可解で既約な6次方程式の厳密解を求めるプログラム　with *Mathematica* 14

2025 年5月31日　by　mixedmoss

In[358]:=
```
ClearAll["Global`*"]
```

---

§1 . プログラム

G72_solutions.nb と G48_solutions.nb をモジュール化して, 可解で既約な6次方程式f(x)を入力するだけで, 厳密解が求まるようにプログラムしました. なお, このプログラムはガロア群を求める必要はなく, Galois Resolvent を使って書いています. 説明は先に述べた2つのファイルをご覧ください. プログラム中で使う p10a~ p10f,p15a~p15e の定義は次の様になりますが, 実行時間が非常に長くかかるため (p15c は約3日!) Text形式としてます. 結果は直下の closed cell に入れてあるので, 新規, またはClearAll["Global`*"] のなどの後には必ず「評価」して下さい. データが長すぎる為か, **長時間使っているうちにデータが壊れることもあります. その場合は reload して下さい**. (そんなことは起こりえないと思われるかもしれませんが, 実際に2度起こりました). またInternet に接続していないと§2の 表 が見えないかも知れません.

§1 - 1.(準備) p10a~f, p15a~e のプログラムと結果

```
Σ10 = {{x1, x3, x5, x2, x4, x6}, {x1, x3, x2, x4, x5, x6}, {x1, x3, x4, x2, x5, x6}, {x1, x3, x6, x2, x4, x5},
{x1, x5, x2, x3, x4, x6}, {x1, x5, x4, x2, x3, x6}, {x1, x5, x6, x2, x3, x4}, {x1, x2, x4, x3, x5, x6}, {x1, x2,
x6, x3, x4, x5}, {x1, x4, x6, x2, x3, x5}};
makeP10[p_] := SymmetricReduction[Expand[Product[(x - p) /. AssociationThread[Σ10[[1]] ->
Σ10[[k]]], {k, 1, 10}]], {x1, x2, x3, x4, x5, x6}, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}][[1]] // Collect[#, x] &;
p10a = makeP10[(x1 + x3 + x5) (x2 + x4 + x6)];
p10b = makeP10[(x1  x3 + x3  x5 + x5  x1) + (x2  x4 + x4  x6 + x6  x2)];
p10c = makeP10[(x1 + x3 + x5) (x1  x3 + x3  x5 + x5  x1) + (x2 + x4 + x6) (x2  x4 + x4  x6 + x6  x2)];
p10d = makeP10[x1  x3  x5 + x2  x4  x6];
p10e = makeP10[x1  x3  x5 (x1 + x3 + x5) + x2  x4  x6 (x2 + x4 + x6)];
p10f = makeP10[(x1 x3 + x3 x5 + x5 x1) (x2 x4 + x4 x6 + x6 x2)];

Σ15 = {{x1, x2, x3, x4, x5, x6}, {x1, x2, x3, x5, x4, x6}, {x1, x2, x3, x6, x4, x5}, {x1, x3, x2, x4, x5, x6},
{x1, x3, x2, x5, x4, x6}, {x1, x3, x2, x6, x4, x5}, {x1, x4, x2, x3, x5, x6},
  {x1, x4, x2, x5, x3, x6}, {x1, x4, x2, x6, x3, x5},
  {x1, x5, x2, x3, x4, x6}, {x1, x5, x2, x4, x3, x6},
  {x1, x5, x2, x6, x3, x4}, {x1, x6, x2, x3, x4, x5}, {x1, x6, x2, x4, x3, x5}, {x1, x6, x2, x5, x3, x4}};
makeP15[p_] := SymmetricReduction[Expand[Product[(x - p) /. AssociationThread[Σ15[[1]] ->
Σ15[[k]]], {k, 1, 15}]], {x1, x2, x3, x4, x5, x6}, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}][[1]] // Collect[#, x] &;
p15a = makeP15[x1  x2 + x3  x4 + x5  x6];
p15b = makeP15[x1  x2  x3  x4 + x3  x4  x5  x6 + x5  x6  x1  x2];
p15c = makeP15[x1  x2  (x1 + x2) + x3  x4  (x3 + x4) + x5  x6  (x5 + x6)];
```

```
p15d = makeP15[(x1 + x2) (x3 + x4) (x5 + x6)];
p15e = makeP15[(x1 + x2) (x3 + x4) + (x3 + x4) (x5 + x6) + (x5 + x6) (x1 + x2)];
```

【注】結果は下の closed cell の内部に入っています．右下のコをクリックして「評価」して下さい．

§1 - 2.メインプログラム

以下がメインプログラムです．「評価」してください．

In[360]:=

```
(*gの有理数解で重複度がmultiplicityのいずれかとなるものを取り出す*)
getTheta[g_,multiplicity_List]:=Module[{ichiji},ichiji = Select[FactorList[g], Exponent[#[[1]],
If[ichiji≠{},x/.Solve[ichiji[[1,1]]==0,x][[1]],{}]];

(*Gal=G72,G12 のタイプを解くプログラム．詳しくは G72.solutions.nb参照*)
solveG72[f_]:=Module[{alist,$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6,u1,u2,v1,v2,α,β,θa,θb,θc,θd,θe,θf},
alist={$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6}=CoefficientList[f,x][[1;;6]]{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f10a,f10b,f10c,f10d,f10e,f10f}={p10a,p10b,p10c,p10d,p10e,p10f}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a
{θa,θb,θc,θd,θe,θf}=getTheta[#,{1,4,7,10}]&/@{f10a,f10b,f10c,f10d,f10e,f10f};
{α,β}=t/.Solve[t^2-($a1)t+θa==0,t];
If[{α,β}≠{0,0},{u1,u2}=LinearSolve[{{1,1},{α,β}},{θb,θc}];{v1,v2}=LinearSolve[{{1,1},{α,β}}
If[Discriminant[u^2- (θb)u+(θf),u]≠0,{u1,u2}=u/.Solve[u^2- (θb)u+(θf)==0,u];{v1,v2}=LinearSo
u1=u2=1/2θb ;{v1,v2}=v/.Solve[v^2- θd v+$a6==0,v]]];
{x1,x3,x5}=x/.Solve[x^3-α x^2+ u1 x-v1==0,x,Cubics→True];
{x2,x4,x6}=x/.Solve[x^3-β x^2+ u2 x-v2==0,x,Cubics→True];]

(*Gal=G48 のタイプを解くプログラム．詳しくは G48.solutions.nb参照*)
solveG48[f_]:=Module[{alist,$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6,u1,u2,u3,α,β,γ,θa,θb,θc,θd,θe,mat},
alist={$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6}=CoefficientList[f,x][[1;;6]]{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f15a,f15b,f15c,f15d,f15e}={p15a,p15b,p15c,p15d,p15e}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5,a6}→
{θa,θb,θc,θd,θe}=getTheta[#,{1,5,7,9,15}]&/@{f15a,f15b,f15c,f15d,f15e};
{α,β,γ}=t/.Solve[t^3-θa t^2+θb t-$a6==0,t,Cubics→True];
Which[
(*case1*)(α-β)(β-γ)(γ-α)≠0,mat={{1,1,1},{α,β,γ},{β γ,γ α,α β}};{u1,u2,u3}=Simplify@LinearS
(*case2a*)α==β&&α≠γ,u3=θc/(γ-α);{u1,u2}=u/.Solve[u^2+(u3)u+θe^2+u3^2,u],
(*case2b*)β==γ&&β≠α,u1=θc/(α-β);{u2,u3}=u/.Solve[u^2+(u1)u+θe^2+u1^2,u],
(*case2c*)γ==α&&γ≠β,u2=θc/(β-γ);{u3,u1}=u/.Solve[u^2+(u2)u+θe^2+u2^2,u],
(*case3*)α==β==γ,{u1,u2,u3}=u/.Solve[u^3+(θe)u-(θd)==0,u,Cubics→True]
];
{x1,x2,x3,x4,x5,x6}=MapThread[1/2{(#1+Sqrt[#1^2-4#2]),(#1-Sqrt[#1^2-4#2])}&,{{u1,u2,u3},{α,/

(*全ての6次方程式に対するプログラム．Gal=G72,G12 のタイプには solveG72で対応，Gal=G48 のタイプには solveG48で
solveSextic[f_]:=Module[{alist,θ10,θ15},
alist=CoefficientList[f,x][[1;;6]]{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f10a,f15a}={p10a,p15a}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5,a6}→alist];
θ10=getTheta[f10a,{1,4,7,10}];
θ15=getTheta[f15a,{1,5,7,9,15}];
Which[θ10=!={}&&θ15=!={},gal="G12系列";solveG72[f],θ10=!={}&&θ15==={},gal="G72系列";solveG72
```

§2 . 使用例

6次の係数が1(monic)で既約で可解な有理数係数の6次方程式に対応しています． 使うには **solveSextic[f]** と入力して「評価」するだけです．このとき変数x1~x6に厳密解の式が保存されます． 出力するには「x1 」などと打ち込む必要があります． 自動的に x1~x5を出力させなかった理由は「出力が大きすぎる」からです． また **gal** にはガロア群が入るグループ名 が入ります． さらに f10a~f10f, f15a~f15eも Global変数なので見る事ができます．「文献1」に載っている2つの例を解いてみます．【例1】は7 次の円分多項式です． 解は色々な本に載っています．

■ 例1 f=1+x+ x^2 +x^3+x^4+x^5+x^6

```
f1 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6;
solveSextic[f1]
TraditionalForm[x1]
TraditionalForm[x2]
```

Out[412]//TraditionalForm=

$$\frac{1}{6}\left(-1-i\sqrt{7}\right)-\frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(14+i\sqrt{7}+3\sqrt{21}\right)}+\frac{i\sqrt{7}\left(1-i\sqrt{3}\right)}{3\times 2^{2/3}\sqrt[3]{14+i\sqrt{7}+3\sqrt{21}}}$$

Out[413]//TraditionalForm=

$$\frac{1}{6}\left(-1+i\sqrt{7}\right)-\frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(14-i\sqrt{7}+3\sqrt{21}\right)}-\frac{i\sqrt{7}\left(1-i\sqrt{3}\right)}{3\times 2^{2/3}\sqrt[3]{14-i\sqrt{7}+3\sqrt{21}}}$$

x_1 , x_2 のみ出力しました． 次は 厳密解の近似値とNSolveを使った数値解を比較します．

In[368]:=

```
N[{x1, x2, x3, x4, x5, x6}] // Sort
x /. NSolve[f1 == 0, x] // Sort
```

Out[368]=

```
{-0.900969 - 0.433884 i, -0.900969 + 0.433884 i, -0.222521 - 0.974928 i,
 -0.222521 + 0.974928 i, 0.62349 - 0.781831 i, 0.62349 + 0.781831 i}
```

Out[369]=

```
{-0.900969 - 0.433884 i, -0.900969 + 0.433884 i, -0.222521 - 0.974928 i,
 -0.222521 + 0.974928 i, 0.62349 - 0.781831 i, 0.62349 + 0.781831 i}
```

ご覧のように一致します． 次は ガロア群のグループと， f10a, f15a の因数分解です．

In[370]:=

```
gal
Factor[f10a]
Factor[f15a]
```

Out[370]=

G12系列

Out[371]=

$$(-2+x)\left(-1+5x-6x^2+x^3\right)\left(8+4x+16x^2+x^3+11x^4+2x^5+x^6\right)$$

Out[372]=

$$(-3+x)\left(2+x+x^2\right)\left(1-x-2x^2+x^3\right)^2\left(43-23x-3x^2-x^3+9x^4+3x^5+x^6\right)$$

SageMath によるとガロア群は C_6 ですから， 確かにG_{12} の部分群です．

例2 f= $x^6+x^4-x^3-2x^2+3x-1$

In[414]:=

```
f2 = x^6 + x^4 - x^3 - 2 x^2 + 3 x - 1;
Timing[solveSextic[f2]]
TraditionalForm[x1]
```

Out[415]=

```
{0.140625, Null}
```

Out[416]//TraditionalForm=

$$\left(6\left(2^{2/3}\ \sqrt[6]{3}\ \left(93\,i-155\ \sqrt{3}+45\ \sqrt{31}-9\,i\ \sqrt{93}\right)\ \sqrt[3]{\sqrt{93}-9}-3\ \sqrt[3]{2}\ \left(\sqrt{93}-9\right)^{2/3}\right.\right.$$
$$\left.\left(-93-93\,i\ \sqrt{3}+31\,i\ \sqrt{31}+9\ \sqrt{93}\right)+2\ \sqrt[3]{3}\ \left(-1395-279\,i\ \sqrt{3}+87\,i\ \sqrt{31}+145\ \sqrt{93}\right)\right)\Big/$$
$$\left(\left(31\ \sqrt{3}-9\ \sqrt{31}\right)\left(2\ \sqrt[3]{3}\ \left(\sqrt{3}+3\,i\right)+\ \sqrt[3]{2}\ \left(\sqrt{3}-3\,i\right)\left(\sqrt{93}-9\right)^{2/3}\right)\right.$$
$$\left.\left(6+6\,i\ \sqrt{3}-3\,i\ \sqrt[3]{2}\ \sqrt[6]{3}\ \left(\sqrt{93}-9\right)^{2/3}+\ \sqrt[3]{2}\ \left(3\left(\sqrt{93}-9\right)\right)^{2/3}\right)\right)+\sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(\sqrt{93}-9\right)}}-\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\sqrt{93}-9\right)}}{3^{2/3}}-\right.}$$
$$\left(6\left(2^{2/3}\ \sqrt[6]{3}\ \left(93\,i-155\ \sqrt{3}+45\ \sqrt{31}-9\,i\ \sqrt{93}\right)\ \sqrt[3]{\sqrt{93}-9}-3\ \sqrt[3]{2}\ \left(\sqrt{93}-9\right)^{2/3}\left(-93-93\,i\ \sqrt{3}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.31\,i\ \sqrt{31}+9\ \sqrt{93}\right)+2\ \sqrt[3]{3}\ \left(-1395-279\,i\ \sqrt{3}+87\,i\ \sqrt{31}+145\ \sqrt{93}\right)\right)^2\right)\Big/$$
$$\left(31\left(3\ \sqrt{93}-29\right)\left(2\ \sqrt[3]{3}\ \left(\sqrt{3}+3\,i\right)+\ \sqrt[3]{2}\ \left(\sqrt{3}-3\,i\right)\left(\sqrt{93}-9\right)^{2/3}\right)^2\right.$$
$$\left.\left.\left(6+6\,i\ \sqrt{3}-3\,i\ \sqrt[3]{2}\ \sqrt[6]{3}\ \left(\sqrt{93}-9\right)^{2/3}+\ \sqrt[3]{2}\ \left(3\left(\sqrt{93}-9\right)\right)^{2/3}\right)^2\right)\right)$$

今度は実行時間も出力させました． 0.14 秒です．また x1のみを出力させました．次は 厳密解の近似値とNSolveを使った数値解を比較します．

In[376]:=

```
N[{x1, x2, x3, x4, x5, x6}] // Chop // Sort
x /. NSolve[f2 == 0, x] // Sort
```

Out[376]=

```
{-1.23488, -0.335607 + 1.53239 i, -0.335607 - 1.53239 i,
 0.552548, 0.676771 + 0.370853 i, 0.676771 - 0.370853 i}
```

Out[377]=

```
{-1.23488, -0.335607 - 1.53239 i, -0.335607 + 1.53239 i,
 0.552548, 0.676771 - 0.370853 i, 0.676771 + 0.370853 i}
```

次は ガロア群のグループと， f10a, f15a の因数分解です．

In[378]:=

```
gal
Factor[f10a]
Factor[f15a]
```

Out[378]=

G48系列

Out[379]=

$$\left(1+71\,x-x^2-2\,x^3+x^4\right)\left(1-15\,x+60\,x^2-30\,x^3+20\,x^4-4\,x^5+x^6\right)$$

Out[380]=

$$x\left(-31-82\,x-46\,x^2+19\,x^3+4\,x^4-x^5+x^6\right)\left(877-74\,x-144\,x^2+53\,x^3-25\,x^4-4\,x^5+9\,x^6-2\,x^7+x^8\right)$$

f15aのみが有理数解を持つので，G48グループで，SageMath でもガロア群は G_{48} です．

§3.メインプログラムの解説

§3 - 1. ガロア群Gと f10a~f10f, f15a~f15e の因数分解

In[381]:=
```
Import["https://mixedmoss.com/mathematica/Galois/sextic/Table1.png"]
```
Out[381]=

TABLE I
The Degrees of the Irreducible Factors of the Galois Resolvents
$F_2(x)$, $F_{10}(x)$, and $F_{15}(x)$ in $\mathbf{Q}(x_1, \ldots, x_6)^G$

Group G	$F_2(x)$	$F_{10}(x)$	$F_{15}(x)$
S_6	2	10	15
A_6	1, 1	10	15
H_{120}	2	10	10, 5
Γ_{60}	1, 1	10	10, 5
G_{72}	2	9, 1	9, 6
Γ_{36}	1, 1	9, 1	9, 6
G_{36}	2	9, 1	9, 3, 3
G_{18}	2	9, 1	9, 3, 3
G_{48}	2	6, 4	8, 6, 1
Γ_{24}	1, 1	6, 4	8, 6, 1
G_{24}	2	6, 4	8, 6, 1
H_{24}	2	6, 4	6, 4, 4, 1
Γ_{12}	1, 1	6, 4	6, 4, 4, 1
G_{12}	2	6, 3, 1	6, 3, 3, 2, 1
C_6	2	6, 3, 1	6, 3, 3, 2, 1
H_6	2	3, 3, 3, 1	3, 3, 3, 3, 1, 1, 1

上の表は「文献1」からの抜粋です.
(四角の枠は私が書きました.) 表で $F_2(x)$ の定義は「$F_2(x) = \Pi(x - \Theta)$,
$\Theta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_5 - x_6)$ で S_6 / A_6 の代表元2つで Θを置換して積を取ります.
よって判別式をDとすると $F_2(x) = \left(x - \sqrt{D}\right)\left(x + \sqrt{D}\right) = x^2 - D$ です.
また「G72_solutions.nb」と「G48_solutions.nb」内の定義を使うと $F_{10}(x) =$ f10a,
$F_{15}(x) =$ f15a です. f10b~f10f, f15b~f15e はここには載っていません.

上の表によると 例えば Gal =
G_{12} のとき「$F_{10}(x) =$ (既約6次式) × (既約3次式) × (既約1次式)」,
「$F_{15}(x) =$ (既約6次式) × (既約3次式) × (既約3次式) × (既約2次式) × (既約1次式)」
と因数分解できるように見えます.
そうならば Θ の値はその1次因数の解を取れば良さそうに見えますが,
残念ながら そうなるとは限りません. 「既約3次式」の代わりに「1 次式の3乗」となることもあり,
その上その解が他の因数の解と一致することもあります. 幾つかの例をお見せします.

In[382]:=

```
factorF10F15[f_]:=Module[{},
alist={$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6}=CoefficientList[f,x][[1;;6]]{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f10a,f15a}={p10a,p15a}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5,a6}→alist];
Print["F10=f10a="Factor[f10a],"\nF15=f15a="Factor[f15a]]
]
factorF10Series[f_]:=Module[{},
alist={$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6}=CoefficientList[f,x][[1;;6]]{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f10a,f10b,f10c,f10d,f10e,f10f}={p10a,p10b,p10c,p10d,p10e,p10f}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a
Print["f10a="Factor[f10a],"\nf10b="Factor[f10b],"\nf10c="Factor[f10c],"\nf10d="Factor[f10d],"
]
factorF15Series[f_]:=Module[{},
alist={$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6}=CoefficientList[f,x][[1;;6]]{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f15a,f15b,f15c,f15d,f15e}={p15a,p15b,p15c,p15d,p15e}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5,a6}→
Print["f15a="Factor[f15a],"\nf15b="Factor[f15b],"\nf15c="Factor[f15c],"\nf15d="Factor[f15d],"
]
```

§3 – 1 – 1. Gal = G_{12} のとき

■ 例1：f1 = $5 - 2x + 9x^2 - 8x^3 + x^6$

In[385]:=

```
f1 = 5 - 2 x + 9 x^2 - 8 x^3 + x^6 ;
factorF10F15[f1]
```

$$F10=f10a=(-4+x)\left(-64+32x-4x^2+x^3\right)\left(625-950x-1311x^2-634x^3-38x^4+8x^5+x^6\right)$$

$$F15=f15a=(-4+x)\left(-23+x^2\right)\left(-167+5x+x^3\right)\left(-23-23x-4x^2+x^3\right)\left(1+88x+35x^2+32x^3+35x^4+8x^5+x^6\right)$$

■ 例2：f2 = $8 - 10x^3 + x^6$

In[387]:=

```
f2 = 8 - 10 x^3 + x^6 ;
factorF10F15[f2]
```

$$F10=f10a=x\left(68+36x-12x^2+x^3\right)\left(4624-2448x+2112x^2+568x^3+108x^4+12x^5+x^6\right)$$

$$F15=f15a=(-6+x)x^3\left(36+6x+x^2\right)\left(-68-6x^2+x^3\right)\left(4624-408x^2-136x^3+36x^4+6x^5+x^6\right)$$

■ 例3：f3 = $5 + 8x + 4x^2 - 2x^3 + x^4 + x^6$

In[389]:=

```
f3 = 5 + 8 x + 4 x^2 - 2 x^3 + x^4 + x^6;
factorF10F15[f3]
```

$$F10=f10a=(-9+x)(-1+x)^3\left(49-3144x-918x^2-6x^3+33x^4+6x^5+x^6\right)$$

$$F15=f15a=(-5+x)(-2+x)^2\left(-43+24x-9x^2+x^3\right)\left(-27+3x^2+x^3\right)\left(-448+1536x+960x^2+352x^3+84x^4+12x^5+x^6\right)$$

例1ではTable1に述べてあるように因数分解されています．しかし例2ではF15(x)の「既約3次式」が「1次式の3乗」になっています．例3ではF10(x)の「既約3次式」が「1次式の3乗」になり，F15(x)の「既約2次式」が「1次式の2乗」になっています．さらにf10b~fまで範囲を広げて見ましょう．

■ 例4：f4 = $5 - 10x + 4x^2 + 10x^3 - 6x^4 + x^6$

In[391]:=

```
f4 = 5 - 10 x + 4 x^2 + 10 x^3 - 6 x^4 + x^6;
factorF10Series[f4]
```

f10a= $x\,(5 + 4x + 4x^2 + x^3)\,(78400 + 2880x + 4816x^2 + 2093x^3 + 384x^4 + 32x^5 + x^6)$

f10b= $(6 + x)\,(91 + 64x + 14x^2 + x^3)\,(77896 - 60x + 406x^2 - 77x^3 - 36x^4 + 4x^5 + x^6)$

f10c= $(-5 + x)^3\,x\,(3483200 - 1721120x + 353064x^2 - 38385x^3 + 2331x^4 - 75x^5 + x^6)$

f10d= $(5 + x)^3\,(10 + x)\,(3400 - 1340x + 114x^2 - 145x^3 + 81x^4 - 15x^5 + x^6)$

f10e= $x\,(25 - 10x + x^3)\,(1433600 - 112640x + 2376x^2 - 839x^3 - 14x^4 + 16x^5 + x^6)$

f10f= $(-4 + x)\,(1 + 38x - 12x^2 + x^3)\,(1960000 - 154000x + 4700x^2 + 665x^3 - 94x^4 - 8x^5 + x^6)$

■ 例5：f5 = $8 + 8x^2 - 6x^4 + x^6$

In[393]:=

```
f5 = 8 + 8 x^2 - 6 x^4 + x^6;
factorF10Series[f5]
```

f10a= $(-2 + x)\,(-8 + 8x + 6x^2 + x^3)^2\,(-8 + 204x + 26x^2 + x^3)$

f10b= $(8 + x)\,(512 - 8x^2 + x^3)\,(56 + 44x + 12x^2 + x^3)^2$

f10c= $x^4\,(-11776 + 3968x^2 - 120x^4 + x^6)$

f10d= $x^4\,(-11776 + 3968x^2 - 120x^4 + x^6)$

f10e= $(-8 + x)\,(-512 + 448x + 8x^2 + x^3)\,(-448 + 16x + 16x^2 + x^3)^2$

f10f= $(-16 + x)\,(-4096 + 512x - 16x^2 + x^3)\,(-64 - 48x - 8x^2 + x^3)^2$

例4では f10cやf10dの「既約3次式」が「1 次式の3乗」となっています．さらに例5では その「1 次式の3乗」が別の一次式と一緒になって「1 次式の4乗」となっています．

§3 – 1 – 2. Gal = G_{72} のとき

チェックした限りでは f10a~f10f, f15a~f15e は表の通りに分解されました．

■ 例6：f6 = $1 + x + 3x^2 + 9x^3 + 10x^4 + x^6$

In[395]:=

```
f6 = 1 + x + 3 x^2 + 9 x^3 + 10 x^4 + x^6;
factorF10Series[f6]
factorF15Series[f6]
```

f10a= (−11 + x)
(−5324 + 4961 x − 162 712 x^2 − 102 970 x^3 − 31 362 x^4 + 36 903 x^5 − 8790 x^6 + 943 x^7 − 49 x^8 + x^9)
f10b= (1 + x)
(2 516 914 − 7 438 279 x + 3 239 012 x^2 − 604 450 x^3 + 66 212 x^4 + 5803 x^5 − 4020 x^6 + 623 x^7 − 41 x^8 + x^9)
f10c= (−11 + x) (−109 961 896 + 115 060 957 x − 57 076 558 x^2 +
17 178 547 x^3 − 3 381 484 x^4 + 445 013 x^5 − 38 868 x^6 + 2167 x^7 − 70 x^8 + x^9)
f10d= (−2 + x) (−2551 + 1141 x − 1096 x^2 − 1778 x^3 + 1760 x^4 + 1214 x^5 + 129 x^6 + 43 x^7 + 11 x^8 + x^9)
f10e= x (465 850 + 502 755 x + 123 860 x^2 − 26 069 x^3 − 15 448 x^4 − 2404 x^5 − 242 x^6 + 21 x^7 + 12 x^8 + x^9)
f10f= (−3 + x) (−54 224 + 59 592 x − 61 612 x^2 + 31 102 x^3 + 5519 x^4 − 2017 x^5 + 73 x^6 + 57 x^7 − 15 x^8 + x^9)

f15a= (−3151 + 78 x − 425 x^2 − 5 x^3 + 125 x^4 − 22 x^5 + x^6)
(48 632 − 7953 x − 8488 x^2 − 610 x^3 − 586 x^4 + 208 x^5 − 98 x^6 − 19 x^7 − 8 x^8 + x^9)
f15b= (−3399 − 506 x + 415 x^2 + 155 x^3 − 35 x^4 − 6 x^5 + x^6)
(−10 648 + 22 627 x − 14 278 x^2 + 3630 x^3 − 1386 x^4 + 143 x^5 − 98 x^6 + 11 x^7 − 3 x^8 + x^9)
f15c= (−77 639 − 92 104 x + 45 625 x^2 − 8415 x^3 + 825 x^4 − 44 x^5 + x^6)
(14 999 762 − 16 567 839 x + 7 239 048 x^2 − 1 568 232 x^3 + 152 380 x^4 + 5909 x^5 − 3892 x^6 + 547 x^7 − 37 x^8 + x^9)
f15d= (625 + 875 x − 2975 x^2 + 225 x^3 + 60 x^4 + 10 x^5 + x^6)
(304 175 − 1 523 520 x − 1 091 235 x^2 − 139 761 x^3 + 93 394 x^4 + 42 386 x^5 + 7889 x^6 + 799 x^7 + 44 x^8 + x^9)
f15e= (129 + 9922 x + 4425 x^2 − 2995 x^3 + 525 x^4 − 38 x^5 + x^6) (74 549 698 + 75 895 287 x −
83 101 612 x^2 + 30 773 950 x^3 − 6 197 814 x^4 + 766 428 x^5 − 60 172 x^6 + 2941 x^7 − 82 x^8 + x^9)

§3 − 1 − 3. Gal = G_{48} のとき

例7の様に表の通りに分解されるものもありますが，例8の様に表では既約でも，実際には更に分解される事も多いです．

■ 例7：f8 = 3 + 9 x + 8 x^2 − 10 x^3 − 10 x^4 + x^6

In[398]:=
```
f7 = 3 + 9 x + 8 x^2 - 10 x^3 - 10 x^4 + x^6;
factorF10Series[f7]
factorF15Series[f7]
```

f10a= (1 + 19 x + 23 x^2 + 10 x^3 + x^4) (34 225 + 51 977 x + 31 136 x^2 + 7883 x^3 + 929 x^4 + 50 x^5 + x^6)
f10b= (2111 + 1441 x + 323 x^2 + 30 x^3 + x^4) (35 055 + 21 843 x + 2046 x^2 − 723 x^3 − 71 x^4 + 10 x^5 + x^6)
f10c= (−557 + 8 x + 83 x^2 + 17 x^3 + x^4) (2 224 995 + 1 244 586 x + 283 435 x^2 + 33 508 x^3 + 2169 x^4 + 73 x^5 + x^6)
f10d= (663 − 552 x + 173 x^2 − 23 x^3 + x^4) (4635 + 2286 x − 405 x^2 − 252 x^3 + 19 x^4 + 13 x^5 + x^6)
f10e= (291 + 33 x − 23 x^2 + 4 x^3 + x^4) (294 705 − 71 721 x + 8562 x^2 + 1095 x^3 + 205 x^4 + 28 x^5 + x^6)
f10f= (603 − 879 x + 265 x^2 − 28 x^3 + x^4) (1 040 121 − 41 481 x − 20 918 x^2 + 2215 x^3 + 45 x^4 − 20 x^5 + x^6)

f15a= (−5 + x) (12 312 + 6700 x + 576 x^2 − 401 x^3 − 66 x^4 + 5 x^5 + x^6)
(72 052 + 9202 x − 20 367 x^2 − 5045 x^3 + 3200 x^4 + 1775 x^5 + 343 x^6 + 30 x^7 + x^8)
f15b= (−6 + x) (30 213 − 693 x + 3096 x^2 − 453 x^3 + 18 x^4 − 14 x^5 + x^6)
(1 194 939 + 392 553 x + 174 285 x^2 + 30 006 x^3 + 1458 x^4 − 471 x^5 − 80 x^6 − 4 x^7 + x^8)
f15c= (−13 + x) (124 517 + 22 055 x − 10 819 x^2 − 3013 x^3 − 107 x^4 + 17 x^5 + x^6)
(79 724 119 + 72 755 539 x + 28 330 584 x^2 + 6 107 892 x^3 + 796 408 x^4 + 64 374 x^5 + 3156 x^6 + 86 x^7 + x^8)
f15d= (−23 + x) (65 067 + 12 535 x − 4629 x^2 − 1733 x^3 + 543 x^4 − 43 x^5 + x^6)
(15 129 − 20 541 x − 1376 x^2 + 5572 x^3 + 1708 x^4 − 386 x^5 − 64 x^6 + 6 x^7 + x^8)
f15e= (15 + x) (243 912 + 211 120 x + 73 006 x^2 + 12 761 x^3 + 1184 x^4 + 55 x^5 + x^6)
(488 332 + 946 958 x + 750 983 x^2 + 318 045 x^3 + 78 950 x^4 + 11 805 x^5 + 1043 x^6 + 50 x^7 + x^8)

■ 例8：f8 = $3 - 10\,x^2 - 10\,x^4 + x^6$

In[401]:=

```
f8 = 3 - 10 x^2 - 10 x^4 + x^6;
factorF10Series[f8]
factorF15Series[f8]
```

f10a= $\left(-3 - 10\,x + 10\,x^2 + x^3\right)^2 \left(19\,600 + 5408\,x + 680\,x^2 + 40\,x^3 + x^4\right)$

f10b= $\left(-97 + 90\,x + 20\,x^2 + x^3\right)^2 \left(3520 + 192\,x + 80\,x^2 + x^4\right)$

f10c= $x^4 \left(93\,471 - 6457\,x^2 + 73\,x^4 + x^6\right)$

f10d= $x^4 \left(93\,471 - 6457\,x^2 + 73\,x^4 + x^6\right)$

f10e= $\left(291 + 70\,x - 20\,x^2 + x^3\right)^2 \left(20\,160 - 576\,x + 240\,x^2 + x^4\right)$

f10f= $\left(-9 - 30\,x + 10\,x^2 + x^3\right)^2 \left(48\,400 + 8224\,x + 840\,x^2 + 40\,x^3 + x^4\right)$

f15a= $(10 + x) \left(220 - 24\,x + 20\,x^2 + x^4\right)^2 \left(-55\,043 - 24\,020\,x + 1680\,x^2 + 522\,x^3 + 120\,x^4 + 20\,x^5 + x^6\right)$

f15b= $(10 + x) \left(1260 - 72\,x + 60\,x^2 + x^4\right)^2 \left(-135\,387 - 129\,780\,x + 840\,x^2 + 1566\,x^3 + 160\,x^4 + 20\,x^5 + x^6\right)$

f15c= $x^7 \left(970\,758\,649 + 15\,079\,988\,x^2 + 83\,630\,x^4 + 292\,x^6 + x^8\right)$

f15d= $x^7 \left(970\,758\,649 + 15\,079\,988\,x^2 + 83\,630\,x^4 + 292\,x^6 + x^8\right)$

f15e= $x \left(12\,460 + 4424\,x + 620\,x^2 + 40\,x^3 + x^4\right)^2 \left(31\,157 - 18\,980\,x + 8020\,x^2 + 4278\,x^3 + 620\,x^4 + 40\,x^5 + x^6\right)$

§3 – 1 – 4. Gal = H_6 のとき

■ 例9：f9 = $3 + x^6$

In[404]:=

```
f9 = 3 + x^6;
factorF10Series[f9]
factorF15Series[f9]
```

f10a= $x \left(-192 + x^3\right) \left(-3 + x^3\right)^2$

f10b= $x \left(3 + x^3\right)^2 \left(192 + x^3\right)$

f10c= $(-3 + x)^3\, x^4\, (3 + x)^3$

f10d= $(-3 + x)^3\, x^4\, (3 + x)^3$

f10e= $x \left(-576 + x^3\right) \left(-9 + x^3\right)^2$

f10f= $x \left(-576 + x^3\right) \left(-9 + x^3\right)^2$

f15a= $x^3 \left(-81 + x^3\right) \left(-24 + x^3\right)^2 \left(3 + x^3\right)$

f15b= $x^3 \left(-243 + x^3\right) \left(-72 + x^3\right)^2 \left(9 + x^3\right)$

f15c= $(-9 + x) (-3 + x)^3\, x^7\, (3 + x)^3 (9 + x)$

f15d= $(-9 + x) (-3 + x)^3\, x^7\, (3 + x)^3 (9 + x)$

f15e= $x^3 \left(-3 + x^3\right) \left(24 + x^3\right)^2 \left(81 + x^3\right)$

■ 例10：f10 = $2 - 6x + 9x^2 + 2x^3 + x^6$

In[407]:=

```
f10 = 2 - 6 x + 9 x^2 + 2 x^3 + x^6;
factorF10Series[f10]
factorF15Series[f10]
```

f10a= $x\left(-196 + 9x - 6x^2 + x^3\right)\left(-16 + 9x - 6x^2 + x^3\right)\left(-16 + 36x + 12x^2 + x^3\right)$

f10b= $x\left(16 + 36x - 12x^2 + x^3\right)\left(16 + 9x + 6x^2 + x^3\right)\left(196 + 9x + 6x^2 + x^3\right)$

f10c= $(-4 + x)^3 x\left(-28 + 57x - 12x^2 + x^3\right)\left(8 + 21x + 6x^2 + x^3\right)$

f10d= $(-2 + x)^3 (2 + x)\left(46 + 21x - 6x^2 + x^3\right)\left(82 + 57x + 12x^2 + x^3\right)$

f10e= $x\left(-32 + 24x + x^3\right)\left(-1148 - 3x + 18x^2 + x^3\right)\left(184 + 105x + 18x^2 + x^3\right)$

f10f= $(-9 + x)\left(-977 + 267x - 27x^2 + x^3\right)\left(-392 - 84x - 9x^2 + x^3\right)\left(-32 + 24x - 9x^2 + x^3\right)$

f15a= $(-3 + x)^2 (6 + x)\left(-108 - 27x + x^3\right)\left(-83 + 9x - 3x^2 + x^3\right)\left(-11 + 9x - 3x^2 + x^3\right)\left(-2 + 9x + 6x^2 + x^3\right)$

f15b= $(-9 + x) x^2\left(-112 - 12x + x^3\right)\left(32 - 12x + x^3\right)\left(-324 - 9x^2 + x^3\right)\left(-4 - 12x - 9x^2 + x^3\right)$

f15c= $(-6 + x)^2 (12 + x)\left(108 + 54x + x^3\right)$
$\left(-28 + 30x - 12x^2 + x^3\right)\left(-172 + 102x - 12x^2 + x^3\right)\left(8 - 6x + 6x^2 + x^3\right)$

f15d= $(-4 + x)^2 (14 + x)\left(-8 - 6x - 6x^2 + x^3\right)$
$\left(-8 + 66x - 6x^2 + x^3\right)\left(224 + 66x + 6x^2 + x^3\right)\left(28 + 30x + 12x^2 + x^3\right)$

f15e= $(-6 + x)(3 + x)^2\left(108 - 27x + x^3\right)\left(2 + 9x - 6x^2 + x^3\right)\left(11 + 9x + 3x^2 + x^3\right)\left(83 + 9x + 3x^2 + x^3\right)$

gal = G_{72} の時は完全に表の通りでしたが，G_{48} ，
G_{12} の時は表の通りになるのは半分以下となります．そして gal = C_6， H_6 の時は，
表の通りになるのは（調べた限りでは）1 つもありません．なぜなのかよく分かりません．

§3 - 2. θ の見つけ方について

以下，求める有理数解をθ，それ以外の有理数解をθ'と表します．§3 - 1 で見た様に，θを含む式が1次式とは限らず，またθ以外にも有理数解を持つ事が有りますが，gal=G72グループ，gal=G12グループの時は，f10a~f10f において (x-θ)の指数は 1,4,7,10 のいずれかとなり，(x-θ')の指数は 3,6,9 の何れかとなります．また gal=G48グループの時は，f15a~f15e において (x-θ)の指数は 1,5,7,9,15 のいずれかとなり，(x-θ')の指数は 6,8,14 の何れかとなります．故に，gal=G72, G12のグループの時は，1次式で指数が{1,4,7,10}の何れかとなるものを探し，gal=G48の時は，1次式で指数が{1,5,7,9,15}の何れかとなるものを探すとθが求まります．後は G72_solutions.nbと G48_solutions.nb と同様に解くことができます．(gal=G12のときは gal=G72と同様に解きます). また G72,G48,G12 の3グループの場合分けは「f10a,f15a がθを共に持てば G12グループ」,「 f10a のみがθを持てばG72グループ」,「 f15aのみがθを持てばG48グループ」と場合分けできます．これ以上に細かくガロア群を求めるには f10a~f10f,f15a~f15e 以外にも式が必要となりますが，それは 文献[1][3]をご覧ください．