解の公式 Part2 (r3, r5, r6 を r1 で表す) with Mathematica14.0

§0 準備

notebook 全体の評価には20秒ほど掛かります．ご注意ください．

In[3410]:=

```
ClearAll["`*"]
```

F35↓（評価してください）

In[3412]:=

```
findF12G12[f_] := Module[{f35, factors, pos1, pos2, f12, d,R1,R2, f12factors,u,v,fp,fm,g1,g2,g
Clear[a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7];
  f35 = F35 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7} → Reverse@CoefficientList[f, x,
  factors = FactorList[f35];
  pos1 = Position[Exponent[factors〚All, 1〛, x], 14]〚1, 1〛;
  f12 = factors〚pos1〛〚1〛;
  d = Sqrt@Discriminant[f12, x];
  f12factors= FactorList[f12, Extension → d];
  pos2 = Flatten@Position[Exponent[f12factors〚All, 1〛, x], 7];
  {$f1,$f2}=(Expand[#/Coefficient[#, x, 7]] &) /@f12factors〚pos2〛〚All, 1〛;
  u=-(t1+t2)/14+(t1-t2)/(2Sqrt[-7]);
  v=-(t1+t2)/14-(t1-t2)/(2Sqrt[-7]);
fp=($f1/.{x→u})+($f2/.{x→v});
fm=Sqrt[-7](($f1/.{x→u})-($f2/.{x→v}));
g1=GroebnerBasis[{f/.{x→(t1+t2)/7},fp,fm},{t1},{t2}]〚1〛;
$g1=If[Coefficient[g1,t1,7]=!=0,Expand[#/Coefficient[#,t1,7]]&[g1]/.{t1→x},
R1=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7},fp/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7](t1-t2)/14,v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7]
 R2=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7},fm/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7](t1-t2)/14,v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7]
 PolynomialGCD[R1,R2,Extension→Automatic];
gcd1=PolynomialGCD[R1,R2,Extension→Automatic];
Expand[gcd1/Coefficient[gcd1,t1,7]]/.{t1→x}];
g2=GroebnerBasis[{f/.{x→(t1+t2)/7},fp,fm},{t2},{t1}]〚1〛;
$g2=If[Coefficient[g2,t2,7]=!=0,Expand[#/Coefficient[#,t2,7]]&[g2]/.{t2→x},
R1=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7},fp/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7](t1-t2)/14,v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7]
 R2=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7},fm/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7](t1-t2)/14,v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7]
 gcd2=PolynomialGCD[R1,R2,Extension→Automatic];
Expand[gcd2/Coefficient[gcd2,t2,7]]/.{t2→x}];
If[$g1===x^7,{$f1,$f2,$g1,$g2}={$f2,$f1,$g2,$g1}];
Return[{$f1,$f2,$g1,$g2}]]

(*findF3は$f1,$f2が必要なので，findF12G12が既に実行されている事が必要*)
findF3[f_]:=Module[{R1,R2,gcd3},
R1=Resultant[f,$f1/.{x→(t-x)/2},x];
R2=Resultant[f,$f2/.{x→(-t-x)/2},x];
gcd3=PolynomialGCD[R1,R2,Extension→Automatic];
$f3=(Expand[#/Coefficient[#,t,7]]&[gcd3])/.{t→x}]
```

§1 . 定義の確認

r_0 ~r_6 は f の解 x_0 ~ x_6 から作られるLagrange分解式です．

```
r0=x0+x1+ x2+  x3 + x4 + x5 +x6 ;
r1=x0+ζ x1+ ζ^2 x2 +ζ^3 x3 +ζ^4 x4+ζ^5 x5 +ζ^6 x6;
r2=x0+ζ^2 x1+ ζ^4 x2 +ζ^6 x3 +ζ x4+ζ^3 x5 +ζ^5 x6;
r3=x0+ζ ^3 x1+ ζ^6 x2 +ζ^2 x3 +ζ^5 x4+ζ x5 +ζ^4 x6;
r4=x0+ζ^4 x1+ ζ x2 +ζ^5 x3 +ζ^2 x4+ζ^6 x5 +ζ^3 x6;
r5=x0+ζ ^5 x1+ ζ^3 x2 +ζ x3 +ζ^6 x4+ζ^4 x5 +ζ^2 x6;
r6=x0+ζ^6 x1+ ζ^5 x2 +ζ^4 x3 +ζ^3 x4+ζ^2 x5 +ζ x6;
```

F1, F2, F3, G1, G2 は下の様に定義されます．ζは1の虚数7乗根の一つです．

In[3414]:=

```
F1 = (x - (x0 + x1 + x3)) (x - (x1 + x2 + x4)) (x - (x2 + x3 + x5)) (x - (x3 + x4 + x6))
     (x - (x0 + x4 + x5)) (x - (x1 + x5 + x6)) (x - (x0 + x2 + x6)) // Collect[#, x] &;
F2 = (x - (x0 + x2 + x3)) (x - (x1 + x3 + x4)) (x - (x2 + x4 + x5)) (x - (x3 + x5 + x6))
     (x - (x0 + x4 + x6)) (x - (x1 + x5 + x0)) (x - (x1 + x2 + x6)) // Collect[#, x] &;
F3 = (x - (x0 + x1 + x3) + (x2 + x4 + x5)) (x - (x1 + x2 + x4) + (x3 + x5 + x6))
     (x - (x2 + x3 + x5) + (x0 + x4 + x6)) (x - (x3 + x4 + x6) + (x1 + x5 + x0))
     (x - (x0 + x4 + x5) + (x1 + x2 + x6)) (x - (x1 + x5 + x6) + (x0 + x2 + x3))
     (x - (x0 + x2 + x6) + (x1 + x3 + x4)) // Collect[#, x] &;

G1 = PolynomialMod[(x - (r1 + r2 + r4)) (x - (ζ r1 + ζ ^2 r2 + ζ ^4 r4))
      (x - (ζ^2 r1 + ζ ^4 r2 + ζ r4)) (x - (ζ^3 r1 + ζ ^6 r2 + ζ ^5 r4))
      (x - (ζ^4 r1 + ζ r2 + ζ ^2 r4)) (x - (ζ^5 r1 + ζ ^3 r2 + ζ ^6 r4))
      (x - (ζ^6 r1 + ζ ^5 r2 + ζ ^3 r4)), Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, x] &;
G2 = PolynomialMod[(x - (r3 + r5 + r6)) (x - (ζ^4 r3 + ζ ^2 r5 + ζ r6))
      (x - (ζ r3 + ζ ^4 r5 + ζ^2 r6)) (x - (ζ^5 r3 + ζ ^6 r5 + ζ ^3 r6))
      (x - (ζ^2 r3 + ζ r5 + ζ ^4 r6)) (x - (ζ^6 r3 + ζ ^3 r5 + ζ ^5 r6))
      (x - (ζ^3 r3 + ζ ^5 r5 + ζ ^6 r6)), Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, x] &;
```

§2. 公式(#)

a_i, b_i, c_i, d_i^+, d_i^-, e_i $(i = 1, 2, ..7)$ をそれぞれf, G_1, G_2,
$F^+ = F_1 + F_2$, $F^- = \sqrt{-7}\,(F_1 - F_2)$, $\sqrt{-7}\,F_3$ の $(7 - i)$ 次の係数とすると,
下の様にr_3, r_5, r_6 も r_1 の式で表すことができます.

(♯)

$$\begin{cases} r_1 r_6 + r_2 r_5 + r_4 r_3 = -7 a_2 & (16) \\ r_4^2 r_6 + r_1^2 r_5 + r_2^2 r_3 = -\frac{1}{14} b_3 + \frac{21}{4} d_3^+ - \frac{7}{4} d_2^- - 14 a_3 & (17) \\ r_4 r_2^2 r_6 + r_1 r_4^2 r_5 + r_2 r_1^2 r_3 = \frac{1}{21} c_4 - \frac{1}{42} b_4 + \frac{49}{12} d_4^+ + \frac{49}{12} d_4^- - \frac{98}{3} a_4 & (18) \\ r_1^4 r_3 + r_2^4 r_6 + r_4^4 r_5 = 7 e_5 + \frac{1}{7} c_5 - \frac{3}{14} b_5 - \frac{343 d_5^+}{4} - \frac{343 d_5^-}{4} + b_3 a_2 - 343 a_5 & (19) \end{cases}$$

原論文では上の式を グレブナー基底を用いて導いていま
す. また原論文では 第4行のc_5 の係数は $(-1/7)$ ですが,
私の計算では $(1/7)$ となりました. ここでは私の計算結果の方を載せました.

以下 F^+, F^-, d_i^+, d_i^- はそれぞれFp, Fm, dp_i, dm_i と表記します.
まず定義に従って dp_i, dm_i, e_i, b_i, c_i を 求めます.

In[3419]:=

```
Fp = F1 + F2 // Collect[#, x] &; (*Fp=F+*)
Fm = Sqrt[-7] (F1 - F2) // Collect[#, x] &; (*Fm=F-*)
{dp3, dp4, dp5, dp6, dp7} = CoefficientList[Fp, x, 5] // Reverse;
{dm3, dm4, dm5, dm6, dm7} = CoefficientList[Fm, x, 5] // Reverse;
{e3, e4, e5, e6, e7} = Sqrt[-7] CoefficientList[F3, x, 5] // Reverse;
{b3, b4, b5, b6, b7} = CoefficientList[G1, x, 5] // Reverse;
{c3, c4, c5, c6, c7} = CoefficientList[G2, x, 5] // Reverse;
```

In[3426]:=

```
vars = {x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6};
lagrange = {{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
   {1, ξ, ξ^2, ξ^3, ξ^4, ξ^5, ξ^6}, {1, ξ^2, ξ^4, ξ^6, ξ, ξ^3, ξ^5},
   {1, ξ^3, ξ^6, ξ^2, ξ^5, ξ, ξ^4}, {1, ξ^4, ξ, ξ^5, ξ^2, ξ^6, ξ^3},
   {1, ξ^5, ξ^3, ξ, ξ^6, ξ^4, ξ^2}, {1, ξ^6, ξ^5, ξ^4, ξ^3, ξ^2, ξ}};
rules = AssociationThread[{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} → lagrange.vars];
```

これで a_i, b_i, c_i, d_i^+, d_i^-, e_i が $x_0 \sim x_6$ と $\sqrt{-7}$ で表されました.

dp_i, dm_i, e_i は 既に $x_0 \sim x_6$ の式です. b_i,
c_i も $x_0 \sim x_6$ の式に直し「$\xi = \mathrm{Cos}[2\pi/7] + i\,\mathrm{Sin}[2\pi/7]$」とします.
この時よく知られているように「$\xi + \xi^2 + \xi^4 = \left(-1 + \sqrt{-7}\right)/2$」
が成り立つのでそれを使って簡単にします.

以下の計算はやや時間がかかるので,
最低必要な変数のみ計算し, 結果のみ下のclosed cell に入れています.

```
{b3, b4, b5, b6, b7} = Collect[PolynomialMod[{b3, b4, b5, b6, b7} /. rules, Cyclotomic[7,]],] /. { ^4 -> -- ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])} // Simplify;
{c3, c4, c5} = Collect[PolynomialMod[{c3, c4, c5} /. rules, Cyclotomic[7,]],] /. { ^4 -> -- ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])} //
```

Simplify;

{b3, b4, b5, b6, b7}, {c3, c4, c5} は(↓)です．評価してください．

これでa_i, b_i, c_i, d_i^+, d_i^- , e_i がx_0~ x_6 と $\sqrt{-7}$ で表されました．例えばb_3 は次の様になります．

In[3431]:=

b3

Out[3431]=

$$
\begin{aligned}
&7\,\big(-2\,x0^3-2\,x1^3-2\,x2^3+x2^2\,x3-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2^2\,x3+x2\,x3^2+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2\,x3^2-2\,x3^3+x2^2\,x4-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2^2\,x4+\\
&\quad 2\,x2\,x3\,x4+x3^2\,x4-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3^2\,x4+x2\,x4^2+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2\,x4^2+x3\,x4^2+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3\,x4^2-2\,x4^3+x2^2\,x5+\\
&\quad \mathrm{i}\sqrt{7}\,x2^2\,x5-5\,x2\,x3\,x5+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2\,x3\,x5+x3^2\,x5-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3^2\,x5-5\,x2\,x4\,x5-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2\,x4\,x5+\\
&\quad 2\,x3\,x4\,x5+x4^2\,x5-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4^2\,x5+x2\,x5^2-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2\,x5^2+x3\,x5^2+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3\,x5^2+x4\,x5^2+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4\,x5^2-\\
&\quad 2\,x5^3+x2^2\,x6-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2^2\,x6+2\,x2\,x3\,x6+x3^2\,x6+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3^2\,x6+2\,x2\,x4\,x6-5\,x3\,x4\,x6+\\
&\quad \mathrm{i}\sqrt{7}\,x3\,x4\,x6+x4^2\,x6-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4^2\,x6+2\,x2\,x5\,x6-5\,x3\,x5\,x6-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3\,x5\,x6+2\,x4\,x5\,x6+\\
&\quad x5^2\,x6-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x5^2\,x6+x2\,x6^2+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2\,x6^2+x3\,x6^2-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3\,x6^2+x4\,x6^2+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4\,x6^2+x5\,x6^2+\\
&\quad \mathrm{i}\sqrt{7}\,x5\,x6^2-2\,x6^3+x1^2\,\big(x2-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2+x3-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3+x4+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4+x5-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x5+x6+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x6\big)+\\
&\quad x0^2\,\big(x1-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x1+x2-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x2+x3+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3+x4-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4+x5+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x5+x6+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x6\big)+\\
&\quad x1\,\Big(\big(1+\mathrm{i}\sqrt{7}\big)\,x2^2+\big(1+\mathrm{i}\sqrt{7}\big)\,x3^2+\big(-5-\mathrm{i}\sqrt{7}\big)\,x3\,x4+x4^2-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4^2+\\
&\qquad 2\,x4\,x5+x5^2+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x5^2+2\,x4\,x6-5\,x5\,x6+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x5\,x6+x6^2-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x6^2+\\
&\qquad 2\,x3\,(x5+x6)+x2\,\big(2\,x3-5\,x4+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4+2\,x5-5\,x6-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x6\big)\Big)+\\
&\quad x0\,\Big(\big(1+\mathrm{i}\sqrt{7}\big)\,x1^2+\big(1+\mathrm{i}\sqrt{7}\big)\,x2^2+x3^2-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3^2+2\,x3\,x4+x4^2+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4^2+\\
&\qquad 2\,x3\,x5-5\,x4\,x5+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4\,x5+x5^2-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x5^2+2\,x3\,x6-5\,x4\,x6-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x4\,x6+\\
&\qquad 2\,x5\,x6+x6^2-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x6^2+x1\,\big(2\,x2-5\,x3+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3+2\,x4-5\,x5-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x5+2\,x6\big)+\\
&\qquad x2\,\big(-5\,x3-\mathrm{i}\sqrt{7}\,x3+2\,x4+2\,x5-5\,x6+\mathrm{i}\sqrt{7}\,x6\big)\Big)\big)
\end{aligned}
$$

§3 . 公式(#)の証明その 1 (基本対称式のグレブナー基底の作成)

$x_0 \sim x_6$ のk次基本対称式を s_k とし, $\{s_1, s_2 - a_2, s_3 + a_3, s_4 - a_4, s_5 + a_5\}$ というイデアルのグレブナー基底 base を 作ります (所謂「名前付け」です).
なお「$s_1 = 0$ 」と仮定しているので s_1 には名前は付けません.

In[3432]:=

```
{s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7} = Table[SymmetricPolynomial[k, vars], {k, 1, 7}];
base = GroebnerBasis[{s1 , s2 - a2, s3 + a3, s4 - a4, s5 + a5, s6 - a6, s7 + a7 },
  Reverse[vars], MonomialOrder → Lexicographic]
```

Out[3433]=

$\{a7 + a6\,x0 + a5\,x0^2 + a4\,x0^3 + a3\,x0^4 + a2\,x0^5 + x0^7,$
$a6 + a5\,x0 + a4\,x0^2 + a3\,x0^3 + a2\,x0^4 + x0^6 + a5\,x1 + a4\,x0\,x1 + a3\,x0^2\,x1 + a2\,x0^3\,x1 + x0^5\,x1 + a4\,x1^2 +$
$a3\,x0\,x1^2 + a2\,x0^2\,x1^2 + x0^4\,x1^2 + a3\,x1^3 + a2\,x0\,x1^3 + x0^3\,x1^3 + a2\,x1^4 + x0^2\,x1^4 + x0\,x1^5 + x1^6,$
$a5 + a4\,x0 + a3\,x0^2 + a2\,x0^3 + x0^5 + a4\,x1 + a3\,x0\,x1 + a2\,x0^2\,x1 + x0^4\,x1 + a3\,x1^2 + a2\,x0\,x1^2 + x0^3\,x1^2 +$
$a2\,x1^3 + x0^2\,x1^3 + x0\,x1^4 + x1^5 + a4\,x2 + a3\,x0\,x2 + a2\,x0^2\,x2 + x0^4\,x2 + a3\,x1\,x2 + a2\,x0\,x1\,x2 +$
$x0^3\,x1\,x2 + a2\,x1^2\,x2 + x0^2\,x1^2\,x2 + x0\,x1^3\,x2 + x1^4\,x2 + a3\,x2^2 + a2\,x0\,x2^2 + x0^3\,x2^2 + a2\,x1\,x2^2 +$
$x0^2\,x1\,x2^2 + x0\,x1^2\,x2^2 + x1^3\,x2^2 + a2\,x2^3 + x0^2\,x2^3 + x0\,x1\,x2^3 + x1^2\,x2^3 + x0\,x2^4 + x1\,x2^4 + x2^5,$
$a4 + a3\,x0 + a2\,x0^2 + x0^4 + a3\,x1 + a2\,x0\,x1 + x0^3\,x1 + a2\,x1^2 + x0^2\,x1^2 + x0\,x1^3 + x1^4 + a3\,x2 +$
$a2\,x0\,x2 + x0^3\,x2 + a2\,x1\,x2 + x0^2\,x1\,x2 + x0\,x1^2\,x2 + x1^3\,x2 + a2\,x2^2 + x0^2\,x2^2 + x0\,x1\,x2^2 +$
$x1^2\,x2^2 + x0\,x2^3 + x1\,x2^3 + x2^4 + a3\,x3 + a2\,x0\,x3 + x0^3\,x3 + a2\,x1\,x3 + x0^2\,x1\,x3 + x0\,x1^2\,x3 +$
$x1^3\,x3 + a2\,x2\,x3 + x0^2\,x2\,x3 + x0\,x1\,x2\,x3 + x1^2\,x2\,x3 + x0\,x2^2\,x3 + x1\,x2^2\,x3 + x2^3\,x3 + a2\,x3^2 +$
$x0^2\,x3^2 + x0\,x1\,x3^2 + x1^2\,x3^2 + x0\,x2\,x3^2 + x1\,x2\,x3^2 + x2^2\,x3^2 + x0\,x3^3 + x1\,x3^3 + x2\,x3^3 + x3^4,$
$a3 + a2\,x0 + x0^3 + a2\,x1 + x0^2\,x1 + x0\,x1^2 + x1^3 + a2\,x2 + x0^2\,x2 + x0\,x1\,x2 + x1^2\,x2 +$
$x0\,x2^2 + x1\,x2^2 + x2^3 + a2\,x3 + x0^2\,x3 + x0\,x1\,x3 + x1^2\,x3 + x0\,x2\,x3 + x1\,x2\,x3 + x2^2\,x3 +$
$x0\,x3^2 + x1\,x3^2 + x2\,x3^2 + x3^3 + a2\,x4 + x0^2\,x4 + x0\,x1\,x4 + x1^2\,x4 + x0\,x2\,x4 + x1\,x2\,x4 +$
$x2^2\,x4 + x0\,x3\,x4 + x1\,x3\,x4 + x2\,x3\,x4 + x3^2\,x4 + x0\,x4^2 + x1\,x4^2 + x2\,x4^2 + x3\,x4^2 + x4^3,$
$a2 + x0^2 + x0\,x1 + x1^2 + x0\,x2 + x1\,x2 + x2^2 + x0\,x3 + x1\,x3 + x2\,x3 + x3^2 + x0\,x4 + x1\,x4 + x2\,x4 +$
$x3\,x4 + x4^2 + x0\,x5 + x1\,x5 + x2\,x5 + x3\,x5 + x4\,x5 + x5^2,\ x0 + x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6\}$

【コメント】「base」は 基本対称式 s_kに a_k という名前を付けただけです. (k=2,..,5) 例えば次と同じ使い方です.
「問」**$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ を $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$, $x_1 x_2 x_3$ を用いて表せ**
「解答」

```
grb = GroebnerBasis[
        {x1 + x2 + x3 - p, x1 x2 + x2 x3 + x3 x1 - q, x1 x2 x3 - r}, {x3, x2, x1, p, q, r}]
```

$\{-r + q\,x1 - p\,x1^2 + x1^3,\ q - p\,x1 + x1^2 - p\,x2 + x1\,x2 + x2^2,\ -p + x1 + x2 + x3\}$

```
PolynomialReduce[x1^3 + x2^3 + x3^3, grb, {x3, x2, x1, p, q, r}]
```

$\{\{3,\ 2p - 2x1 + x2 + x3,\ p^2 - q - p\,x1 - p\,x2 + x1\,x2 + p\,x3 - x1\,x3 - x2\,x3 + x3^2\},$
$p^3 - 3pq + 3r\}$

第2要素は 「$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 =$
$(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) + 3\,x_1 x_2 x_3$」を表します.

§4　公式（♯）の証明 その2

§4 – 1 $rmix_2 = r_1 r_6 + r_2 r_5 + r_4 r_3$ の簡約（以下，rmixの添え数字は次数です）

これは r_k を x_0~ x_6 の式に直し，base による「簡約」だけで求まります．なおMathematicaでは「簡約」は「PolynomialReduce」を使います．

In[∘]:=

PolynomialReduce[*poly*, {*poly*$_1$, *poly*$_2$, …}, {x_1, x_2, …}]
poly$_i$ によって *poly* を簡約したリストを返す．求まるリストは {{a_1, a_2, …}, b} の形であり，b は最小で，*poly* は a_1 *poly*$_1$ + a_2 *poly*$_2$ + … + b に等しい．

In[∘]:=

```
[例] f = x^3 + y^3;
p = {x^2 - y^2 - 1, x + 2 y - 7};
PolynomialReduce[f, p, {x, y}]
```

$\{\{x, 1 + y^2\}, 7 - 2 y + 7 y^2 - y^3\}$

まずは $rmix_2$ を x_0~ x_6 の式で表して「$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^6 = 0$」と「$\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 = (-1 + \sqrt{-7})/2$」を使って簡単にします．

In[3434]:=

```
{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} = lagrange.vars;
```

In[3435]:=

```
rmix2 = PolynomialMod[(r1 r6 + r2 r5 + r4 r3), Cyclotomic[7, ξ]]
```

Out[3435]=

$3 x0^2 - x0\,x1 + 3 x1^2 - x0\,x2 - x1\,x2 + 3 x2^2 - x0\,x3 - x1\,x3 - x2\,x3 + 3 x3^2 - x0\,x4 - x1\,x4 - x2\,x4 - x3\,x4 + 3 x4^2 - x0\,x5 - x1\,x5 - x2\,x5 - x3\,x5 - x4\,x5 + 3 x5^2 - x0\,x6 - x1\,x6 - x2\,x6 - x3\,x6 - x4\,x6 - x5\,x6 + 3 x6^2$

次に base を使って，$rmix_2$ を簡約します．

In[3436]:=

```
PolynomialReduce[rmix2, base, vars]
```

Out[3436]=

$\{\{0, 0, 0, 0, 0, 3, -4 x1 - 4 x2 - 4 x3 - 4 x4 - 4 x5 - x6\}, -3 a2 + 4 x1^2 + 4 x1\,x2 + 4 x2^2 + 4 x1\,x3 + 4 x2\,x3 + 4 x3^2 + 4 x1\,x4 + 4 x2\,x4 + 4 x3\,x4 + 4 x4^2 + 4 x1\,x5 + 4 x2\,x5 + 4 x3\,x5 + 4 x4\,x5 + 4 x5^2 + 4 x1\,x6 + 4 x2\,x6 + 4 x3\,x6 + 4 x4\,x6 + 4 x5\,x6 + 4 x6^2\}$

これは「rmix2 = (0, 0, 0, 7, -4 x0 - ⋯ + 3 x6)·base」+ (-7 a2) を表しますが，a2, a3, .. は単なる名前なので，baseは零ベクトルです．故に「rmix2 = (簡約した余り) = -7 a2」となります．

§4 − 2 $\mathrm{rmix}_3 = r_4^{\,2}\, r_6 + r_1^{\,2}\, r_5 + r_2^{\,2}\, r_3$ の簡約

まず rmix_3 を x_0~ x_6 の式で表して「$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^6 = 0$」と「$\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 = (-1+\sqrt{-7})/2$」を使って簡単にします.

In[3437]:=

```
rmix3 =
 (PolynomialMod[r4^2 r6 + r1^2 r5  + r2^2 r3, Cyclotomic[7, ξ]] // Collect[#, ξ] &) /.
   {ξ^4 → -ξ - ξ^2 + 1 / 2 (-1 + Sqrt[-7])} // Simplify
```

Out[3437]=

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(6\,x0^3 + 6\,x1^3 + 6\,x2^3 - 3\,x2^2\,x3 + i\sqrt{7}\,x2^2\,x3 - 3\,x2\,x3^2 - i\sqrt{7}\,x2\,x3^2 + 6\,x3^3 - 3\,x2^2\,x4 + i\sqrt{7}\,x2^2\,x4 + \\
&\quad 8\,x2\,x3\,x4 - 3\,x3^2\,x4 + i\sqrt{7}\,x3^2\,x4 - 3\,x2\,x4^2 - i\sqrt{7}\,x2\,x4^2 - 3\,x3\,x4^2 - i\sqrt{7}\,x3\,x4^2 + 6\,x4^3 - \\
&\quad 3\,x2^2\,x5 - i\sqrt{7}\,x2^2\,x5 - 6\,x2\,x3\,x5 + 6\,i\sqrt{7}\,x2\,x3\,x5 - 3\,x3^2\,x5 + i\sqrt{7}\,x3^2\,x5 - 6\,x2\,x4\,x5 - \\
&\quad 6\,i\sqrt{7}\,x2\,x4\,x5 + 8\,x3\,x4\,x5 - 3\,x4^2\,x5 + i\sqrt{7}\,x4^2\,x5 - 3\,x2\,x5^2 + i\sqrt{7}\,x2\,x5^2 - 3\,x3\,x5^2 - \\
&\quad i\sqrt{7}\,x3\,x5^2 - 3\,x4\,x5^2 - i\sqrt{7}\,x4\,x5^2 + 6\,x5^3 - 3\,x2^2\,x6 + i\sqrt{7}\,x2^2\,x6 + 8\,x2\,x3\,x6 - 3\,x3^2\,x6 - \\
&\quad i\sqrt{7}\,x3^2\,x6 + 8\,x2\,x4\,x6 - 6\,x3\,x4\,x6 + 6\,i\sqrt{7}\,x3\,x4\,x6 - 3\,x4^2\,x6 + i\sqrt{7}\,x4^2\,x6 + 8\,x2\,x5\,x6 - \\
&\quad 6\,x3\,x5\,x6 - 6\,i\sqrt{7}\,x3\,x5\,x6 + 8\,x4\,x5\,x6 - 3\,x5^2\,x6 + i\sqrt{7}\,x5^2\,x6 - 3\,x2\,x6^2 - i\sqrt{7}\,x2\,x6^2 - \\
&\quad 3\,x3\,x6^2 + i\sqrt{7}\,x3\,x6^2 - 3\,x4\,x6^2 - i\sqrt{7}\,x4\,x6^2 - 3\,x5\,x6^2 - i\sqrt{7}\,x5\,x6^2 + 6\,x6^3 + i\,x0^2 \\
&\qquad \Big(\big(3\,i + \sqrt{7}\big)\,x1 + \big(3\,i + \sqrt{7}\big)\,x2 + 3\,i\,x3 - \sqrt{7}\,x3 + 3\,i\,x4 + \sqrt{7}\,x4 + 3\,i\,x5 - \sqrt{7}\,x5 + 3\,i\,x6 - \sqrt{7}\,x6\Big) + \\
&\quad i\,x1^2\,\Big(\big(3\,i + \sqrt{7}\big)\,x2 + \big(3\,i + \sqrt{7}\big)\,x3 + 3\,i\,x4 - \sqrt{7}\,x4 + 3\,i\,x5 + \sqrt{7}\,x5 + 3\,i\,x6 - \sqrt{7}\,x6\Big) + \\
&\quad x1\,\Big(\big(-3 - i\sqrt{7}\big)\,x2^2 + \big(-3 - i\sqrt{7}\big)\,x3^2 + \big(-6 - 6\,i\sqrt{7}\big)\,x3\,x4 - 3\,x4^2 + i\sqrt{7}\,x4^2 + \\
&\qquad 8\,x4\,x5 - 3\,x5^2 - i\sqrt{7}\,x5^2 + 8\,x4\,x6 - 6\,x5\,x6 + 6\,i\sqrt{7}\,x5\,x6 - 3\,x6^2 + i\sqrt{7}\,x6^2 + \\
&\qquad 8\,x3\,(x5 + x6) + x2\,\big(8\,x3 - 6\,x4 + 6\,i\sqrt{7}\,x4 + 8\,x5 - 6\,x6 - 6\,i\sqrt{7}\,x6\big)\Big) + \\
&\quad x0\,\Big(\big(-3 - i\sqrt{7}\big)\,x1^2 + \big(-3 - i\sqrt{7}\big)\,x2^2 - 3\,x3^2 + i\sqrt{7}\,x3^2 + 8\,x3\,x4 - 3\,x4^2 - i\sqrt{7}\,x4^2 + \\
&\qquad 8\,x3\,x5 - 6\,x4\,x5 + 6\,i\sqrt{7}\,x4\,x5 - 3\,x5^2 + i\sqrt{7}\,x5^2 + 8\,x3\,x6 - 6\,x4\,x6 - 6\,i\sqrt{7}\,x4\,x6 + \\
&\qquad 8\,x5\,x6 - 3\,x6^2 + i\sqrt{7}\,x6^2 + x1\,\big(8\,x2 - 6\,x3 + 6\,i\sqrt{7}\,x3 + 8\,x4 - 6\,x5 - 6\,i\sqrt{7}\,x5 + 8\,x6\big) + \\
&\qquad x2\,\big(-6\,x3 - 6\,i\sqrt{7}\,x3 + 8\,x4 + 8\,x5 - 6\,x6 + 6\,i\sqrt{7}\,x6\big)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

これは base で簡約しても簡単になりません. 原論文では次の様になっています. (G = base)

> For the first invariant F1, we compute its normal NF
> (F1) form by G.If it belongs to a basis of the free module of
> invariants (i.e.its leading term depends only on the x_i),
> we introduce a new indeterminate f1 and the polynomial
> P1 := NF (F1) − f1.From now on,
> the normal form procedure is modified and consists in reducing first by G,
> then by P1, . . .,
> a polynomial being reducible by some Pi only if its leading term is the product
> of the leading term of Pi by a monomial which is independent of the x_i.

これに従うと, 次の様になると思います. (残念ながら原論文では式の形では述べられていません. 上の説明文のみなので確信はありません.) 先ず rmix3, b3, c3, dp3, dm3 を base で簡約した余りを求め, それぞれ先頭を大文字にした名を与えます.

In[3438]:=

```
{Rmix3, B3, C3, Dp3, Dm3} =
 PolynomialReduce[#, base, {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5}][[2]] & /@
  {rmix3, b3, c3, dp3, dm3}
```

Out[3438]=

$$\begin{aligned}
&\Big\{-\frac{1}{2}\, i \\
&(-35\, i\, a3 + \sqrt{7}\, a3 + 2\sqrt{7}\, a2\, x0 - 14\, i\, a2\, x1 - 6\sqrt{7}\, a2\, x1 - 14\, i\, x0^2\, x1 - 10\sqrt{7}\, x0^2\, x1 - 14\, i\, x0\, x1^2 - 8\sqrt{7}\, x0\, x1^2 - 14\, i\, x1^3 - \\
&8\sqrt{7}\, x1^3 + 14\, i\, x0^2\, x2 + 4\sqrt{7}\, x0^2\, x2 + 14\, i\, x0\, x1\, x2 - 8\sqrt{7}\, x0\, x1\, x2 - 16\sqrt{7}\, x1^2\, x2 + 14\, i\, x0\, x2^2 + 10\sqrt{7}\, x0\, x2^2 - \\
&10\sqrt{7}\, x1\, x2^2 + 2\sqrt{7}\, x2^3 - 14\, i\, a2\, x3 + 6\sqrt{7}\, a2\, x3 - 14\, i\, x0^2\, x3 + 4\sqrt{7}\, x0^2\, x3 - 42\, i\, x0\, x1\, x3 - 12\sqrt{7}\, x0\, x1\, x3 - \\
&28\, i\, x1^2\, x3 - 6\sqrt{7}\, x1^2\, x3 - 14\, i\, x0\, x2\, x3 + 16\sqrt{7}\, x0\, x2\, x3 - 14\, i\, x1\, x2\, x3 - 10\sqrt{7}\, x1\, x2\, x3 - 14\, i\, x2^2\, x3 + \\
&6\sqrt{7}\, x2^2\, x3 - 14\, i\, x0\, x3^2 + 2\sqrt{7}\, x0\, x3^2 - 28\, i\, x1\, x3^2 - 4\sqrt{7}\, x1\, x3^2 - 14\, i\, x2\, x3^2 + 4\sqrt{7}\, x2\, x3^2 - 14\, i\, x3^3 + \\
&4\sqrt{7}\, x3^3 - 2\sqrt{7}\, a2\, x4 + 14\, i\, x0^2\, x4 - 10\sqrt{7}\, x0^2\, x4 - 16\sqrt{7}\, x0\, x1\, x4 - 14\, i\, x1^2\, x4 - 10\sqrt{7}\, x1^2\, x4 + 28\, i\, x0\, x2\, x4 - \\
&14\, i\, x1\, x2\, x4 - 20\sqrt{7}\, x1\, x2\, x4 + 14\, i\, x0\, x3\, x4 + 2\sqrt{7}\, x0\, x3\, x4 - 28\, i\, x1\, x3\, x4 + 6\sqrt{7}\, x1\, x3\, x4 + 10\sqrt{7}\, x2\, x3\, x4 + \\
&6\sqrt{7}\, x3^2\, x4 + 14\, i\, x0\, x4^2 - 4\sqrt{7}\, x0\, x4^2 - 14\, i\, x1\, x4^2 - 8\sqrt{7}\, x1\, x4^2 + 2\sqrt{7}\, x2\, x4^2 + 12\sqrt{7}\, x3\, x4^2 - 2\sqrt{7}\, a2\, x5 - \\
&2\sqrt{7}\, x0^2\, x5 - 14\, i\, x0\, x1\, x5 + 2\sqrt{7}\, x0\, x1\, x5 - 6\sqrt{7}\, x1^2\, x5 + 14\, i\, x0\, x2\, x5 + 6\sqrt{7}\, x0\, x2\, x5 + 14\, i\, x1\, x2\, x5 - \\
&8\sqrt{7}\, x1\, x2\, x5 + 2\sqrt{7}\, x2^2\, x5 - 4\sqrt{7}\, x0\, x3\, x5 - 6\sqrt{7}\, x1\, x3\, x5 - 14\, i\, x2\, x3\, x5 - 8\sqrt{7}\, x2\, x3\, x5 - 6\sqrt{7}\, x3^2\, x5 - \\
&14\sqrt{7}\, x0\, x4\, x5 - 4\sqrt{7}\, x1\, x4\, x5 - 14\, i\, x2\, x4\, x5 + 6\sqrt{7}\, x2\, x4\, x5 + 14\, i\, x3\, x4\, x5 + 2\sqrt{7}\, x3\, x4\, x5 - 2\sqrt{7}\, x4^2\, x5), \\
&(49 + 7\, i\sqrt{7})\, a3 + 14\, i\sqrt{7}\, a2\, x0 + (-49 + 7\, i\sqrt{7})\, a2\, x1 + (-49 - 21\, i\sqrt{7})\, x0^2\, x1 + \\
&(-49 - 7\, i\sqrt{7})\, x0\, x1^2 + (-49 - 7\, i\sqrt{7})\, x1^3 + (49 - 21\, i\sqrt{7})\, x0^2\, x2 + \\
&(49 - 7\, i\sqrt{7})\, x0\, x1\, x2 - 14\, i\sqrt{7}\, x1^2\, x2 + (49 + 21\, i\sqrt{7})\, x0\, x2^2 + \\
&28\, i\sqrt{7}\, x1\, x2^2 + 14\, i\sqrt{7}\, x2^3 + (-49 - 7\, i\sqrt{7})\, a2\, x3 + (-49 - 21\, i\sqrt{7})\, x0^2\, x3 + \\
&(-147 - 35\, i\sqrt{7})\, x0\, x1\, x3 + (-98 - 42\, i\sqrt{7})\, x1^2\, x3 + (-49 - 35\, i\sqrt{7})\, x0\, x2\, x3 + \\
&(-49 - 21\, i\sqrt{7})\, x1\, x2\, x3 + (-49 - 7\, i\sqrt{7})\, x2^2\, x3 + (-49 - 35\, i\sqrt{7})\, x0\, x3^2 + \\
&(-98 - 28\, i\sqrt{7})\, x1\, x3^2 + (-49 - 21\, i\sqrt{7})\, x2\, x3^2 + (-49 - 21\, i\sqrt{7})\, x3^3 - 14\, i\sqrt{7}\, a2\, x4 + \\
&(49 - 21\, i\sqrt{7})\, x0^2\, x4 - 14\, i\sqrt{7}\, x0\, x1\, x4 + (-49 - 21\, i\sqrt{7})\, x1^2\, x4 + 98\, x0\, x2\, x4 + \\
&(-49 + 7\, i\sqrt{7})\, x1\, x2\, x4 + (49 - 35\, i\sqrt{7})\, x0\, x3\, x4 + (-98 - 56\, i\sqrt{7})\, x1\, x3\, x4 - \\
&28\, i\sqrt{7}\, x2\, x3\, x4 - 56\, i\sqrt{7}\, x3^2\, x4 + (49 + 21\, i\sqrt{7})\, x0\, x4^2 + (-49 - 7\, i\sqrt{7})\, x1\, x4^2 + \\
&14\, i\sqrt{7}\, x2\, x4^2 - 14\, i\sqrt{7}\, x3\, x4^2 - 14\, i\sqrt{7}\, a2\, x5 - 14\, i\sqrt{7}\, x0^2\, x5 + (-49 - 35\, i\sqrt{7})\, x0\, x1\, x5 - \\
&42\, i\sqrt{7}\, x1^2\, x5 + (49 - 7\, i\sqrt{7})\, x0\, x2\, x5 + (49 - 7\, i\sqrt{7})\, x1\, x2\, x5 + 14\, i\sqrt{7}\, x2^2\, x5 - \\
&28\, i\sqrt{7}\, x0\, x3\, x5 - 42\, i\sqrt{7}\, x1\, x3\, x5 + (-49 - 7\, i\sqrt{7})\, x2\, x3\, x5 - 42\, i\sqrt{7}\, x3^2\, x5 - \\
&28\, i\sqrt{7}\, x1\, x4\, x5 + (-49 - 7\, i\sqrt{7})\, x2\, x4\, x5 + (49 - 35\, i\sqrt{7})\, x3\, x4\, x5 - 14\, i\sqrt{7}\, x4^2\, x5, \\
&(49 - 7\, i\sqrt{7})\, a3 - 14\, i\sqrt{7}\, a2\, x0 + (-49 - 7\, i\sqrt{7})\, a2\, x1 + (-49 + 21\, i\sqrt{7})\, x0^2\, x1 + (-49 + 7\, i\sqrt{7})\, x0\, x1^2 + \\
&(-49 + 7\, i\sqrt{7})\, x1^3 + (49 + 21\, i\sqrt{7})\, x0^2\, x2 + (49 + 7\, i\sqrt{7})\, x0\, x1\, x2 + 14\, i\sqrt{7}\, x1^2\, x2 + \\
&(49 - 21\, i\sqrt{7})\, x0\, x2^2 - 28\, i\sqrt{7}\, x1\, x2^2 - 14\, i\sqrt{7}\, x2^3 + (-49 + 7\, i\sqrt{7})\, a2\, x3 + (-49 + 21\, i\sqrt{7})\, x0^2\, x3 + \\
&(-147 + 35\, i\sqrt{7})\, x0\, x1\, x3 + (-98 + 42\, i\sqrt{7})\, x1^2\, x3 + (-49 + 35\, i\sqrt{7})\, x0\, x2\, x3 + (-49 + 21\, i\sqrt{7})\, x1\, x2\, x3 + \\
&(-49 + 7\, i\sqrt{7})\, x2^2\, x3 + (-49 + 35\, i\sqrt{7})\, x0\, x3^2 + (-98 + 28\, i\sqrt{7})\, x1\, x3^2 + (-49 + 21\, i\sqrt{7})\, x2\, x3^2 + \\
&(-49 + 21\, i\sqrt{7})\, x3^3 + 14\, i\sqrt{7}\, a2\, x4 + (49 + 21\, i\sqrt{7})\, x0^2\, x4 + 14\, i\sqrt{7}\, x0\, x1\, x4 + (-49 + 21\, i\sqrt{7})\, x1^2\, x4 + \\
&98\, x0\, x2\, x4 + (-49 - 7\, i\sqrt{7})\, x1\, x2\, x4 + (49 + 35\, i\sqrt{7})\, x0\, x3\, x4 + (-98 + 56\, i\sqrt{7})\, x1\, x3\, x4 + 28\, i\sqrt{7}\, x2\, x3\, x4 + \\
&56\, i\sqrt{7}\, x3^2\, x4 + (49 - 21\, i\sqrt{7})\, x0\, x4^2 + (-49 + 7\, i\sqrt{7})\, x1\, x4^2 - 14\, i\sqrt{7}\, x2\, x4^2 + 14\, i\sqrt{7}\, x3\, x4^2 + \\
&14\, i\sqrt{7}\, a2\, x5 + 14\, i\sqrt{7}\, x0^2\, x5 + (-49 + 35\, i\sqrt{7})\, x0\, x1\, x5 + 42\, i\sqrt{7}\, x1^2\, x5 + (49 + 7\, i\sqrt{7})\, x0\, x2\, x5 + \\
&(49 + 7\, i\sqrt{7})\, x1\, x2\, x5 - 14\, i\sqrt{7}\, x2^2\, x5 + 28\, i\sqrt{7}\, x0\, x3\, x5 + 42\, i\sqrt{7}\, x1\, x3\, x5 + (-49 + 7\, i\sqrt{7})\, x2\, x3\, x5 + \\
&42\, i\sqrt{7}\, x3^2\, x5 + 28\, i\sqrt{7}\, x1\, x4\, x5 + (-49 + 7\, i\sqrt{7})\, x2\, x4\, x5 + (49 + 35\, i\sqrt{7})\, x3\, x4\, x5 + 14\, i\sqrt{7}\, x4^2\, x5, \\
&-2\, a2\, x1 - 2\, x0^2\, x1 - 2\, x0\, x1^2 - 2\, x1^3 + 2\, x0^2\, x2 + 2\, x0\, x1\, x2 + 2\, x0\, x2^2 - 2\, a2\, x3 - 2\, x0^2\, x3 - 6\, x0\, x1\, x3 - 4\, x1^2\, x3 - \\
&2\, x0\, x2\, x3 - 2\, x1\, x2\, x3 - 2\, x2^2\, x3 - 2\, x0\, x3^2 - 4\, x1\, x3^2 - 2\, x2\, x3^2 - 2\, x3^3 + 2\, x0^2\, x4 - 2\, x1^2\, x4 + 4\, x0\, x2\, x4 - 2\, x1\, x2\, x4 + \\
&2\, x0\, x3\, x4 - 4\, x1\, x3\, x4 + 2\, x0\, x4^2 - 2\, x1\, x4^2 - 2\, x0\, x1\, x5 + 2\, x0\, x2\, x5 + 2\, x1\, x2\, x5 - 2\, x2\, x3\, x5 - 2\, x2\, x4\, x5 + 2\, x3\, x4\, x5, \\
&-2\, i\sqrt{7}\, a2\, x1 - 2\, i\sqrt{7}\, x0^2\, x1 - 2\, i\sqrt{7}\, x0\, x1^2 - 2\, i\sqrt{7}\, x1^3 + 2\, i\sqrt{7}\, x0^2\, x2 - 2\, i\sqrt{7}\, x0\, x1\, x2 - \\
&4\, i\sqrt{7}\, x1^2\, x2 + 2\, i\sqrt{7}\, x0\, x2^2 - 4\, i\sqrt{7}\, x1\, x2^2 + 2\, i\sqrt{7}\, a2\, x3 + 2\, i\sqrt{7}\, x0^2\, x3 - 2\, i\sqrt{7}\, x0\, x1\, x3 + \\
&6\, i\sqrt{7}\, x0\, x2\, x3 - 2\, i\sqrt{7}\, x1\, x2\, x3 + 2\, i\sqrt{7}\, x2^2\, x3 + 2\, i\sqrt{7}\, x0\, x3^2 + 2\, i\sqrt{7}\, x2\, x3^2 + 2\, i\sqrt{7}\, x3^3 - \\
&2\, i\sqrt{7}\, x0^2\, x4 - 4\, i\sqrt{7}\, x0\, x1\, x4 - 2\, i\sqrt{7}\, x1^2\, x4 - 6\, i\sqrt{7}\, x1\, x2\, x4 + 2\, i\sqrt{7}\, x0\, x3\, x4 + 4\, i\sqrt{7}\, x1\, x3\, x4 + \\
&4\, i\sqrt{7}\, x2\, x3\, x4 + 4\, i\sqrt{7}\, x3^2\, x4 - 2\, i\sqrt{7}\, x0\, x4^2 - 2\, i\sqrt{7}\, x1\, x4^2 + 4\, i\sqrt{7}\, x3\, x4^2 + 2\, i\sqrt{7}\, x0\, x1\, x5 + \\
&2\, i\sqrt{7}\, x0\, x2\, x5 - 2\, i\sqrt{7}\, x1\, x2\, x5 - 2\, i\sqrt{7}\, x2\, x3\, x5 - 4\, i\sqrt{7}\, x0\, x4\, x5 + 2\, i\sqrt{7}\, x2\, x4\, x5 + 2\, i\sqrt{7}\, x3\, x4\, x5\Big\}
\end{aligned}$$

まずB3のLT(Leading Term)は x_i の式なので, B3は独立変数です．よって　Dp3を(B3-m1)で簡約します .
(m1はB3の名前で 不定変数(indeterminate))

In[3439]:=

```
DDp3 =
 PolynomialReduce[Dp3, B3 - m1, {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5, a6, a7}][[2]]
```

Out[3439]=

$$-2\,a2\,x1-2\,x0^2\,x1-2\,x0\,x1^2-2\,x1^3+2\,x0^2\,x2+2\,x0\,x1\,x2+2\,x0\,x2^2-2\,a2\,x3-2\,x0^2\,x3-6\,x0\,x1\,x3-4\,x1^2\,x3-2\,x0\,x2\,x3-2\,x1\,x2\,x3-2\,x2^2\,x3-2\,x0\,x3^2-4\,x1\,x3^2-2\,x2\,x3^2-2\,x3^3+2\,x0^2\,x4-2\,x1^2\,x4+4\,x0\,x2\,x4-2\,x1\,x2\,x4+2\,x0\,x3\,x4-4\,x1\,x3\,x4+2\,x0\,x4^2-2\,x1\,x4^2-2\,x0\,x1\,x5+2\,x0\,x2\,x5+2\,x1\,x2\,x5-2\,x2\,x3\,x5-2\,x2\,x4\,x5+2\,x3\,x4\,x5$$

DDp3のLTは x_i の式なので, 独立変数です. よって Dm3を{B3 - m1, DDp3 - m2}で簡約します . (m2はDp3の名前で 不定変数) .

In[3440]:=

```
DDm3 = PolynomialReduce[Dm3, {B3 - m1, DDp3 - m2},
   {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5, a6, a7}][[2]]
```

Out[3440]=

$$i\sqrt{7}\,m2-4\,i\sqrt{7}\,x0\,x1\,x2-4\,i\sqrt{7}\,x1^2\,x2-4\,i\sqrt{7}\,x1\,x2^2+4\,i\sqrt{7}\,a2\,x3+4\,i\sqrt{7}\,x0^2\,x3+4\,i\sqrt{7}\,x0\,x1\,x3+4\,i\sqrt{7}\,x1^2\,x3+8\,i\sqrt{7}\,x0\,x2\,x3+4\,i\sqrt{7}\,x2^2\,x3+4\,i\sqrt{7}\,x0\,x3^2+4\,i\sqrt{7}\,x1\,x3^2+4\,i\sqrt{7}\,x2\,x3^2+4\,i\sqrt{7}\,x3^3-4\,i\sqrt{7}\,x0^2\,x4-4\,i\sqrt{7}\,x0\,x1\,x4-4\,i\sqrt{7}\,x0\,x2\,x4-4\,i\sqrt{7}\,x1\,x2\,x4+8\,i\sqrt{7}\,x1\,x3\,x4+4\,i\sqrt{7}\,x2\,x3\,x4+4\,i\sqrt{7}\,x3^2\,x4-4\,i\sqrt{7}\,x0\,x4^2+4\,i\sqrt{7}\,x3\,x4^2+4\,i\sqrt{7}\,x0\,x1\,x5-4\,i\sqrt{7}\,x1\,x2\,x5-4\,i\sqrt{7}\,x0\,x4\,x5+4\,i\sqrt{7}\,x2\,x4\,x5$$

DDm3のLTは x_i の式なので, 独立変数です. よって最後に Rmix3 を {B3 - m1, DDp3 - m2, DDm3-m3}で簡約します . (m3はDm3の名前で 不定変数) .

In[3441]:=

```
RRmix3 = PolynomialReduce[Rmix3, {B3 - m1, DDp3 - m2, DDm3 - m3},
    {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5, a6, a7}][[2]] // Expand
```

Out[3441]=

$$-14\,a3-\frac{m1}{14}+\frac{21\,m2}{4}-\frac{7\,m3}{4}$$

m1, m2, m3はそれぞれ B3, DDp3,
DDm3 の「名前」なので {B3 − m1, DDp3 − m2, DDm3 − m3} は零ベクトルです.
よって Rmix3 を簡約した余りのみ考えて, 「$\mathrm{rmix3} = -14\,a3-\frac{b3}{14}+\frac{21\,dp3}{4}-\frac{7\,dm3}{4}$」となります.

以上の操作を自動化したプログラムが次の「relation」です.
relation[{v1, v2, v3, ⋯, v_n}] で v_n を $v_1 \sim v_{n-1}$ の式で表します.
ただし v_i の名前は m_i で,
また $v_1 \sim v_{n-1}$ は独立でv_n が $v_1 \sim v_{n-1}$ の生成するイデアルに入っている事が必要です.

In[3442]:=

```
relation[polys_List]:=Module[{vars,list,nbase,new,k},
vars={x6,x5,x4,x3,x2,x1,x0,A2,A3,A4,A5,A6,A7};
list=Simplify[PolynomialReduce[#,base,vars][[2]]&/@polys];
k=1;
nbase={list[[1]]-m1};
Do[k++;new=Simplify[PolynomialReduce[list[[k]],nbase,vars][[2]]];AppendTo[nbase,new-ToExpression[
Expand@Simplify[PolynomialReduce[Last[list],nbase,vars][[2]]]]
```

rmix3を 独立変数の集合 {dm3, dp3, b3} で表すときは, 例えば 次の様に入力します. 結果は上の

RRmix3 と一致します.

In[3443]:=

```
relation[{dm3, dp3, b3, rmix3}]
```

Out[3443]=

$$-14\,a3-\frac{7\,m1}{4}+\frac{21\,m2}{4}-\frac{m3}{14}$$

【コメント1】ここで 例えば B3とDp3の間にC3 も考えると次の様になります.

```
CC3 =
 PolynomialReduce[C3, B3 - m1, {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5, a6, a7}] [[2]]
```

$$98\,a3-m1-98\,a2\,x1-98\,x0^2\,x1-98\,x0\,x1^2-98\,x1^3+98\,x0^2\,x2+98\,x0\,x1\,x2+98\,x0\,x2^2-98\,a2\,x3-98\,x0^2\,x3-294\,x0\,x1\,x3-196\,x1^2\,x3-98\,x0\,x2\,x3-98\,x1\,x2\,x3-98\,x2^2\,x3-98\,x0\,x3^2-196\,x1\,x3^2-98\,x2\,x3^2-98\,x3^3+98\,x0^2\,x4-98\,x1^2\,x4+196\,x0\,x2\,x4-98\,x1\,x2\,x4+98\,x0\,x3\,x4-196\,x1\,x3\,x4+98\,x0\,x4^2-98\,x1\,x4^2-98\,x0\,x1\,x5+98\,x0\,x2\,x5+98\,x1\,x2\,x5-98\,x2\,x3\,x5-98\,x2\,x4\,x5+98\,x3\,x4\,x5$$

```
DDp3 = PolynomialReduce[Dp3, {B3 - m1, CC3 - m2},
   {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5, a6, a7}] [[2]]
```

$\rightarrow\ -2\,a3+\frac{m1+m2}{49}$

DDp3 のLTは x_i の式でないから, Dp3は独立変数でありません.
上の式は「dp3 = −2 a3 + 1 / 49 (b3 + c3)」を表します.

【コメント2】グレブナー基底を使った計算では, 時々ミスをするので, 直接計算して確かめました.

```
rmix3 - (14 s3 - b3 / 14 + 21 / 4 dp3 - 7 / 4 dm3) // Factor
```

$$\frac{5}{2}\,(x0+x1+x2+x3+x4+x5+x6)\,\left(5\,x0^2+24\,x0\,x1+5\,x1^2+24\,x0\,x2+24\,x1\,x2+5\,x2^2+24\,x0\,x3+24\,x1\,x3+24\,x2\,x3+5\,x3^2+24\,x0\,x4+24\,x1\,x4+24\,x2\,x4+24\,x3\,x4+5\,x4^2+24\,x0\,x5+24\,x1\,x5+24\,x2\,x5+24\,x3\,x5+24\,x4\,x5+5\,x5^2+24\,x0\,x6+24\,x1\,x6+24\,x2\,x6+24\,x3\,x6+24\,x4\,x6+24\,x5\,x6+5\,x6^2\right)$$

「x0 + x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 = 0」と仮定しているので,
確かに「rmix3 = −14 a3 − b3 / 14 + 21 / 4 dp3 − 7 / 4 dm3」です. (a3 = −s3です.)

【コメント3】「グレブナー基底の威力」と「使いこなしの難しさ」の両方を感じました. 実は私は長い間 著者の真意がわからず, 結果の式だけを見て「rmix3 を a3 ,b3, dp3, dm3 で表すのだから, a3 ,b3, dp3, dm3 のグレブナー基底Gを作って, rmix3を Gで簡約すれば良いのでは?」と思っていました. しかしグレブナー基底が何日経っても計算できません. そこで著者のやり方をできる限り真似しようと考え, そのやり方を詳しく見てみると, 例えば3次の同次式の不変式の関係を求めるのに, 全次数の基本対称式のグレブナー基底からスタートしています. 更に「H={B3 - m1, DDp3 - m2, DDm3 - m3}などはグレブナー基底ではないので, Hで簡約しても一意に決まらないはず. よってHのグレブナー基底を求めてから簡約しないといけない」と思っていましたが, どうやら簡約した結果が x_i を含まないときは, 順序を変えても, 一意に決

まるみたいです．例えば 次の結果も RRmix3 と一致します.しかし実行時間は異なります．例えば下の計算は 0.7秒です．{dm3, dp3, b3, rmix3}では 0.2秒でした.

relation[{b3, dp3, dm3, rmix3}]→ $-14\,a3-\frac{7\,m1}{4}+\frac{21\,m2}{4}-\frac{m3}{14}$

グレブナー基底は本当に奥が深いです.

§4 − 3 $rmix_4 = r_4\, r_2{}^2\, r_6 + r_1\, r_4{}^2\, r_5 + r_2\, r_1{}^2\, r_3$ の簡約

b4, c4, dp4 dm4 が独立であることを認めると，簡単に簡約できます.

In[3444]:=

```
rmix4 = (PolynomialMod[r4 r2^2 r6 + r1 r4^2 r5 + r2 r1^2 r3, Cyclotomic[7, ξ]]) /.
    {ξ^4 → -ξ - ξ^2 + 1 / 2 (-1 + Sqrt[-7])} // Simplify;
relation[{b4, c4, dm4, dp4, rmix4}]
```

Out[3445]=

$$-\frac{98\,a4}{3}-\frac{m1}{42}+\frac{m2}{21}+\frac{49\,m3}{12}+\frac{49\,m4}{12}$$

これは「$rmix_4 = -\frac{98\,a_4}{3}-\frac{b_4}{42}+\frac{c_4}{21}+\frac{49\,d_4{}^+}{12}+\frac{49\,d_4{}^-}{12}$」を意味します.

§4 − 4 $rmix_5 = r_1{}^4\, r_3 + r_2{}^4\, r_6 + r_4{}^4\, r_5$ の簡約

これも b5, c5, b3 s2 , e5 , dp5, dm5 が独立であることを認めると，簡単に簡約できます．(以下の計算は 20秒ほど掛かります.)

In[3446]:=

```
rmix5 = (PolynomialMod[r1^4 r3 + r2^4 r6 + r4^4 r5, Cyclotomic[7, ξ]]) /.
    {ξ^4 → -ξ - ξ^2 + 1 / 2 (-1 + Sqrt[-7])} // Simplify;
```

In[3447]:=

```
relation[{b5, c5, b3 s2, e5, dp5, dm5, rmix5}]
```

Out[3447]=

$$-343\,a5-\frac{3\,m1}{14}+\frac{m2}{7}+m3+7\,m4-\frac{343\,m5}{4}-\frac{343\,m6}{4}$$

これは 「$rmix_5 = -343\,a_5-\frac{3\,b_5}{14}+\frac{c_5}{7}+b_3\,a_2+7\,e_5-\frac{343\,d_5{}^+}{4}-\frac{343\,d_5{}^-}{4}$ 」を表します.

私の計算ではこの様に c_5 の係数は 1 / 7 となりましたが,
原論文では（$-$1 / 7）となっていました. 以上から次の関係式が確かめられました.

(♯)

$$\begin{cases} r_1 r_6 + r_2 r_5 + r_4 r_3 = -7 a_2 & (16) \\ r_4^2 r_6 + r_1^2 r_5 + r_2^2 r_3 = -\frac{1}{14} b_3 + \frac{21}{4} d_3{}^+ - \frac{7}{4} d_3{}^- - 14 a_3 & (17) \\ r_4 r_2^2 r_6 + r_1 r_4^2 r_5 + r_2 r_1^2 r_3 = \frac{1}{21} c_4 - \frac{1}{42} b_4 + \frac{49}{12} d_4{}^+ + \frac{49}{12} d_4{}^- - \frac{98}{3} a_4 & (18) \\ r_1^4 r_3 + r_2^4 r_6 + r_4^4 r_5 = 7 e_5 + \frac{1}{7} c_5 - \frac{3}{14} b_5 - \frac{343 d_5{}^+}{4} - \frac{343 d_5{}^-}{4} + b_3 a_2 - 343 a_5 & (19) \end{cases}$$

上式の右辺を$k_1 \sim k_4$ と置くと, r_1, r_2, r_4 が決まっているときは,
次の r_3, r_5, r_6 に関する連立一次方程式となります.
左辺の行列matのrankが3以上ならば, r_3, r_5, r_6 が r_1 の式で表せます.

Out[3452]=

$$\begin{pmatrix} r1 & r2 & r4 \\ r4^2 & r1^2 & r2^2 \\ r2^2\, r4 & r1\, r4^2 & r1^2\, r2 \\ r2^4 & r4^4 & r1^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r6 \\ r5 \\ r3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \\ k4 \end{pmatrix}$$

§5 mat の行列式

(16), (17), (18) 式の左辺が作る行列matの行列式を det (16, 17, 18)
などと書くと， 以下の様になります. (原論文ではdet3の $b_4{}^2$の係数は $(-\frac{1}{49})$となっていました. ここは私の計算結果を載せました.)

$$\begin{cases} \text{det1} = \det(16, 17, 18) = -\frac{1}{7} b_6 - \frac{1}{49} b_3{}^2 & (20) \\ \text{det2} = \det(16, 17, 19) = -b_7 - \frac{4}{49} b_3 b_4 & (21) \\ \text{det3} = \det(16, 18, 19) = \frac{1}{49} b_4{}^2 - \frac{3}{196} b_3 b_5 & (22) \end{cases}$$

まず左辺をr_kの式で表します.

In[3453]:=

```
det1 = Det[mat[[{1, 2, 3}]]]
det2 = Det[mat[[{1, 2, 4}]]]
det3 = Det[mat[[{1, 3, 4}]]]
```

Out[3453]=

$r1^5\, r2 + r2^5\, r4 - 3\, r1^2\, r2^2\, r4^2 + r1\, r4^5$

Out[3454]=

$r1^7 + r2^7 - r1^2\, r2^4\, r4 - r1^4\, r2\, r4^2 - r1\, r2^2\, r4^4 + r4^7$

Out[3455]=

$r1^2\, r2^6 - r1^4\, r2^3\, r4 + r1^6\, r4^2 - r1\, r2^4\, r4^3 - r1^3\, r2\, r4^4 + r2^2\, r4^6$

原論文では【命題14】と同様の方法 $(r_k$ と b_i 混合のグレブナー基底$)$ で求めていますが,
私はそもそも【命題14】でもその方法が再現できなかったので,
ここでは両辺を $x_0 \sim x_6$ の式に直し, §3の「relation」で証明します.

1. 実行時間が1分ほどかかるので, text形式で, 結果のみ表示します.

```
det1 = det1 /. AssociationThread[{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} -> lagrange . vars];
det1 = (PolynomialMod[det1, Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, ζ] &) /. {ζ^4 -> -ζ - ζ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])} //
Simplify; (*x0~x6の式に直す*)
relation[{b6,b3^2, det1}]
```

In[ ]:= $-\frac{m1}{7} - \frac{m2}{49}$

これは「det1 = $-\frac{b_6}{7} - \frac{b_3{}^2}{49}$」を表します.

2. 実行時間が5分ほどかかるので, text形式で, 結果のみ表示します.

```
det2 = det2 /. AssociationThread[{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} -> lagrange . vars]
det2 = (PolynomialMod[Simplify[det2], Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, ζ] &) /. {ζ^4 -> -ζ - ζ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])} ;
relation[{b7, b4 b3, det2}]
```

$-m1 - \frac{4\, m2}{49}$

これは「det2 = $-b_7 - \frac{4}{49} b_3 b_4$」を表します.

3. 実行時間が10分ほどかかるので, text形式で,　結果のみ表示します.

```
det3 = det3 /. AssociationThread[{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} -> lagrange . vars];
det3 = (PolynomialMod[Simplify[det3], Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, ζ] &) /. {ζ^4 -> -ζ - ζ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])} ;
relation[{b4^2, b5 b3, det3}]
```

In[ ]:= $\frac{m1}{49} - \frac{3\,m2}{196}$

これは「$\frac{1}{49} b_4{}^2 - \frac{3}{196} b_3 b_5$」を表します.

【コメント】原論文では「det3 = $\frac{1}{49} b_4{}^2 - \frac{3}{196} b_3 b_5$」となっていましたが,　これはミスプリだと思います.

例えば「vars={x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6} → {1, -1, 1, -1, 1, -1, 0}」を代入して確かめました.

In[ ]:=
```
det3 = det3 /. AssociationThread[{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} -> lagrange . vars];
det3 = (PolynomialMod[Simplify[det3], Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, ζ] &) /. {ζ^4 -> -ζ - ζ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])};
det3 + 1/49 b4^2 + 3/196 b3 b5 /. AssociationThread[vars -> {1, -1, 1, -1, 1, -1, 0}] // Simplify
det3 - 1/49 b4^2 + 3/196 b3 b5 /. AssociationThread[vars -> {1, -1, 1, -1, 1, -1, 0}] // Simplify
```

Out[ ]=

22050

Out[ ]=

0

§6 (#)からr_3,r_5,r_6をr_1の式で表す

「Formula1.nb」より「$b_3 = \cdots = b_6 = 0,\ b_7 \neq 0$」,「$b_3 = 0,\ b_4 b_5 b_6 b_7 \neq 0$」,
「$b_3 \neq 0$」の3通りを考えると良い．このとき次が成り立つ．

$$\begin{cases} b_3 = \cdots = b_6 = 0,\ b_7 \neq 0 \text{ のとき} & \text{det2} = \det(16, 17, 19) \neq 0 \\ b_3 = 0,\ b_4 b_5 b_6 b_7 \neq 0 \text{ のとき} & \text{det1} = \det(16, 17, 18) \neq 0 \\ b_3 \neq 0 \text{ のとき} & \text{det1} = \det(16, 17, 18) \neq 0 \text{ または} \text{det3} = \\ & \quad \det(16, 18, 19) \neq 0 \end{cases}$$

上の2つは明らか．一番下の式はちょっと面倒．
$R_1 = {r_1}^7$ がみたす3次方程式をR（x）とおくと，「Formula1.nb 式（12）」より，Rは下の式

In[3456]:=

```
ClearAll[b3, b4, b5, b6, b7, R]
```

In[3457]:=

$$R[\{b3\_, b4\_, b5\_, b6\_, b7\_\}] = x^3 + \left(\frac{b3\ b4}{14} + b7\right) x^2 + \left(-\frac{b3^2\ b4^2}{9604} - \frac{b3^3\ b5}{38416} - \frac{b4\ b5^2}{1372} + \frac{b3\ b5\ b6}{1372}\right) x + \left(\frac{b3}{14}\right)^7;$$

このとき下の補題が成り立ちます．

【補題16】「$b_3 \neq 0$」かつ det1 = det3 = 0 のとき， R は 3 重解を持つ

原論文では以下の様に述べています．(記号は少し変更しています)

Let us consider the Grobner basis of the relations between the b_i, named Gb2 in the proof of Proposition 14. The hypotheses is that we have three more relations $7\ b_6 + {b_3}^2 = 0$, $4\ {b_4}^2 + 3\ b_3\ b_5 = 0$ and $b3\ v - 1 = 0$, the latter, which introduces a new variable, implying that $b3 \neq 0$. Adding to Gb2 the left hand sides of these relation, let Gb3 be the Grobner basis the lexicographical ordering $v > b_7 > b_6 > b_5 > b_4 > b_4$. The first element of Gb3 is the square of $112\ {b_4}^3 + 27\ {b_3}^4$. Let Gb4 be the Grobner basis for the same ordering of the ideal which is obtained by adding this polynomial to Gb4. This Grobner basis consists in 8 binomials. Now, let us consider Equation 12, which has $r1^7$, $r2^7$ and $r4^7$ as roots. It has the shape ${R_1}^3 + A\,{R_1}^2 + B\ R_1 + C$ where A, B, C are polynomials in the b_i. Its three roots are equal if and only if $3\,B - A^2$ and $27\,C - A^3$ are both null. As the normal forms by Gb4 of these two polynomials is null the lemma is proved.

まず「Formula1.nb」よりGb2は次の様に，また**原論文では**Gb3は次の様になります．

In[3458]:=
```
Gb2 = {b3^5 - 16 b3 b4^3 + 20 b3^2 b4 b5 + 28 b5^3 - 4 b3^3 b6 - 112 b4 b5 b6 + 112 b3 b6^2,
   b3^2 b4 + b5^2 - 4 b4 b6 + 14 b3 b7,
   - b3^4 + 16 b4^3 + 8 b3 b4 b5 + 4 b3^2 b6 - 112 b6^2 + 392 b5 b7};
Gb3 =
 GroebnerBasis[Join[Gb2, {7 b6 + b3^2, 4 b4^2 + 3 b3 b5, b3 v - 1}], {v, b7, b6, b5, b4, b3}]
```

Out[3459]=

$$\{-729\, b3^8 + 12096\, b3^4\, b4^3 + 12544\, b4^6,\ 4\, b4^2 + 3\, b3\, b5,\ 243\, b3^7 - 4032\, b3^3\, b4^3 + 3136\, b4^4\, b5,\ -81\, b3^6 + 1344\, b3^2\, b4^3 + 784\, b4^2\, b5^2,\ 27\, b3^5 - 448\, b3\, b4^3 + 196\, b5^3,\ b3^2 + 7\, b6,\ 11\, b3^2\, b4 + 7\, b5^2 + 98\, b3\, b7,\ 81\, b3^5 - 112\, b3\, b4^3 + 10976\, b4^2\, b7,\ -81\, b3^4 + 112\, b4^3 + 8232\, b5\, b7,\ -65\, b3^2\, b4^2 - 35\, b4\, b5^2 + 4802\, b7^2,\ -1 + b3\, v,\ 3\, b5 + 4\, b4^2\, v,\ 11\, b3\, b4 + 98\, b7 + 7\, b5^2\, v\}$$

しかし御覧のように,

「$(112\, b4^3 + 27\, b3^4)^2 = 729\, b3^8 + 6048\, b3^4\, b4^3 + 12544\, b4^6$」が現れません. 一方,

先のミスプリを訂正して「$4\, b_4^2 + 3\, b_3\, b_5 \to 4\, b_4^2 - 3\, b_3\, b_5$」とすると, ちゃんと現れます.

In[3460]:=
```
Gb3 =
 GroebnerBasis[Join[Gb2, {7 b6 + b3^2, 4 b4^2 - 3 b3 b5, b3 v - 1}], {v, b7, b6, b5, b4, b3}]
```

Out[3460]=

$$\{729\, b3^8 + 6048\, b3^4\, b4^3 + 12544\, b4^6,\ -4\, b4^2 + 3\, b3\, b5,\ 243\, b3^7 + 2016\, b3^3\, b4^3 + 3136\, b4^4\, b5,\ 81\, b3^6 + 672\, b3^2\, b4^3 + 784\, b4^2\, b5^2,\ 27\, b3^5 + 224\, b3\, b4^3 + 196\, b5^3,\ b3^2 + 7\, b6,\ 11\, b3^2\, b4 + 7\, b5^2 + 98\, b3\, b7,\ -81\, b3^5 + 560\, b3\, b4^3 + 10976\, b4^2\, b7,\ -81\, b3^4 + 560\, b4^3 + 8232\, b5\, b7,\ -4\, b3^2\, b4^2 - 4\, b4\, b5^2 + 343\, b7^2,\ -1 + b3\, v,\ -3\, b5 + 4\, b4^2\, v,\ 11\, b3\, b4 + 98\, b7 + 7\, b5^2\, v\}$$

この後, 原論文に従ってGb4を求めます.

In[3461]:=
```
Gb4 = GroebnerBasis[Append[Gb3, 112 b4^3 + 27 b3^4], {v, b7, b6, b5, b4, b3}]
```

Out[3461]=

$$\{27\, b3^4 + 112\, b4^3,\ -4\, b4^2 + 3\, b3\, b5,\ 9\, b3^3 + 28\, b4\, b5,\ 3\, b3^2\, b4 + 7\, b5^2,\ b3^2 + 7\, b6,\ 4\, b3\, b4 + 49\, b7,\ -1 + b3\, v,\ -3\, b5 + 4\, b4^2\, v\}$$

次に「$poly1 = 3\,B - A^2$, $poly2 = 27\,C - A^3$」を求めて, Gb4で簡約します

In[3462]:=
```
Clear[b3, b4, b5, b6, b7]
{$A, $B, $C} = CoefficientList[R[{b3, b4, b5, b6, b7}], x, 3] // Reverse;
poly1 = 3 $B - $A^2 // Simplify
poly2 = 27 $C - $A^3 // Simplify
```

Out[3464]=

$$\frac{-208\, b3^2\, b4^2 - 3\, b3^3\, b5 - 84\, b4\, b5^2 + 84\, b3\, b5\, b6 - 5488\, b3\, b4\, b7 - 38416\, b7^2}{38416}$$

Out[3465]=

$$\frac{27\, b3^7}{105413504} - \left(\frac{b3\, b4}{14} + b7\right)^3$$

In[3466]:=

```
PolynomialReduce[poly1, Gb4, {b7, b6, b5, b4, b3}] [[2]]
PolynomialReduce[poly2, Gb4, {b7, b6, b5, b4, b3}] [[2]]
```

Out[3466]=

0

Out[3467]=

0

故に，「$b_3 \neq 0$」かつ「$\mathrm{det1} = \mathrm{det3} = 0$」のとき，
R は3重解を持ちます．しかし「$b_3 \neq 0$ の時，Rが重解を持てば fが可約となる」
のので（原論文参照）「$b_3 \neq 0$ のとき $\mathrm{det1} \neq 0$ または$\mathrm{det3} \neq 0$」となります．

以上より，常に r_3, r_5, r_6 は r_1 の式で表されます．

§7 7乗根の選び方

$r_1{}^7 = R_1$ の7乗根をとるとき 7 通りの取り方がありますが,
どのようにとっても「$f = 0$」の解集合は変わりません.
例えば「$r_1 \to r_1\,\zeta$ (ζは1の原始7乗根)」とすると,
「Formula1.nb」の (13) (14) より「$r_2 \to r_2\,\zeta^2$, $r_4 \to r_4\,\zeta^4$」. さらに (16) ~ (19) より,
r_3, r_5, r_6 が解の時「$r_3 \to r_3\,\zeta^3$, $r_5 \to r_5\,\zeta^5$, $r_6 \to r_6\,\zeta^6$」も解となります.
ところがLagrangeの逆変換より, この r_k の変換によっては $x_0 \sim x_6$ の値は変わりません.
従って7乗根をどの様に選んでも解は変わりません.