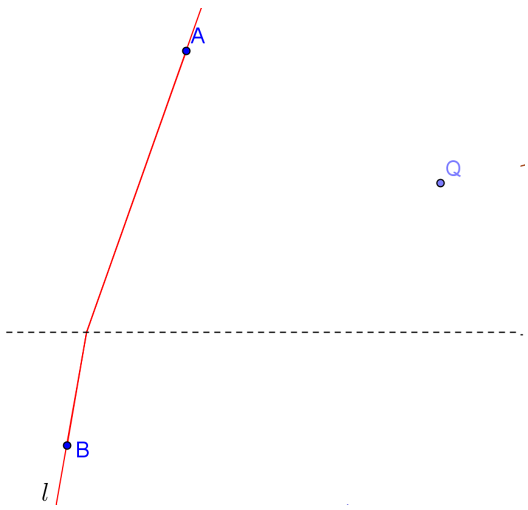
$AB \equiv CD$, $AB \equiv EF$ ならば $CD \equiv EF$ (推移律)

III_4 (角の合同公理)

与えられた平面上の与えられた半直線を一辺とし,
この直線に対して与えられた側に, 任意の角をただ一通りに
合同に移すことができる.

以上&三角形の合同公理III_5 から, III_1のB'が一つに決まる.

§4. 平行線はあるか？

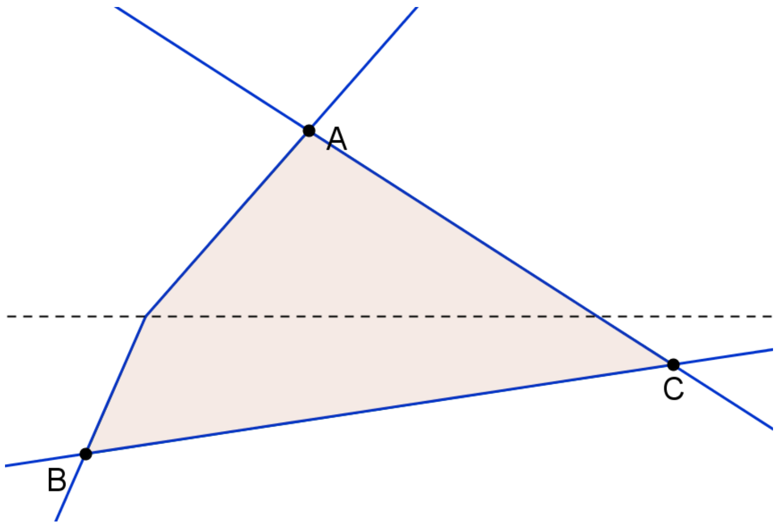


平行線は「ただ一本」ある. それでは, 同位角は等しいか？

2つのH-Line のなす角は, 対応する U-Lineのなす角で定義されるので, 等しい.

parallel.ggb
construction of parallel line.ggb

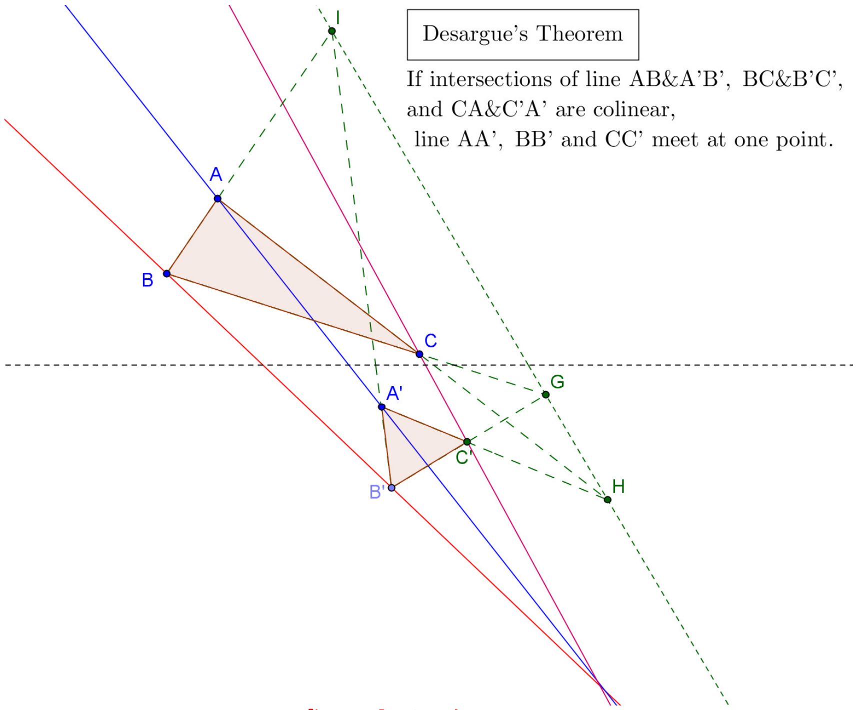
§5. 三角形の内角の和は？



平行線がただ一つ引けて，かつ同位角が等しいので，
ユークリッド平面と同様に，内角の和は180度．

sumofangles.ggb

§ 6. Desargue の定理は成り立つか？

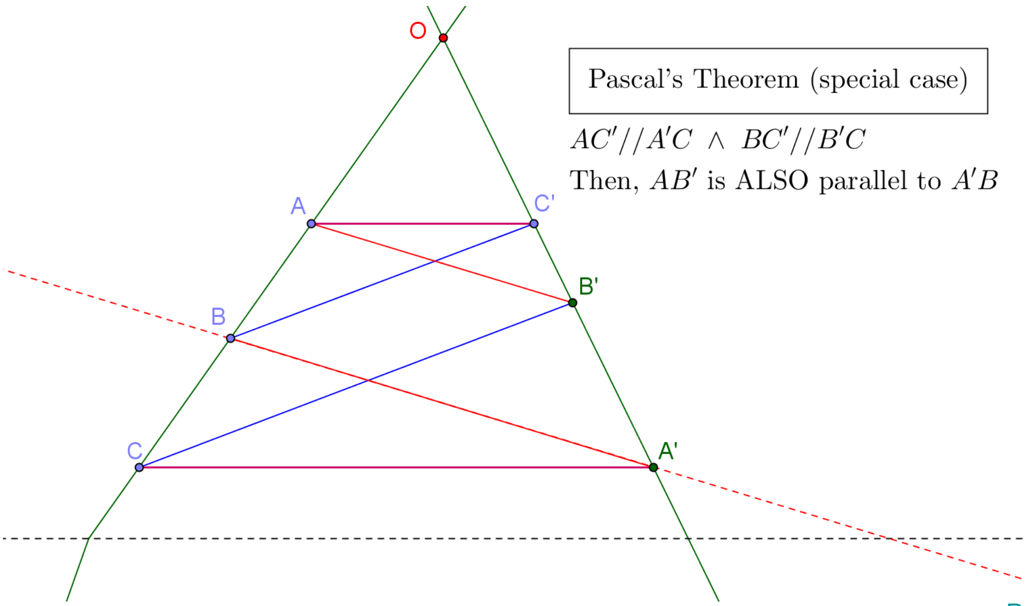


Desargue.ggb

成り立たない.

Desargueの定理は「三角形の合同公理III$_5$」を含む平面の公理群から証明される.
（合同公理III$_5$が成り立たなくとも, 空間の公理群も使えば 証明できる.)

§7. Pascal の定理は成り立つか？



Pascal's Theorem (special case)

$AC'//A'C \ \wedge \ BC'//B'C$

Then, AB' is ALSO parallel to $A'B$

Pascal.ggb

成り立たない.

Pascalの定理は「三角形の合同公理III_5」を含む平面の公理群から証明される.
（合同公理III_5が成り立たなくとも,「空間の公理群」と 連続公理V_1からも 証明される.）

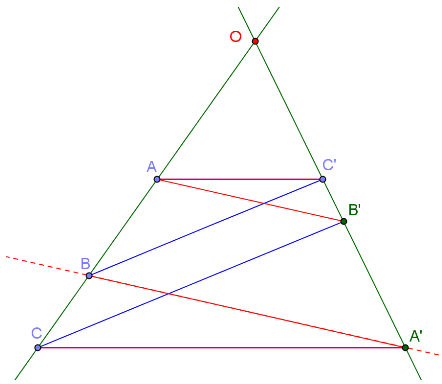
ここまで見てくださり，ありがとうございました．
今回 使用した PowerPoint（pdf)&Geogebraのファイルは，私の site に置いておきます．

http://mixedmoss.com/youtube/zigzagmodel.zip

なお，私のサイト(http://mixedmoss.com) および
私のYouTube アカウント (thickmoss) には，
高校生～一般の方まで，他にもいろいろ置いていますので，是非 ご覧ください．

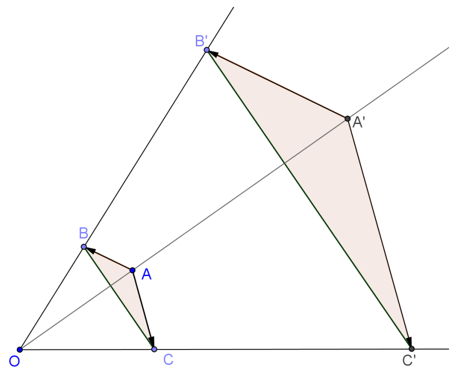
おまけ

定理61. デザルグの定理は，合同の定理IIIおよび 連続の公理Vを用いることなく，公理I_{1-3} , II , IV* のみを仮定して，パスカルの定理から証明することができる．



Pascal′s Theorem (special case)

AC′//A′C BC′//B′C
Then, AB′ is ALSO parallel to A′B



Desargue's Theorem

AB//A′B′,AC//A′C′,
Then BC//B′C′

From Pascal to Desargue.ggb