7 次方程式の厳密解を求める「未完成」プログラム with *Mathematica* 14

2025 年5月4日 by mixedmoss

§1. 使い方

これは5次方程式の「solveQuintic」の様なプログラムではありません．7次方程式f[x], その原始元vの最小多項式V[x], vによるfの解x1〜x7の表現solsの3つを最初に入力して， notebook全体を評価する事により， f=0の厳密解が求まります． 評価には1分ほど掛かります． F42_Solutions.nb の補足Bの方法- 3次方程式の解の公式を使う方法- を使っています． sols は $\{1 + v + v^2, 1 - v + 2 v^2, 3 - v + 3 v^2\}$のように, v の式のみで入力してくださいSageMath の場合は次のようなコマンドの後， Lの結果からVの式が， roots の結果から sols が求まりますが， editor などで少し変形する必要があります．

```
x=polygen(QQ,'x')    #xを有理数係数多項式の変数と設定， R_.<x>=QQ などもOK
f=x^7 - 2*x^5 + x^4 + 4*x^3 - x^2 - 4*x + 3
N.<a>=NumberField(f)    #Nはfの解の一つ(ここではa)を Qに付加した体
L.<v>=N.galois_closure()  #LはNのガロア閉包
L

y=polygen(L,'y')    #yをLの変数と設定
g=y^7 - 2*y^5 + y^4 + 4*y^3 - y^2 - 4*y + 3
g.roots()
```

§2. 例 (下の f,V,sols を変えて, notebook を評価して下さい)

In[319]:=

```
ClearAll["`*"]
```

In[320]:=

```
f[x_] = x^7 + 7 * x^3 - 7 * x^2 + 7 * x + 1;
V[x_] = x^14 - 14 * x^12 + 49 * x^10 + 98 * x^8 - 686 * x^6 + 343 * x^4 + 343 * x^2 + 3087;

sols = (*{x1,x5,x4,x6,x7,x2,x3}=*)
  {38 / 17199 * v^12 - 15 / 637 * v^10 + 59 / 2457 * v^8 + 131 / 351 * v^6 - 55 / 117 * v^4 -
    541 / 351 * v^2 - 67 / 39, -79 / 34398 * v^12 + 85 / 3822 * v^10 - 29 / 2457 * v^8 -
    1657 / 4914 * v^6 + 31 / 117 * v^4 + 629 / 702 * v^2 + 1 / 2 * v + 167 / 78,
   -79 / 34398 * v^12 + 85 / 3822 * v^10 - 29 / 2457 * v^8 - 1657 / 4914 * v^6 +
    31 / 117 * v^4 + 629 / 702 * v^2 - 1 / 2 * v + 167 / 78,
   31 / 34398 * v^13 - 22 / 17199 * v^12 - 131 / 11466 * v^11 + 157 / 11466 * v^10 +
    80 / 2457 * v^9 - 95 / 4914 * v^8 + 236 / 2457 * v^7 - 418 / 2457 * v^6 -
    17 / 39 * v^5 + 7 / 26 * v^4 + 59 / 351 * v^3 + 188 / 351 * v^2 - 8 / 39 * v + 55 / 78,
   4 / 17199 * v^13 + 85 / 34398 * v^12 - 25 / 11466 * v^11 - 277 / 11466 * v^10 -
    2 / 2457 * v^9 + 47 / 2457 * v^8 + 269 / 4914 * v^7 + 788 / 2457 * v^6 - 5 / 78 * v^5 -
    35 / 117 * v^4 - 313 / 702 * v^3 - 232 / 351 * v^2 + 55 / 78 * v - 155 / 78,
   -4 / 17199 * v^13 + 85 / 34398 * v^12 + 25 / 11466 * v^11 - 277 / 11466 * v^10 +
    2 / 2457 * v^9 + 47 / 2457 * v^8 - 269 / 4914 * v^7 + 788 / 2457 * v^6 + 5 / 78 * v^5 -
    35 / 117 * v^4 + 313 / 702 * v^3 - 232 / 351 * v^2 - 55 / 78 * v - 155 / 78,
   -31 / 34398 * v^13 - 22 / 17199 * v^12 + 131 / 11466 * v^11 + 157 / 11466 * v^10 -
    80 / 2457 * v^9 - 95 / 4914 * v^8 - 236 / 2457 * v^7 - 418 / 2457 * v^6 +
    17 / 39 * v^5 + 7 / 26 * v^4 - 59 / 351 * v^3 + 188 / 351 * v^2 + 8 / 39 * v + 55 / 78};
```

準備プログラム(ガロア群を求めて整形)

In[323]:=

```
(*ガロア群を求めてgaloisgroupに入れる*)
vsols=v/.NSolve[V[v]==0];
perm1=sols/.{v→vsols[[1]]};
galoisgroup=Table[
 permi=sols/.{v→vsols[[i]]};
 Table[PositionSmallest[Abs[permi-perm1[[k]]]][[1]],{k,1,7}]//Flatten,{i,1,Length[vsols]}]//Sort;
(*C7,D7,F21,F42 の定義*)
c7=Table[RotateLeft[{1,2,3,4,5,6,7},i],{i,0,6}];(*名前の衝突にお気を付け下さい*)
d7=Join[c7,c7/.{1→6,2→5,3→4,4→3,5→2,6→1}]//Sort;
f21=Join[c7,c7/.{1→3,2→6,3→2,4→5,5→1,6→4},c7/.{1→2,2→4,3→6,4→1,5→3,6→5}]//Union//Sort;
f42=Join[d7,d7/.{1→3,2→6,3→2,4→5,5→1,6→4},d7/.{1→2,2→4,3→6,4→1,5→3,6→5}]//Union//Sort;
(*x1~x7の順序を変換して「正確に」C7,D7,F21,F42 に一致させる*)
replace[gline_List,rp_List]:=(gline/.AssociationThread[Range[7]→rp])[[rp]];(*ガロア群の変換*)
order=Length[galoisgroup];
gal=If[MemberQ[{7,14,21,42},order],Switch[order,7,c7,14,d7,21,f21,42,f42],
        Print["可解な7次方程式ではありません(It's not a solvable septic equation)"];Break[]];
perm=Permutations[{1,2,3,4,5,6,7}];
i=1; While[Sort[replace[#,perm[[i]]]&/@galoisgroup]≠gal&&i≤Factorial[7],perm[[i]];i++];
sols=sols[[perm[[i]]]];
```

メインプログラム

In[336]:=

```
(*[1]{t1,t2,t3,t4,t5,t6}={R1+R6,R2+R5,R3+R4,R1R6,R2R5,R3R4}の候補を求める*)
x2r={{1,1,1,1,1,1,1},{1,ξ,ξ^2,ξ^3,ξ^4,ξ^5,ξ^6},{1,ξ^2,ξ^4,ξ^6,ξ,ξ^3,ξ^5},{1,ξ^3,ξ^6,ξ^2,ξ^5,
{r0,r1,r2,r3,r4,r5,r6}=x2r.sols//PolynomialMod[#,{V[v],Cyclotomic[7,ξ]}]&;
{R1,R2,R3,R4,R5,R6}={r1,r2,r3,r4,r5,r6}^7;
{t1,t2,t3,t4,t5,t6}={R1+R6,R2+R5,R3+R4,R1 R6,R2 R5,R3 R4}//PolynomialMod[#,{V[v],Cyclotomic[7
{p1,p2,p3}={t1+t2+t3,t1 t2+t2 t3+t3 t1,t1*t2*t3}//PolynomialMod[#,{V[v],Cyclotomic[7,ξ]}]&;
{q1,q2,q3}={t4+t5+t6,t4 t5+t5 t6+t6 t4,t4*t5*t6}//PolynomialMod[#,{V[v],Cyclotomic[7,ξ]}]&;
t123456=x/.Solve[x^3-p1 x^2+p2 x-p3==0||x^3-q1 x^2+q2 x-q3==0,x,Cubics→True]//Simplify;(*t1234
```

In[343]:=

```
(*[2]数値計算を利用して　t1~t6,R1~R6,r1~r6の厳密解を求める. 近似解は $ を先頭に付けて表す*)
v0=(v/.NSolve[V[v]==0,v])[[1]];
$sols={$x1,$x2,$x3,$x4,$x5,$x6,$x7}=sols/.{v→v0};(*x1~x7の数値解*)
ξ=Cos[2Pi/7]+I Sin[2Pi/7];
{$r0,$r1,$r2,$r3,$r4,$r5,$r6}=x2r.$sols;(*r1~r6の数値解*)
$r123456={$r1,$r2,$r3,$r4,$r5,$r6};(*r1~r6の数値解をr123456.順序も正しい*)
$R123456={$R1,$R2,$R3,$R4,$R5,$R6}=$r123456 ^7;(*R1~R6の数値解*)
$t123456={$t1,$t2,$t3,$t4,$t5,$t6}={$R1+$R6,$R2+$R5,$R3+$R4,$R1 $R6, $R2 $R5, $R3 $R4};(*t1~t
pos=Table[PositionSmallest[Abs[$t123456[[i]]-N[t123456]]]//First,{i,1,6}];(*t123456の内,$t12345
t123456={t1,t2,t3,t4,t5,t6}=t123456[[pos]];(*t1~t6の厳密解.順序も正しい*)
R123456=y/.Solve[y^2-(t1)y+t4==0||y^2-(t2)y+t5==0||y^2-(t3)y+t6==0,y];(*R1~R6の厳密解.順序は不明
pos=Table[PositionSmallest[Abs[$R123456[[i]]-N[R123456]]]//First,{i,1,6}];(*R123456の内,$R12345
R123456={R1,R2,R3,R4,R5,R6}=R123456[[pos]];(*R1~R6の厳密解.順序も正しい*)
power=Round[Arg[$r123456]-Arg[(N@R123456)^(1/7)]]~Mod~7;(*R1~R6の7乗根と$r1~$r6が一致するように偏
r123456=R123456^(1/7)*ξ^power;(*r1~r6の厳密解.順序も正しい*)
(*[3]r1~r6を代入してx1~x7の厳密解を求める*)
{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7}=1/7{{1,1,1,1,1,1},{ξ^6,ξ^5,ξ^4,ξ^3,ξ^2,ξ},{ξ^5,ξ^3,ξ,ξ^6,ξ^4,ξ^2},{ξ^
```

実行結果

ガロア群の位数は

In[358]:=

```
Length[gal]
```

Out[358]=

14

f=0 の厳密解は，x1~x7に入っています．x1のみ表示します

In[359]:=

```
x1 // Simplify // TraditionalForm // Style[#, Small] &
```

Out[359]=

$$
\frac{1}{7}\Bigg(\bigg(\frac{16807}{24}\Big(-28-\frac{14\times 7^{2/3}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+\mathrm{i}\,2^{2/3}\sqrt[3]{7(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\,(\mathrm{i}+\sqrt{3})\Big)-\frac{2401}{24}\sqrt{\Big(7\Big(9408+\frac{17472\times 7^{2/3}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+96\times 2^{2/3}(1-\mathrm{i}\sqrt{3})\sqrt[3]{7(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\Big)+7\Big(28+\frac{14\times 7^{2/3}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+2^{2/3}(1-\mathrm{i}\sqrt{3})\sqrt[3]{7(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\Big)^2\Big)}\bigg)\wedge(1/7)\,\Big(\mathrm{i}\cos\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)+\sin\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)\Big)\Big)
+\bigg(\frac{16807}{6}\Big(-7+\frac{7\times 7^{2/3}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\Big)+\frac{2401}{6}\sqrt{49\Big(-7+\frac{7\times 7^{2/3}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\Big)^2-84\Big(-49+\frac{182\times 7^{2/3}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+2^{2/3}\sqrt[3]{7(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\Big)}\bigg)\wedge(1/7)\,\Big(\mathrm{i}\cos\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)+\sin\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)\Big)\Big)
+\bigg(\frac{16807}{24}\Big(-28+2^{2/3}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})\sqrt[3]{7(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}+\frac{14\,\mathrm{i}\,7^{2/3}(\mathrm{i}+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}\Big)-\frac{2401}{24}\sqrt{\Big(7\Big(7\Big(-28+2^{2/3}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})\sqrt[3]{7(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}+\frac{14\,\mathrm{i}\,7^{2/3}(\mathrm{i}+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}\Big)^2-96\Big(-98+2^{2/3}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})\sqrt[3]{7(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}+\frac{182\,\mathrm{i}\,7^{2/3}(\mathrm{i}+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}\Big)\Big)\Big)}\bigg)\wedge(1/7)\,\Big(\mathrm{i}\cos\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)+\sin\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)\Big)+
\bigg(\frac{16807}{24}\Big(-28-\frac{14\times 7^{2/3}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+\mathrm{i}\,2^{2/3}\sqrt[3]{7(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\,(\mathrm{i}+\sqrt{3})\Big)+\frac{2401}{24}\sqrt{\Big(7\Big(9408+\frac{17472\times 7^{2/3}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+96\times 2^{2/3}(1-\mathrm{i}\sqrt{3})\sqrt[3]{7(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\Big)+7\Big(28+\frac{14\times 7^{2/3}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+2^{2/3}(1-\mathrm{i}\sqrt{3})\sqrt[3]{7(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\Big)^2\Big)}\bigg)\wedge(1/7)\,\Big(\mathrm{i}\cos\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)+\sin\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)\Big)^3
+\bigg(\frac{16807}{6}\Big(-7+\frac{7\times 7^{2/3}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\Big)-\frac{2401}{6}\sqrt{49\Big(-7+\frac{7\times 7^{2/3}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\Big)^2-84\Big(-49+\frac{182\times 7^{2/3}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}+2^{2/3}\sqrt[3]{7(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}\Big)}\bigg)\wedge(1/7)\,\Big(\mathrm{i}\cos\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)+\sin\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)\Big)^6
+\bigg(\frac{16807}{24}\Big(-28+2^{2/3}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})\sqrt[3]{7(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}+\frac{14\,\mathrm{i}\,7^{2/3}(\mathrm{i}+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}\Big)+\frac{2401}{24}\sqrt{\Big(7\Big(7\Big(-28+2^{2/3}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})\sqrt[3]{7(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}+\frac{14\,\mathrm{i}\,7^{2/3}(\mathrm{i}+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-71+39\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}\Big)^2-96\Big(-98+2^{2/3}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})\sqrt[3]{7(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}+\frac{182\,\mathrm{i}\,7^{2/3}(\mathrm{i}+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-4591+87\,\mathrm{i}\sqrt{3})}}\Big)\Big)\Big)}\bigg)\wedge(1/7)\,\Big(\mathrm{i}\cos\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)+\sin\Big(\frac{3\pi}{14}\Big)\Big)^6\Bigg)
$$

検算です.「f=0の数値解」と「上で求めた厳密解x1~x7の近似値」です.

In[361]:=

```
x /. NSolve[f[x] == 0, x] // Chop[#, 10^(-8)] & // Sort
N[{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7}] // Chop[#, 10^(-8)] & // Sort
```

Out[361]=

```
{-1.4171 - 1.16298 i, -1.4171 + 1.16298 i, -0.125215, 0.4768 - 1.03356 i,
 0.4768 + 1.03356 i, 1.0029 - 0.910152 i, 1.0029 + 0.910152 i}
```

Out[362]=

```
{-1.4171 + 1.16298 i, -1.4171 - 1.16298 i, -0.125215, 0.4768 - 1.03356 i,
 0.4768 + 1.03356 i, 1.0029 - 0.910152 i, 1.0029 + 0.910152 i}
```