

f : $x^7 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x + 3$ の厳密解 with *Mathematica* 14

Galois群が F_{42} の方程式

2025 年5月 by mixedmoss

[注] 計算量が膨大なのでノートブック全体の評価には1分ほどかかります

§0.[準備] Galois群，原始元vの最小多項式V(x)，vによる f(x)の解の表現

SageMathを使って求めました．詳しくは [sagemath.shtml](#) をご参照ください．

Galois群はフロベニウス群 $F_{42} = C_7 C_6 = \langle \sigma, \tau \rangle$ ，但し $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ ，
 $\tau = (1, 3, 2, 6, 4, 5)$ ，分解列は $F_{42} \triangleright F_{21} \triangleright C_7 \triangleright \{\text{id}\}$ ，
但し $F_{21} = \langle \sigma, \tau^2 \rangle$ ．或いは $F_{42} \triangleright D_7 \triangleright C_7 \triangleright \{\text{id}\}$ ，但し $D_7 = \langle \sigma, \tau^3 \rangle$

In[1432]:=

```
ClearAll["`*"];
```

In[1433]:=

```
f[x_] = x^7 - 2 x^5 + x^4 + 4 x^3 - x^2 - 4 x + 3;  
V[x_] = x^42 - 28 x^40 + 396 x^38 - 3569 x^36 + 21260 x^34 - 72675 x^32 + 10544 x^30 +  
1246661 x^28 - 5902845 x^26 + 7569068 x^24 + 36867012 x^22 - 157414881 x^20 +  
22205417 x^18 + 848975725 x^16 - 503974224 x^14 - 3040667773 x^12 + 404109589 x^10 +  
6330002991 x^8 + 7362768751 x^6 + 3706246726 x^4 + 873281136 x^2 + 127353499;
```

In[1435]:=

```
sols = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7} = {  
  96 632 638 432 453 628 071 050 796 796 660 223 873 313 711 316 v  
  62 609 452 658 981 321 494 654 745 708 976 627 407 962 995 501 2 + +  
  3 637 017 704 098 182 974 627 003 435 602 279 693 868 195 305 399 v^2 5 011 928 958 072 860 605 104 979 990 835 090 507 297 547 003 227 v^4 +  
  876 532 337 225 738 500 925 166 439 925 672 783 711 481 937 014 876 532 337 225 738 500 925 166 439 925 672 783 711 481 937 014 +  
  1 376 615 098 014 096 136 938 460 630 402 520 413 819 930 988 119 v^6 240 670 522 744 669 421 572 142 229 851 572 198 924 328 653 252 v^8 -  
  292 177 445 741 912 833 641 722 146 641 890 927 903 827 312 338 70 339 014 715 645 682 173 007 183 450 825 593 754 625 093 711 -  
  321 815 802 559 772 789 751 607 027 647 991 936 332 144 442 343 v^10 45 566 706 873 078 835 901 734 848 929 076 638 452 747 688 724 532 v^12 +  
  125 218 905 317 962 642 989 309 491 417 953 254 815 925 991 002 24 688 994 165 191 634 442 725 521 391 239 783 407 873 407 892 561 +  
  24 506 886 629 878 134 026 012 747 229 041 119 152 076 506 918 488 v^14 6 665 510 819 287 368 992 592 916 284 378 586 018 031 708 720 209 v^16 -  
  24 688 994 165 191 634 442 725 521 391 239 783 407 873 407 892 561 21 161 994 998 735 686 665 193 304 049 634 100 063 891 492 479 338 +  
  13 782 094 473 610 302 613 153 541 442 338 082 951 083 948 881 183 v^18 22 831 089 135 151 560 353 745 064 161 417 834 647 761 128 928 273 v^20 +  
  49 377 988 330 383 268 885 451 042 782 479 566 815 746 815 785 122 641 913 848 294 982 495 510 863 556 172 234 368 604 708 605 206 586 +  
  1 577 717 078 663 024 528 335 174 561 058 513 334 734 442 255 241 v^22 270 680 287 253 828 846 123 927 649 788 599 297 302 178 483 889 791 v^24 +  
  71 323 760 921 664 721 723 429 284 019 137 152 067 189 845 022 954 25 034 640 083 504 317 324 923 678 690 717 140 375 583 635 603 056 854 +  
  22 200 136 102 960 279 235 874 120 467 635 354 497 835 586 418 433 v^26 1 966 735 258 194 424 748 954 054 506 479 683 118 080 722 563 827 v^28 -  
  12 517 320 041 752 158 662 461 839 345 358 570 187 791 817 801 528 427 12 517 320 041 752 158 662 461 839 345 358 570 187 791 817 801 528 427 +  
  1 238 922 646 515 362 369 789 518 418 621 953 873 382 476 290 253 v^30 321 536 629 370 674 449 080 807 747 790 435 100 057 582 471 955 v^32 -  
  8 344 880 027 834 772 441 641 226 230 239 046 791 861 211 867 685 618 8 344 880 027 834 772 441 641 226 230 239 046 791 861 211 867 685 618 +  
  153 039 971 025 005 331 660 994 874 269 660 265 473 688 335 789 v^34 2 720 579 755 772 758 196 222 763 279 229 524 636 919 622 656 v^36 -  
  25 034 640 083 504 317 324 923 678 690 717 140 375 583 635 603 056 854 4172 440 013 917 386 220 820 613 115 119 523 395 930 605 933 842 809 +  
  372 108 843 164 451 880 965 088 833 131 335 627 617 449 911 v^38 19 299 124 153 388 721 784 979 223 864 064 323 408 935 722 v^40 -  
  8 344 880 027 834 772 441 641 226 230 239 046 791 861 211 867 685 618 12 517 320 041 752 158 662 461 839 345 358 570 187 791 817 801 528 427 +  
  88 241 033 276 128 162 996 093 511 842 393 324 406 337 916 420 827 201 936 611 387 419 702 597 540 657 036 572 443 629 638 032 v^2 -  
  62 609 452 658 981 321 494 654 745 708 976 627 407 962 995 501 62 609 452 658 981 321 494 654 745 708 976 627 407 962 995 501 -
```

29 975 346 986 835 504 500 518 510 615 126 088 217 584 697 791 297 v ⁴	70 277 972 325 846 639 061 647 195 248 910 565 060 491 883 530 157 v ⁶
813 922 884 566 757 179 430 511 694 216 696 156 303 518 941 513	1 899 153 397 322 433 418 671 193 953 172 291 031 374 877 530 197
1 926 754 541 342 822 399 506 044 786 570 961 456 182 049 757 392 v ⁸	100 254 295 056 986 395 896 712 880 824 527 497 685 097 738 156 994 v ¹⁰
211 017 044 146 937 046 519 021 550 352 476 781 263 875 281 133	5 697 460 191 967 300 256 013 581 859 516 873 094 124 632 590 591
10 474 992 905 716 634 957 015 163 812 916 218 183 952 303 668 147 v ¹²	131 223 078 764 485 655 637 458 742 083 130 155 534 080 857 895 702 v ¹⁴
1 899 153 397 322 433 418 671 193 953 172 291 031 374 877 530 197	24 688 994 165 191 634 442 725 521 391 239 783 407 873 407 892 561
90 282 172 472 086 282 646 716 765 586 197 154 444 226 953 214 913 v ¹⁶	367 430 753 920 217 427 452 300 911 303 599 711 593 797 994 562 727 v ¹⁸
137 552 967 491 781 963 323 756 476 322 621 650 415 294 701 115 697	320 956 924 147 491 247 755 431 778 086 117 184 302 354 302 603 293
68 711 002 191 812 459 345 625 738 364 226 615 213 809 888 606 810 v ²⁰	2 513 157 577 164 488 573 825 669 024 791 521 170 943 852 438 523 v ²²
320 956 924 147 491 247 755 431 778 086 117 184 302 354 302 603 293	35 661 880 460 832 360 861 714 642 009 568 576 033 594 922 511 477
542 526 321 836 043 091 266 409 368 775 927 169 946 056 058 706 348 v ²⁴	102 926 763 075 204 167 680 376 625 240 237 378 908 442 646 170 818 v ²⁶
12 517 320 041 752 158 662 461 839 345 358 570 187 791 817 801 528 427	12 517 320 041 752 158 662 461 839 345 358 570 187 791 817 801 528 427
53 256 571 004 991 995 940 131 510 646 791 012 033 971 012 018 447 v ²⁸	30 386 283 172 849 669 931 095 948 674 643 646 995 016 180 368 909 v ³⁰
162 725 160 542 778 062 612 003 911 489 661 412 441 293 631 419 869 551	54 241 720 180 926 020 870 667 970 496 553 804 147 097 877 139 956 517
8 400 691 503 632 549 339 556 119 511 344 124 718 138 324 811 507 v ³²	4 122 981 123 186 925 834 204 362 434 020 505 346 464 931 187 354 v ³⁴
54 241 720 180 926 020 870 667 970 496 553 804 147 097 877 139 956 517	162 725 160 542 778 062 612 003 911 489 661 412 441 293 631 419 869 551
149 786 196 759 253 697 556 216 809 628 657 522 169 451 451 134 v ³⁶	10 431 838 957 202 624 878 839 744 576 476 004 701 395 942 156 v ³⁸
54 241 720 180 926 020 870 667 970 496 553 804 147 097 877 139 956 517	54 241 720 180 926 020 870 667 970 496 553 804 147 097 877 139 956 517
1101 163 842 121 353 171 371 676 670 108 916 397 406 672 160 v ⁴⁰	96 632 638 432 453 628 071 050 796 796 660 223 873 313 711 316 v
162 725 160 542 778 062 612 003 911 489 661 412 441 293 631 419 869 551	62 609 452 658 981 321 494 654 745 708 976 627 407 962 995 501 2
3 637 017 704 098 182 974 627 003 435 602 279 693 868 195 305 399 v ²	5 011 928 958 072 860 605 104 979 990 835 090 507 297 547 003 227 v ⁴
876 532 337 225 738 500 925 166 439 925 672 783 711 481 937 014	876 532 337 225 738 500 925 166 439 925 672 783 711 481 937 014
1 376 615 098 014 096 136 938 460 630 402 520 413 819 930 988 119 v ⁶	240 670 522 744 669 421 572 142 229 851 572 198 924 328 653 252 v ⁸
292 177 445 741 912 833 641 722 146 641 890 927 903 827 312 338	70 339 014 715 645 682 173 007 183 450 825 593 754 625 093 711
321 815 802 559 772 789 751 607 027 647 991 936 332 144 442 343 v ¹⁰	45 566 706 873 078 835 901 734 848 929 076 638 452 747 688 724 532 v ¹²
125 218 905 317 962 642 989 309 491 417 953 254 815 925 991 002	24 688 994 165 191 634 442 725 521 391 239 783 407 873 407 892 561
24 506 886 629 878 134 026 012 747 229 041 119 152 076 506 918 488 v ¹⁴	6 665 510 819 287 368 992 592 916 284 378 586 018 031 708 720 209 v ¹⁶
24 688 994 165 191 634 442 725 521 391 239 783 407 873 407 892 561	21 161 994 998 735 686 665 193 304 049 634 100 063 891 492 479 338
13 782 094 479 610 302 613 153 541 442 338 082 951 083 948 881 183 v ¹⁸	22 831 089 135 151 560 353 745 064 161 417 834 647 761 128 928 273 v ²⁰
49 377 988 330 383 268 885 451 042 782 479 566 815 746 815 785 122	641 913 848 294 982 495 510 863 556 172 234 368 604 708 605 206 586
1 577 717 078 663 024 528 335 174 561 058 513 334 734 442 255 241 v ²²	270 680 287 253 828 846 123 927 649 788 599 297 302 178 483 889 791 v ²⁴
71 323 760 921 664 771 723 429 284 019 137 152 067 189 845 022 954	25 034 640 083 504 317 324 923 678 690 717 140 375 583 635 603 056 854
22 200 136 102 960 279 235 874 120 467 635 354 497 835 586 418 433 v ²⁶	1 966 735 258 194 424 748 954 054 506 479 683 118 080 722 563 827 v ²⁸
12 517 320 041 752 158 662 461 839 345 358 570 187 791 817 801 528 427	12 517 320 041 752 158 662 461 839 345 358 570 187 791 817 801 528 427
1 238 922 646 515 362 369 789 518 418 621 953 873 382 476 290 253 v ³⁰	321 536 629 370 674 449 080 807 747 790 435 100 057 582 471 955 v ³²
8 344 880 027 834 772 441 641 226 230 239 046 791 861 211 867 685 618	8 344 880 027 834 772 441 641 226 230 239 046 791 861 211 867 685 618
153 039 971 025 005 331 660 994 874 269 660 265 473 688 335 789 v ³⁴	2 720 579 755 772 758 196 222 763 279 229 524 636 919 622 656 v ³⁶
25 034 640 083 504 317 324 923 678 690 717 140 375 583 635 603 056 854	4 172 440 013 917 386 220 820 613 115 119 523 395 930 605 933 842 809
372 108 843 164 451 880 965 088 833 131 335 627 617 449 911 v ³⁸	19 299 124 153 388 721 784 979 223 864 064 323 408 935 722 v ⁴⁰
8 344 880 027 834 772 441 641 226 230 239 046 791 861 211 867 685 618	12 517 320 041 752 158 662 461 839 345 358 570 187 791 817 801 528 427
51 232 076 726 535 592 539 693 229 608 250 643 509 094 987 669	118 369 706 842 537 629 691 237 106 836 655 411 020 037 991 001 v
62 609 452 658 981 321 494 654 745 708 976 627 407 962 995 501	41 739 635 105 987 547 663 103 163 805 984 418 271 975 330 334
4 521 034 244 477 742 878 475 761 118 234 091 775 535 367 947 685 v ²	2 267 782 116 600 307 917 175 515 388 154 910 323 317 811 842 280 v ³
876 532 337 225 738 500 925 166 439 925 672 783 711 481 937 014	146 088 722 870 956 416 820 861 073 320 945 463 951 913 656 169
50 074 058 430 284 865 739 387 297 269 331 841 317 556 332 198 586 v ⁴	652 619 836 555 520 191 863 100 587 015 747 063 755 273 115 564 275 v ⁵
3 067 863 180 290 084 753 238 082 539 739 854 742 990 186 779 549	26 588 147 562 514 067 861 396 715 344 412 074 439 248 285 422 758
218 548 875 672 032 974 923 105 707 620 828 368 409 511 151 042 779 v ⁶	4 786 669 672 508 467 974 962 706 573 041 071 136 854 729 361 332 v ⁷
13 294 073 781 257 033 930 698 357 672 206 037 219 624 142 711 379	340 873 686 698 898 305 915 342 504 415 539 415 887 798 531 061
7 409 024 595 306 685 097 523 365 054 508 816 364 253 435 980 699 v ⁸	27 046 846 608 650 996 715 154 299 123 172 993 476 801 593 561 366 v ⁹
2 954 238 618 057 118 651 266 301 704 934 674 937 694 253 935 862	4 431 357 927 085 677 976 899 452 557 402 012 406 541 380 903 793
606 364 389 221 964 438 617 207 519 649 966 389 218 905 968 457 977 v ¹⁰	2 361 654 920 514 656 224 511 692 713 685 896 097 713 376 226 114 501 v ¹¹
79 764 442 687 542 203 584 190 146 033 236 223 317 744 856 268 274	345 645 918 312 682 882 198 157 299 477 356 967 710 227 710 495 854
304 143 935 131 466 726 452 959 645 611 401 720 337 024 851 192 447 v ¹²	26 897 140 856 140 745 443 445 924 850 404 276 930 594 864 679 193 v ¹³
172 822 959 156 341 441 099 078 649 738 678 483 855 113 855 247 927	19 202 551 017 371 271 233 230 961 082 075 387 095 012 650 583 103
373 935 027 752 140 805 340 080 281 416 135 607 206 106 156 332 104 v ¹⁴	173 675 823 646 315 297 428 036 901 487 558 339 795 074 307 613 581 v ¹⁵
172 822 959 156 341 441 099 078 649 738 678 483 855 113 855 247 927	115 215 306 104 227 627 399 385 766 492 452 322 570 075 903 498 618
86 000 491 925 025 361 484 128 606 585 971 079 824 977 789 107 907 v ¹⁶	1 985 557 564 253 454 143 841 313 305 653 747 926 003 888 672 611 611 v ¹⁷
518 468 877 469 024 323 297 235 949 216 035 451 565 341 565 743 781	4 493 396 938 064 877 468 576 044 893 205 640 580 232 960 236 446 102
1 948 832 486 639 910 979 876 523 896 350 125 788 335 495 340 653 241 v ¹⁸	100 861 697 423 546 965 582 808 105 655 745 835 420 484 480 173 765 v ¹⁹
4 493 396 938 064 877 468 576 044 893 205 640 580 232 960 236 446 102	748 899 489 677 479 578 096 007 482 200 940 096 705 493 372 741 017
28 787 874 908 608 959 142 994 602 174 257 656 221 981 519 003 166 v ²⁰	2 484 098 277 488 684 167 776 872 439 376 482 375 999 932 614 879 v ²¹
320 956 924 147 491 247 755 431 778 086 117 184 302 354 302 603 293	30 567 326 109 284 880 738 612 550 293 915 922 314 509 933 581 266

2 025 067 058 009 085 173 355 344 779 640 795 776 585 795 725 605 v ²²	-	47 854 316 887 612 640 578 924 437 346 397 072 123 096 298 456 695 v ²³	-
83 211 054 408 608 842 010 667 498 022 326 677 411 721 485 860 113	-	6 490 462 243 871 489 676 832 064 845 741 480 838 114 275 897 088 814	-
1 435 898 832 156 916 893 045 687 617 953 990 174 579 838 627 441 092 v ²⁴	-	141 319 342 739 124 588 412 695 304 947 358 159 876 050 506 822 456 v ²⁵	+
87 621 240 292 265 110 637 232 875 417 509 991 314 542 724 610 698 989	-	29 207 080 097 421 703 545 744 291 805 836 663 771 514 241 536 899 663	+
21 910 692 504 062 901 037 117 032 143 351 306 134 839 165 108 649 v ²⁶	-	54 624 585 236 277 236 905 181 916 369 771 636 852 387 723 859 918 v ²⁷	+
6 740 095 407 097 316 202 864 067 339 808 460 870 349 440 354 669 153	-	29 207 080 097 421 703 545 744 291 805 836 663 771 514 241 536 899 663	+
15 134 589 278 274 004 309 660 585 062 268 415 914 574 896 840 393 v ²⁸	-	82 234 510 350 145 884 918 558 677 910 991 141 953 166 060 320 682 v ²⁹	-
175 242 480 584 530 221 274 465 750 835 019 982 629 085 449 221 397 978	-	379 692 041 266 482 146 094 675 793 475 876 629 029 685 139 979 695 619	-
6 075 883 090 121 932 734 618 739 451 043 402 466 778 348 020 592 v ³⁰	-	9 294 331 922 513 437 750 654 225 423 118 168 689 447 079 276 009 v ³¹	+
29 207 080 097 421 703 545 744 291 805 836 663 771 514 241 536 899 663	-	253 128 027 510 988 097 396 450 528 983 917 752 686 456 759 986 463 746	+
3 434 625 279 960 877 920 644 980 706 954 304 547 140 893 683 241 v ³²	-	177 378 002 284 448 288 270 571 475 675 298 871 699 944 119 621 v ³³	+
58 414 160 194 843 407 091 488 583 611 673 327 543 028 483 073 799 326	-	9 375 112 130 036 596 199 868 538 110 515 472 321 720 620 740 239 398	-
65 505 587 152 585 247 245 890 177 540 595 025 481 092 401 157 v ³⁴	-	2 872 032 655 660 774 541 933 235 757 011 080 773 023 873 761 845 v ³⁵	+
6 740 095 407 097 316 202 864 067 339 808 460 870 349 440 354 669 153	-	759 384 082 532 964 292 189 351 586 951 753 258 059 370 279 959 391 238	+
31 159 731 172 422 683 751 836 991 618 573 032 630 350 331 941 v ³⁶	-	19 638 934 359 829 519 971 646 697 575 360 754 952 942 941 872 v ³⁷	-
29 207 080 097 421 703 545 744 291 805 836 663 771 514 241 536 899 663	-	42 188 004 585 164 682 899 408 421 497 319 625 447 742 793 331 077 291	-
89 111 499 804 706 185 823 291 165 775 440 133 449 903 219 v ³⁸	-	1 288 445 754 125 719 819 995 901 147 839 297 283 392 038 789 v ³⁹	+
1 192 125 718 262 110 348 805 889 461 462 720 970 265 887 409 669 374	-	36 161 146 787 284 013 913 778 646 997 702 536 098 065 251 426 637 678	+
463 590 092 677 173 147 225 979 672 677 982 736 237 921 771 v ⁴⁰	-	5 039 624 589 011 689 115 944 760 045 941 240 123 592 935 v ⁴¹	+
175 242 480 584 530 221 274 465 750 835 019 982 629 085 449 221 397 978	-	3 686 330 497 732 836 369 851 221 295 882 297 369 220 244 077 472 773	+
103 744 198 520 925 139 112 697 270 483 714 205 179 239 740 775	-	2 946 473 470 916 063 355 182 436 215 680 337 836 653 064 387 v	-
62 609 452 658 981 321 494 654 745 708 976 627 407 962 995 501	-	1 715 327 470 109 077 301 223 417 690 656 893 901 588 027 274	-
169 117 028 021 158 136 798 898 697 802 651 104 449 868 270 490 v ²	-	3 079 821 519 870 508 742 823 591 722 468 448 475 686 037 879 892 v ³	-
62 609 452 658 981 321 494 654 745 708 976 627 407 962 995 501	-	438 266 168 612 869 250 462 583 219 962 836 391 855 740 968 507	-
144 609 526 008 548 551 881 555 944 013 721 393 879 445 611 341 670 v ⁴	-	1 266 281 930 426 279 961 432 726 750 106 305 838 234 883 574 738 989 v ⁵	+
39 882 221 343 771 101 792 095 073 016 618 111 658 872 428 134 137	-	79 764 442 687 542 203 584 190 146 033 236 223 317 744 856 268 274	-
35 211 959 491 211 112 438 040 482 932 956 069 526 596 418 646 644 v ⁶	-	17 495 094 062 130 810 447 943 886 382 786 012 602 122 436 579 255 v ⁷	-
13 294 073 781 257 033 930 698 357 672 206 037 219 624 142 711 379	-	1 022 621 060 096 694 917 746 027 513 246 618 247 663 395 593 183	-
447 767 195 687 004 889 667 891 689 142 013 169 533 432 346 171 v ⁸	-	29 969 535 131 228 242 752 090 842 106 104 401 444 417 273 928 752 v ⁹	+
328 248 735 339 679 850 140 700 189 437 186 104 188 250 437 318	-	4 431 357 927 085 677 976 899 452 557 402 012 406 541 380 903 793	+
54 790 495 026 817 467 205 995 515 245 022 384 433 398 905 565 755 v ¹⁰	-	8 637 429 237 311 416 017 223 334 511 707 984 992 638 009 734 703 155 v ¹¹	+
39 882 221 343 771 101 792 095 073 016 618 111 658 872 428 134 137	-	1 036 937 754 938 048 646 594 471 898 432 070 903 130 683 131 487 562	+
292 997 412 065 823 374 441 827 269 254 500 524 272 857 710 726 965 v ¹²	-	1 257 974 636 010 987 044 215 894 776 752 581 174 337 038 037 901 743 v ¹³	+
345 645 918 312 682 882 198 157 299 477 356 967 710 227 710 495 854	-	345 645 918 312 682 882 198 157 299 477 356 967 710 227 710 495 854	-
86 202 458 485 587 948 791 063 914 728 467 896 901 358 702 126 563 v ¹⁴	-	937 057 183 599 568 912 356 161 343 959 395 687 905 762 684 238 243 v ¹⁵	-
172 822 959 156 341 441 099 078 649 738 678 483 855 113 855 247 927	-	345 645 918 312 682 882 198 157 299 477 356 967 710 227 710 495 854	-
1 029 058 365 402 242 798 589 954 965 330 373 400 584 250 132 023 989 v ¹⁶	-	3 481 744 270 649 927 997 745 062 944 250 461 190 852 242 319 898 760 v ¹⁷	+
6 740 095 407 097 316 202 864 067 339 808 460 870 349 440 354 669 153	-	6 740 095 407 097 316 202 864 067 339 808 460 870 349 440 354 669 153	+
630 987 806 296 926 525 507 389 788 477 693 355 727 548 726 901 805 v ¹⁸	-	2 886 293 540 695 871 757 609 670 588 434 371 016 013 359 348 022 501 v ¹⁹	+
4 493 396 938 064 877 468 576 044 893 205 640 580 232 960 236 446 102	-	4 493 396 938 064 877 468 576 044 893 205 640 580 232 960 236 446 102	-
11 695 836 760 557 019 294 108 530 145 706 531 877 914 278 327 795 v ²⁰	-	33 503 685 139 373 586 506 705 203 496 244 135 433 946 752 978 175 v ²¹	+
641 913 848 294 982 495 510 863 556 172 234 368 604 708 605 206 586	-	320 956 924 147 491 247 755 431 778 086 117 184 302 354 302 603 293	+
933 719 809 757 377 120 283 101 238 618 953 301 008 150 511 776 v ²²	-	285 509 658 132 130 943 523 483 897 764 494 428 305 121 616 912 451 v ²³	+
83 211 054 408 608 842 010 667 498 022 326 677 411 721 485 860 113	-	6 490 462 243 871 489 676 832 064 845 741 480 838 114 275 897 088 814	+
74 527 647 864 487 236 161 077 169 461 283 480 050 194 940 858 945 v ²⁴	-	4 281 930 517 992 655 204 598 566 032 921 897 585 481 955 956 295 731 v ²⁵	+
13 480 190 814 194 632 405 728 134 679 616 921 740 698 880 709 338 306	-	175 242 480 584 530 221 274 465 750 835 019 982 629 085 449 221 397 978	-
79 996 284 510 325 081 252 322 072 796 183 635 058 208 989 743 605 v ²⁶	-	383 238 182 461 092 841 423 418 439 322 960 861 801 297 287 608 239 v ²⁷	-
87 621 240 292 265 110 637 232 875 417 509 991 314 542 724 610 698 989	-	87 621 240 292 265 110 637 232 875 417 509 991 314 542 724 610 698 989	-
90 949 740 287 001 694 377 152 475 730 627 325 071 184 040 706 247 v ²⁸	-	44 496 787 411 600 803 857 789 698 432 737 956 896 878 439 073 713 v ²⁹	+
1 139 076 123 799 446 438 284 027 380 427 629 887 089 055 419 939 086 857	-	175 242 480 584 530 221 274 465 750 835 019 982 629 085 449 221 397 978	+
29 005 469 483 060 268 616 630 880 549 610 368 824 464 564 183 026 v ³⁰	-	258 440 829 145 137 530 404 605 903 464 123 768 026 424 713 777 v ³¹	-
379 692 041 266 482 146 094 675 793 475 876 629 029 685 139 979 695 619	-	800 193 975 271 827 494 403 953 200 159 908 596 479 842 233 887 662	-
15 105 121 386 794 942 457 845 417 659 926 680 191 103 349 149 489 v ³²	-	5 076 489 751 874 750 855 365 658 117 271 757 568 304 642 639 599 v ³³	+
759 384 082 532 964 292 189 351 586 951 753 258 059 370 279 959 391 238	-	58 414 160 194 843 407 091 488 583 611 673 327 543 028 483 073 799 326	+
7 206 657 958 540 817 910 830 876 529 116 665 345 460 351 836 387 v ³⁴	-	2 459 062 329 592 409 364 434 257 504 888 710 895 263 653 600 449 v ³⁵	-
2 278 152 247 598 892 876 568 054 760 855 259 774 178 110 839 878 173 714	-	175 242 480 584 530 221 274 465 750 835 019 982 629 085 449 221 397 978	+
128 397 574 359 427 943 183 393 515 751 034 838 561 159 897 960 v ³⁶	-	44 253 473 030 732 828 961 465 804 411 387 476 590 023 299 302 v ³⁷	+
379 692 041 266 482 146 094 675 793 475 876 629 029 685 139 979 695 619	-	29 207 080 097 421 703 545 744 291 805 836 663 771 514 241 536 899 663	+
1 257 361 243 081 756 241 812 953 169 898 205 300 786 049 808 v ³⁸	-	436 768 524 450 988 420 940 093 322 243 348 554 008 744 403 v ³⁹	-
54 241 720 180 926 020 870 667 970 496 553 804 147 097 877 139 956 517	-	4 172 440 013 917 386 220 820 613 115 119 523 395 930 605 933 842 809	-
1 830 964 905 870 526 079 202 217 797 311 067 649 672 579 307 v ⁴⁰	-	320 157 006 089 788 566 467 589 826 145 131 200 974 383 336 v ⁴¹	+
2 278 152 247 598 892 876 568 054 760 855 259 774 178 110 839 878 173 714	-	87 621 240 292 265 110 637 232 875 417 509 991 314 542 724 610 698 989	+

103 744 198 520 925 139 112 697 270 483 714 205 179 239 740 775	2 946 473 470 916 063 355 182 436 215 680 337 836 653 064 387 v
62 609 452 658 981 321 494 654 745 708 976 627 407 962 995 501	1 715 327 470 109 077 301 223 417 690 656 893 901 588 027 274
169 117 028 021 158 136 798 898 697 802 651 104 449 868 270 490 v ²	3 079 821 519 870 508 742 823 591 722 468 448 475 686 037 879 892 v ³
62 609 452 658 981 321 494 654 745 708 976 627 407 962 995 501	438 266 168 612 869 250 462 583 219 962 836 391 855 740 968 507
144 609 526 008 548 551 881 555 944 013 721 393 879 445 611 341 670 v ⁴	1 266 281 930 426 279 961 432 726 750 106 305 838 234 883 574 378 989 v ⁵
39 882 221 343 771 101 792 095 073 016 618 111 658 872 428 134 137	79 764 442 687 542 203 584 190 146 033 236 223 317 744 856 268 274
35 211 959 491 211 112 438 040 482 932 956 069 526 596 418 646 644 v ⁶	17 495 094 062 130 810 447 943 886 382 786 012 602 122 436 579 255 v ⁷
13 294 073 781 257 033 930 698 357 672 206 037 219 624 142 711 379	1 022 621 060 096 694 917 746 027 513 246 618 247 663 395 593 183
447 767 195 687 004 889 667 891 689 142 013 169 533 432 346 171 v ⁸	29 969 535 131 228 242 752 090 842 106 104 401 444 417 273 928 752 v ⁹
328 248 735 339 679 850 140 700 189 437 186 104 188 250 437 318	4 431 357 927 085 677 976 899 452 557 402 012 406 541 380 903 793
54 790 495 026 817 467 205 995 515 245 022 384 433 398 905 565 755 v ¹⁰	8 637 429 237 311 416 017 223 334 511 707 984 992 638 009 734 703 155 v ¹¹
39 882 221 343 771 101 792 095 073 016 618 111 658 872 428 134 137	1 036 937 754 938 048 646 594 471 898 432 070 903 130 683 131 487 562
292 997 412 065 823 734 441 827 269 254 500 524 272 857 710 726 965 v ¹²	1 257 974 636 010 987 044 215 894 776 752 581 174 337 038 037 901 743 v ¹³
345 645 918 312 682 882 198 157 299 477 356 967 710 227 710 495 854	345 645 918 312 682 882 198 157 299 477 356 967 710 227 710 495 854
86 202 458 485 587 948 791 063 914 728 467 896 901 358 702 126 563 v ¹⁴	937 057 183 599 568 912 356 161 343 959 395 687 905 762 684 238 243 v ¹⁵
172 822 959 156 341 441 099 078 649 738 678 483 855 113 855 247 927	345 645 918 312 682 882 198 157 299 477 356 967 710 227 710 495 854
1 029 058 365 402 242 798 589 594 965 330 373 400 584 250 132 023 989 v ¹⁶	3 481 744 270 649 927 997 745 062 944 250 461 190 852 242 319 898 760 v ¹⁷
6 740 095 407 097 316 202 864 067 339 808 460 870 349 440 354 669 153	6 740 095 407 097 316 202 864 067 339 808 460 870 349 440 354 669 153
630 987 806 296 926 525 507 389 788 477 693 355 727 548 726 901 805 v ¹⁸	2 886 293 540 695 871 757 609 670 588 434 371 016 013 359 348 022 501 v ¹⁹
4 493 396 938 064 877 468 576 044 893 205 640 580 232 960 236 446 102	4 493 396 938 064 877 468 576 044 893 205 640 580 232 960 236 446 102
11 695 836 760 557 019 294 108 530 145 706 531 877 914 278 327 795 v ²⁰	33 503 685 139 373 586 506 705 203 496 244 135 433 946 752 978 175 v ²¹
641 913 848 294 982 495 510 863 556 172 234 368 604 708 605 206 586	320 956 924 147 491 247 755 431 778 086 117 184 302 354 302 603 293
933 719 809 757 377 120 283 101 238 618 953 301 008 150 511 776 v ²²	285 509 658 132 130 943 523 483 897 764 494 428 305 121 616 912 451 v ²³
83 211 054 408 608 842 010 667 498 022 326 677 411 721 485 860 113	6 490 462 243 871 489 676 832 064 845 741 480 838 114 275 897 088 814
74 527 647 864 487 236 161 077 169 461 283 480 050 194 940 858 945 v ²⁴	4 281 930 517 992 655 204 598 566 032 921 897 585 481 955 956 295 731 v ²⁵
13 480 190 814 194 632 405 728 134 679 616 921 740 698 880 709 338 306	175 242 480 584 530 221 274 465 750 835 019 982 629 085 449 221 397 978
79 996 284 510 325 081 252 322 072 796 183 635 058 208 989 743 605 v ²⁶	383 238 182 461 092 841 423 418 439 322 960 861 801 297 287 608 239 v ²⁷
87 621 240 292 265 110 637 232 875 417 509 991 314 542 724 610 698 989	87 621 240 292 265 110 637 232 875 417 509 991 314 542 724 610 698 989
90 949 740 287 001 694 377 152 475 730 627 325 071 184 040 706 247 v ²⁸	44 496 787 411 600 803 857 789 698 432 737 956 896 878 439 073 713 v ²⁹
1 139 076 123 799 446 438 284 027 380 427 629 887 089 055 419 939 086 857	175 242 480 584 530 221 274 465 750 835 019 982 629 085 449 221 397 978
29 005 469 483 060 268 616 630 880 549 610 368 824 464 564 183 026 v ³⁰	258 440 829 145 137 530 404 605 903 464 123 768 026 424 713 777 v ³¹
379 692 041 266 482 146 094 675 793 475 876 629 029 685 139 979 695 619	800 193 975 271 827 494 403 953 200 159 908 596 479 842 233 887 662
15 105 121 386 794 942 457 845 417 659 926 680 191 103 349 149 489 v ³²	5 076 489 751 874 750 855 365 658 117 271 757 568 304 642 639 599 v ³³
759 384 082 532 964 292 189 351 586 951 753 258 059 370 279 959 391 238	58 414 160 194 843 407 091 488 583 611 673 327 543 028 483 073 799 326
7 206 657 958 540 817 910 830 876 529 116 665 345 460 351 836 387 v ³⁴	2 459 062 329 592 409 364 434 257 504 888 710 895 263 653 600 449 v ³⁵
2 278 152 247 598 892 876 568 054 760 855 259 774 178 110 839 878 173 714	175 242 480 584 530 221 274 465 750 835 019 982 629 085 449 221 397 978
128 397 574 359 427 943 183 393 515 751 034 838 561 159 897 960 v ³⁶	44 253 473 030 732 828 961 465 804 411 387 476 590 023 299 302 v ³⁷
379 692 041 266 482 146 094 675 793 475 876 629 029 685 139 979 695 619	29 207 080 097 421 703 545 744 291 805 836 663 771 514 241 536 899 663
1 257 361 243 081 756 241 812 953 169 898 205 300 786 049 808 v ³⁸	436 768 524 450 988 420 940 093 322 243 348 554 008 744 403 v ³⁹
54 241 720 180 926 020 870 667 970 496 553 804 147 097 877 139 956 517	4 172 440 013 917 386 220 820 613 115 119 523 395 930 605 933 842 809
1 830 964 905 870 526 079 202 217 797 311 067 649 672 579 307 v ⁴⁰	320 157 006 089 788 566 467 589 826 145 131 200 974 383 336 v ⁴¹
2 278 152 247 598 892 876 568 054 760 855 259 774 178 110 839 878 173 714	87 621 240 292 265 110 637 232 875 417 509 991 314 542 724 610 698 989
51 232 076 726 535 592 539 693 229 608 250 643 509 094 987 669	118 369 706 842 537 629 691 237 106 836 655 411 020 037 991 001 v
62 609 452 658 981 321 494 654 745 708 976 627 407 962 995 501	41 739 635 105 987 547 663 103 163 805 984 418 271 975 330 334
4 521 034 244 477 742 878 475 761 118 234 091 775 535 367 947 685 v ²	2 267 782 116 600 307 917 175 515 388 154 910 323 317 811 842 280 v ³
876 532 337 225 738 500 925 166 439 925 672 783 711 481 937 014	146 088 722 870 956 416 820 861 073 320 945 463 951 913 656 169
50 074 058 430 284 865 739 383 297 269 331 841 317 556 332 198 586 v ⁴	652 619 836 555 520 191 863 100 587 015 747 063 755 273 115 564 275 v ⁵
3 067 863 180 290 084 753 238 082 539 739 854 742 990 186 779 549	26 588 147 562 514 067 861 396 715 344 412 074 439 248 285 422 758
218 548 875 672 032 974 923 105 707 620 828 368 409 511 151 042 779 v ⁶	4 786 669 672 508 467 974 962 706 573 041 071 136 854 729 361 332 v ⁷
13 294 073 781 257 033 930 698 357 672 206 037 219 624 142 711 379	340 873 686 698 898 305 915 342 504 415 539 415 887 798 531 061
7 409 024 595 306 685 097 523 365 054 508 816 364 253 435 980 699 v ⁸	27 046 846 608 650 996 715 154 299 123 172 993 476 801 593 561 366 v ⁹
2 954 238 618 057 118 651 266 301 704 934 674 937 694 253 935 862	4 431 357 927 085 677 976 899 452 557 402 012 406 541 380 903 793
606 364 389 221 964 438 617 207 519 649 966 389 218 905 968 457 977 v ¹⁰	2 361 654 920 514 656 224 511 692 713 685 896 097 713 376 226 114 501 v ¹¹
79 764 442 687 542 203 584 190 146 033 236 223 317 744 856 268 274	345 645 918 312 682 882 198 157 299 477 356 967 710 227 710 495 854
304 143 935 131 466 726 452 959 645 611 401 720 337 024 851 192 447 v ¹²	26 897 140 856 140 745 443 445 924 850 404 276 930 594 864 679 193 v ¹³
172 822 959 156 341 441 099 078 649 738 678 483 855 113 855 247 927	19 202 551 017 371 271 233 230 961 082 075 387 095 012 650 583 103
373 935 027 752 140 805 340 080 281 416 135 607 206 106 156 332 104 v ¹⁴	173 675 823 646 315 297 428 036 901 487 558 339 795 074 307 613 581 v ¹⁵
172 822 959 156 341 441 099 078 649 738 678 483 855 113 855 247 927	115 215 306 104 227 627 399 385 766 492 452 322 570 075 903 498 618
86 000 491 925 025 361 484 128 606 585 971 079 824 977 789 107 907 v ¹⁶	1 985 557 564 253 454 143 841 313 305 653 747 926 003 888 672 611 611 v ¹⁷
518 468 877 469 024 323 297 235 949 216 035 451 565 341 565 743 781	4 493 396 938 064 877 468 576 044 893 205 640 580 232 960 236 446 102
1 948 832 486 639 910 979 876 523 896 350 125 788 335 495 340 653 241 v ¹⁸	100 861 697 423 546 965 582 808 105 655 745 835 420 484 480 173 765 v ¹⁹
4 493 396 938 064 877 468 576 044 893 205 640 580 232 960 236 446 102	748 899 489 677 479 578 096 007 482 200 940 096 705 493 372 741 017

$$\begin{aligned}
& \frac{28\ 787\ 874\ 908\ 608\ 959\ 142\ 994\ 602\ 174\ 257\ 656\ 221\ 981\ 519\ 003\ 166\ v^{20}}{320\ 956\ 924\ 147\ 491\ 247\ 755\ 431\ 778\ 086\ 117\ 184\ 302\ 354\ 302\ 603\ 293} - \frac{2\ 484\ 098\ 277\ 488\ 684\ 167\ 776\ 872\ 439\ 376\ 482\ 375\ 999\ 932\ 614\ 879\ v^{21}}{30\ 567\ 326\ 109\ 284\ 880\ 738\ 612\ 550\ 293\ 915\ 922\ 314\ 509\ 933\ 581\ 266} + \\
& \frac{2\ 025\ 067\ 058\ 009\ 085\ 173\ 355\ 344\ 779\ 640\ 795\ 776\ 585\ 795\ 725\ 605\ v^{22}}{47\ 854\ 316\ 887\ 612\ 640\ 578\ 924\ 437\ 346\ 397\ 072\ 123\ 096\ 298\ 456\ 695\ v^{23}} - \\
& \frac{83\ 211\ 054\ 408\ 608\ 842\ 010\ 667\ 498\ 022\ 326\ 677\ 411\ 721\ 485\ 860\ 113}{6\ 490\ 462\ 243\ 871\ 489\ 676\ 832\ 064\ 845\ 741\ 480\ 838\ 114\ 275\ 897\ 088\ 814} + \\
& \frac{1\ 435\ 890\ 832\ 156\ 916\ 893\ 045\ 687\ 617\ 953\ 990\ 174\ 579\ 838\ 627\ 441\ 092\ v^{24}}{141\ 319\ 342\ 739\ 124\ 588\ 412\ 695\ 304\ 947\ 358\ 159\ 876\ 050\ 506\ 822\ 456\ v^{25}} + \\
& \frac{87\ 621\ 240\ 292\ 265\ 110\ 637\ 232\ 875\ 417\ 509\ 991\ 314\ 542\ 724\ 610\ 698\ 989}{29\ 207\ 080\ 097\ 421\ 703\ 545\ 744\ 291\ 805\ 836\ 663\ 771\ 514\ 241\ 536\ 899\ 663} + \\
& \frac{21\ 910\ 692\ 504\ 062\ 901\ 037\ 117\ 032\ 143\ 351\ 306\ 134\ 839\ 165\ 108\ 649\ v^{26}}{54\ 624\ 585\ 236\ 277\ 236\ 905\ 181\ 916\ 369\ 771\ 636\ 852\ 387\ 723\ 859\ 918\ v^{27}} + \\
& \frac{6\ 740\ 095\ 407\ 097\ 316\ 202\ 864\ 067\ 339\ 808\ 460\ 870\ 349\ 440\ 354\ 669\ 153}{29\ 207\ 080\ 097\ 421\ 703\ 545\ 744\ 291\ 805\ 836\ 663\ 771\ 514\ 241\ 536\ 899\ 663} + \\
& \frac{15\ 134\ 589\ 278\ 274\ 004\ 309\ 660\ 585\ 062\ 268\ 415\ 914\ 574\ 896\ 840\ 393\ v^{28}}{82\ 234\ 510\ 350\ 145\ 884\ 918\ 558\ 677\ 910\ 991\ 141\ 953\ 166\ 060\ 320\ 682\ v^{29}} - \\
& \frac{175\ 242\ 480\ 584\ 530\ 221\ 274\ 465\ 750\ 835\ 019\ 982\ 629\ 085\ 449\ 221\ 397\ 978}{379\ 692\ 041\ 266\ 482\ 146\ 094\ 675\ 793\ 475\ 876\ 629\ 029\ 685\ 139\ 979\ 695\ 619} + \\
& \frac{6\ 075\ 883\ 090\ 121\ 932\ 734\ 618\ 739\ 451\ 043\ 402\ 466\ 778\ 348\ 020\ 592\ v^{30}}{9\ 294\ 331\ 922\ 513\ 437\ 750\ 654\ 225\ 423\ 118\ 168\ 689\ 447\ 079\ 276\ 009\ v^{31}} + \\
& \frac{29\ 207\ 080\ 097\ 421\ 703\ 545\ 744\ 291\ 805\ 836\ 663\ 771\ 514\ 241\ 536\ 899\ 663}{253\ 128\ 027\ 510\ 988\ 097\ 396\ 450\ 528\ 983\ 917\ 752\ 686\ 456\ 759\ 986\ 463\ 746} + \\
& \frac{3\ 434\ 625\ 279\ 960\ 877\ 920\ 644\ 980\ 706\ 954\ 304\ 547\ 140\ 893\ 683\ 241\ v^{32}}{177\ 378\ 002\ 284\ 448\ 288\ 270\ 571\ 475\ 675\ 298\ 871\ 699\ 944\ 119\ 621\ v^{33}} - \\
& \frac{58\ 414\ 160\ 194\ 843\ 407\ 091\ 488\ 583\ 611\ 673\ 327\ 543\ 028\ 483\ 073\ 799\ 326}{9\ 375\ 112\ 130\ 036\ 596\ 199\ 868\ 538\ 110\ 515\ 472\ 321\ 720\ 620\ 740\ 239\ 398} - \\
& \frac{65\ 505\ 587\ 152\ 585\ 247\ 245\ 890\ 177\ 540\ 595\ 025\ 481\ 092\ 401\ 157\ v^{34}}{2\ 872\ 032\ 655\ 660\ 774\ 541\ 933\ 235\ 757\ 011\ 080\ 773\ 023\ 873\ 761\ 845\ v^{35}} + \\
& \frac{6\ 740\ 095\ 407\ 097\ 316\ 202\ 864\ 067\ 339\ 808\ 460\ 870\ 349\ 440\ 354\ 669\ 153}{759\ 384\ 082\ 532\ 964\ 292\ 189\ 351\ 586\ 951\ 753\ 258\ 059\ 370\ 279\ 959\ 391\ 238} + \\
& \frac{31\ 159\ 731\ 172\ 422\ 683\ 751\ 836\ 991\ 618\ 573\ 032\ 630\ 350\ 331\ 941\ v^{36}}{19\ 638\ 934\ 359\ 829\ 519\ 971\ 646\ 697\ 575\ 360\ 754\ 952\ 942\ 941\ 872\ v^{37}} - \\
& \frac{29\ 207\ 080\ 097\ 421\ 703\ 545\ 744\ 291\ 805\ 836\ 663\ 771\ 514\ 241\ 536\ 899\ 663}{42\ 188\ 004\ 585\ 164\ 682\ 899\ 408\ 421\ 497\ 319\ 625\ 447\ 742\ 793\ 331\ 077\ 291} + \\
& \frac{89\ 111\ 499\ 804\ 706\ 185\ 823\ 291\ 165\ 775\ 440\ 133\ 449\ 903\ 219\ v^{38}}{1\ 288\ 445\ 754\ 125\ 719\ 819\ 995\ 901\ 147\ 839\ 297\ 283\ 392\ 038\ 789\ v^{39}} + \\
& \frac{1\ 192\ 125\ 718\ 262\ 110\ 348\ 805\ 889\ 461\ 462\ 720\ 970\ 265\ 887\ 409\ 669\ 374}{36\ 161\ 146\ 787\ 284\ 013\ 913\ 778\ 646\ 997\ 702\ 536\ 098\ 065\ 251\ 426\ 637\ 678} + \\
& \frac{463\ 590\ 092\ 677\ 173\ 147\ 225\ 979\ 672\ 677\ 982\ 736\ 237\ 921\ 771\ v^{40}}{5\ 039\ 624\ 589\ 011\ 689\ 115\ 944\ 760\ 045\ 941\ 240\ 123\ 592\ 935\ v^{41}} - \\
& \frac{175\ 242\ 480\ 584\ 530\ 221\ 274\ 465\ 750\ 835\ 019\ 982\ 629\ 085\ 449\ 221\ 397\ 978}{3\ 686\ 330\ 497\ 732\ 836\ 369\ 851\ 221\ 295\ 882\ 297\ 369\ 220\ 244\ 077\ 472\ 773} \};
\end{aligned}$$

以下, ζ を1の原始7乗根の, ω を1の原始3乗根のひとつとする.

§ 1. Lagrange分解式 $r_1 \sim r_6$ の7乗を $R_1 \sim R_6$ とし, $t_1=R_1+R_6, t_2=R_2+R_5, t_3=R_3+R_4, t_4=R_1R_6, t_5=R_2R_5, t_6=R_3R_4$ の「候補」を求める

$C_7 \triangleright \{\text{Id}\}$ の部分に注目し, として, Lagrange の 7 次分解式をつくる.
このとき, $V(v)$ と円分方程式 $v^6+v^5+v^4+v^3+v^2+v+1$ で割った余りを考える.

In[1436]:=

```

r0 = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 // PolynomialMod[#, V[v]] &;
r1 = x1 +  $\xi$  x2 +  $\xi^2$  x3 +  $\xi^3$  x4 +  $\xi^4$  x5 +  $\xi^5$  x6 +  $\xi^6$  x7 //
  PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7,  $\xi$ ]}] &;
r2 = x1 +  $\xi^2$  x2 +  $\xi^4$  x3 +  $\xi^6$  x4 +  $\xi$  x5 +  $\xi^3$  x6 +  $\xi^5$  x7 //
  PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7,  $\xi$ ]}] &;
r3 = x1 +  $\xi^3$  x2 +  $\xi^6$  x3 +  $\xi^2$  x4 +  $\xi^5$  x5 +  $\xi$  x6 +  $\xi^4$  x7 //
  PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7,  $\xi$ ]}] &;
r4 = x1 +  $\xi^4$  x2 +  $\xi$  x3 +  $\xi^5$  x4 +  $\xi^2$  x5 +  $\xi^6$  x6 +  $\xi^3$  x7 //
  PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7,  $\xi$ ]}] &;
r5 = x1 +  $\xi^5$  x2 +  $\xi^3$  x3 +  $\xi$  x4 +  $\xi^6$  x5 +  $\xi^4$  x6 +  $\xi^2$  x7 //
  PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7,  $\xi$ ]}] &;
r6 = x1 +  $\xi^6$  x2 +  $\xi^5$  x3 +  $\xi^4$  x4 +  $\xi^3$  x5 +  $\xi^2$  x6 +  $\xi$  x7 //
  PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7,  $\xi$ ]}] &;

```

解と係数の関係より $r_0 = 0$. また $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, $\tau = (1, 3, 2, 6, 4, 5)$ とおくと, $F_{42} = \langle \sigma, \tau \rangle$ だから

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{ll} r_1 \text{ を } \sigma \text{ で移すと } r_1 \xrightarrow{\sigma} \zeta^6 r_1, & \tau \text{ で移すと } r_1 \xrightarrow{\tau} \zeta^4 r_5 \\ r_2 \text{ を } \sigma \text{ で移すと } r_2 \xrightarrow{\sigma} \zeta^5 r_2, & \tau \text{ で移すと } r_2 \xrightarrow{\tau} \zeta r_3 \\ r_3 \text{ を } \sigma \text{ で移すと } r_3 \xrightarrow{\sigma} \zeta^4 r_3, & \tau \text{ で移すと } r_3 \xrightarrow{\tau} \zeta^5 r_1 \\ r_4 \text{ を } \sigma \text{ で移すと } r_4 \xrightarrow{\sigma} \zeta^3 r_4, & \tau \text{ で移すと } r_4 \xrightarrow{\tau} \zeta^2 r_6 \\ r_5 \text{ を } \sigma \text{ で移すと } r_5 \xrightarrow{\sigma} \zeta^2 r_5, & \tau \text{ で移すと } r_5 \xrightarrow{\tau} \zeta^6 r_4 \\ r_6 \text{ を } \sigma \text{ で移すと } r_6 \xrightarrow{\sigma} \zeta r_6, & \tau \text{ で移すと } r_6 \xrightarrow{\tau} \zeta^3 r_2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

即ち, σ は分解式を「 $r_1 \rightarrow \zeta^6 r_1 \rightarrow \zeta^5 r_1 \rightarrow \zeta^4 r_1 \rightarrow \zeta^3 r_1 \rightarrow \zeta^2 r_1 \rightarrow \zeta r_1 \rightarrow r_1$ 」のように移し, τ は「 $r_1 \rightarrow \zeta^4 r_5 \rightarrow \zeta^3 r_4 \rightarrow \zeta^5 r_6 \rightarrow \zeta r_2 \rightarrow \zeta^2 r_3 \rightarrow r_1$ 」のように移す.

さらに f の最小分解体 K 内の 同型写像 $\phi: \zeta \rightarrow \zeta^4$ とすると (ζ^i を無視すれば) τ と 同様に移す.

(by ϕ) $r_1 \rightarrow r_5 \rightarrow r_4 \rightarrow r_6 \rightarrow r_2 \rightarrow r_3 \rightarrow r_1 \cdots$

以下, $R_1=r_1^7, R_2=r_2^7, R_3=r_3^7, R_4=r_4^7, R_5=r_5^7, R_6=r_6^7$ とおく. (#)より σ で **$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ は不変.** τ で「 **$R_1 \rightarrow R_5 \rightarrow R_4 \rightarrow R_6 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_1$** 」のように移る. 故に $t_1=R_1+R_6, t_2=R_2+R_5, t_3=R_3+R_4$ とすると, t_1, t_2, t_3 は σ で動かずさらに「 $t_1 \xrightarrow{\tau} t_2 \xrightarrow{\tau} t_3 \xrightarrow{\tau} t_1 \cdots$ 」となるから $u_1=t_1+t_2+t_3 (=R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+R_6)$ は σ や τ で動かない. さらに「 $u_2=t_1+\omega t_2+\omega^2 t_3, u_3=t_1+\omega^2 t_2+\omega t_3$ 」とおくと, 「 $u_2 \xrightarrow{\tau} \omega^2 u_2, u_3 \xrightarrow{\tau} \omega u_3$ 」だから $u_2^3, u_3^3, u_2 \cdot u_3$ はやはり σ や τ で動かない. ゆえに $u_1, u_2^3, u_3^3, u_2 \cdot u_3$ は F_{42} の固定体 $Q(\zeta, \omega)$ に入るから「単純計算」で値は求まる.

In[1440]:=

```
R1 = r1^7; R2 = r2^7; R3 = r3^7; R4 = r4^7; R5 = r5^7; R6 = r6^7;
t1 = R1 + R6 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, 5]}] &;
t2 = R2 + R5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, 5]}] &;
t3 = R3 + R4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, 5]}] &;
```

In[1444]:=

```
u1 = t1 + t2 + t3
u2 = t1 + ω t2 + ω^2 t3;
u3 = t1 + ω^2 t2 + ω t3;
u2cubed = u2^3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, 5], Cyclotomic[3, ω]}] &
u3cubed = u3^3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, 5], Cyclotomic[3, ω]}] &
m = u2 u3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, 5], Cyclotomic[3, ω]}] &
```

Out[1444]=

- 348 145

Out[1447]=

- 39 804 556 332 931 117 - 2 932 099 340 252 628 ω

Out[1448]=

- 36 872 456 992 678 489 + 2 932 099 340 252 628 ω

Out[1449]=

113 865 055 213

$u_1 \sim u_3$ の定義式より「 $t_1=(u_1+u_2+u_3)/3, t_2=(u_1+\omega^2 u_2+\omega u_3)/3, t_3=(u_1+\omega u_2+\omega^2 u_3)/3$ 」であるが, $(u_2, \omega^2 u_2, \omega u_2)$ は「(*) $x^3=u_2^3$ 」の異なる3つの解であり, かつ $(u_3, \omega u_3, \omega^2 u_3)$ は、(*)の解が決まると一通りに決まるので, (*)の任意の3乗根の一つを改めて u_2 と固定し, さらに $u_3=m/u_2$ とすると, t_1, t_2, t_3 の「集合」は, $\{t_1, t_2, t_3\}=\{(u_1+u_2+u_3)/3, (u_1+\omega^2 u_2+\omega u_3)/3, (u_1+\omega u_2+\omega^2 u_3)/3\}$ となる. (t_1, t_2, t_3 を解とする3次方程式を作って求めることも容易. 補足B 参照)

さらに, この例では $u_2^3+u_3^3, u_2 u_3$ が実数だから, u_2 と u_3 は複素共役. 故に集合 $t_{123} \equiv \{t_1, t_2, t_3\}$ は,

In[1450]:=

```

u2 = u2cubed^(1 / 3)
u3 = u3cubed^(1 / 3)
t123 = 1 / 3 { (u1 + u2 + u3), (u1 + ω^2 u2 + ω u3), (u1 + ω u2 + ω^2 u3) } // Simplify

```

Out[1450]=

$$(-39804556332931117 - 2932099340252628\omega)^{1/3}$$

Out[1451]=

$$(-36872456992678489 + 2932099340252628\omega)^{1/3}$$

Out[1452]=

$$\left\{ \frac{49}{3} \left(-7105 + 91^{1/3} (-3717946663 - 273872892\omega)^{1/3} + 91^{1/3} (-3444073771 + 273872892\omega)^{1/3} \right), \right. \\ \frac{49}{3} \left(-7105 + 91^{1/3} (-3717946663 - 273872892\omega)^{1/3} \omega^2 + \right. \\ \left. 91^{1/3} \omega (-3444073771 + 273872892\omega)^{1/3} \right), \frac{49}{3} \left(-7105 + \right. \\ \left. 91^{1/3} (-3717946663 - 273872892\omega)^{1/3} \omega + 91^{1/3} \omega^2 (-3444073771 + 273872892\omega)^{1/3} \right) \left. \right\}$$

同様に, $t_4 = R_1 R_6$, $t_5 = R_2 R_5$, $t_6 = R_3 R_4$ とすると, t_4 ,

t_5 , t_6 は σ で動かずさらに「 $t_4 \xrightarrow{\tau} t_5 \xrightarrow{\tau} t_6 \xrightarrow{\tau} t_4 \cdots$ 」となるから $v_1 = t_4 + t_5 + t_6$ ($= R_1 R_6 + R_2 R_5 + R_3 R_4$) は σ や τ で動かない。

さらに「 $v_2 = t_4 + \omega t_5 + \omega^2 t_6$, $v_3 = t_4 + \omega^2 t_5 + \omega t_6$ 」とおくと

「 $v_2 \xrightarrow{\tau} \omega^2 v_2$, $v_3 \xrightarrow{\tau} \omega v_3$ 」だから v_2^3 , v_3^3 , $v_2 v_3$ はやはり σ や τ で動かない。

故に これらは F_{42} の固定体 $Q(\xi, \omega)$ に入るから「単純計算」で値は求まる。

In[1453]:=

```

t4 = R1 R6 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ]}] &;
t5 = R2 R5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ]}] &;
t6 = R3 R4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ]}] &;

```

In[1456]:=

```

v1 = t4 + t5 + t6
v2 =
  t4 + ω t5 + ω^2 t6 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ], Cyclotomic[3, ω]}] &;
v3 = t4 + ω^2 t5 + ω t6 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ], Cyclotomic[3, ω]}] &;
v2cubed = v2^3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ], Cyclotomic[3, ω]}] &
v3cubed = v3^3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ], Cyclotomic[3, ω]}] &
n = v2 v3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ], Cyclotomic[3, ω]}] &

```

Out[1456]=

2 004 974 258

Out[1459]=

8 062 246 690 864 754 612 862 122 849 - 2 406 725 831 991 179 332 422 516 ω

Out[1460]=

8 064 653 416 696 745 792 194 545 365 + 2 406 725 831 991 179 332 422 516 ω

Out[1461]=

4 021 122 247 877 533 981

$\{t_1, t_2, t_3\} = t_{123}$ と同様にして, 集合 $t_{456} \equiv \{t_4, t_5, t_6\}$ は

In[1462]:=

```

v2 = v2cubed^(1 / 3)
v3 = v3cubed^(1 / 3)
t456 = 1 / 3 { (v1 + v2 + v3), (v1 + ω^2 v2 + ω v3), (v1 + ω v2 + ω^2 v3) } // Simplify

```

Out[1462]=

$$(8\,062\,246\,690\,864\,754\,612\,862\,122\,849 - 2\,406\,725\,831\,991\,179\,332\,422\,516\,\omega)^{1/3}$$

Out[1463]=

$$(8\,064\,653\,416\,696\,745\,792\,194\,545\,365 + 2\,406\,725\,831\,991\,179\,332\,422\,516\,\omega)^{1/3}$$

Out[1464]=

$$\left\{ \frac{2401}{3} \left(835\,058 + 7^{2/3} \times 13^{1/3} (914\,408\,322\,573\,077 - 272\,967\,352\,068\,\omega)^{1/3} + 7^{2/3} \times 13^{1/3} (914\,681\,289\,925\,145 + 272\,967\,352\,068\,\omega)^{1/3} \right), \right. \\ \frac{2401}{3} \left(835\,058 + 7^{2/3} \times 13^{1/3} (914\,408\,322\,573\,077 - 272\,967\,352\,068\,\omega)^{1/3} \omega^2 + 7^{2/3} \times 13^{1/3} \omega (914\,681\,289\,925\,145 + 272\,967\,352\,068\,\omega)^{1/3} \right), \\ \left. \frac{2401}{3} \left(835\,058 + 7^{2/3} \times 13^{1/3} (914\,408\,322\,573\,077 - 272\,967\,352\,068\,\omega)^{1/3} \omega + 7^{2/3} \times 13^{1/3} \omega^2 (914\,681\,289\,925\,145 + 272\,967\,352\,068\,\omega)^{1/3} \right) \right\}$$

R1~R6を求めるにはセットが正しく選ばれていればよいので(例えばt1=R2+R5となってもよいが、この場合はt4=R2*R5にならないといけない), (t1, t2, t3, t4, t5, t6) の候補は次の3!通りとしてよい.

$$(t_{123}, t_{456}[\{1,2,3\}]], (t_{123}, t_{456}[\{1,3,2\}]], (t_{123}, t_{456}[\{2,1,3\}]] \dots (t_{123}, t_{456}[\{3,2,1\}]]$$

本来はこれらの値からR1~R6, さらに7乗根を取ってr1~r6の候補を求め, その中から束縛条件(補足A)を満たすr1~r6の値を選ぶべきであるが, これはかなり大変なので, 数値計算を使って正しいr1~r6の値を求めることにする.

S2. 数値計算を利用してr1~r6 の値を求める

このセクションでは、数値解を「\$」を前に付けて表す。(\$x1~\$x7については定義の変更を伴う) 後の再利用のため、変数をセーブしておく。

```
In[1465]:=
oldr = {r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6};
oldR = {R1, R2, R3, R4, R5, R6};
oldt = {t1, t2, t3, t4, t5, t6};
```

S2 - 1. 数値計算を利用してt1~t6を求める

まずは原始元vの値をNSolveで求めて、それをsols (f(x)の根を原始元で表した式) へ代入し、f の根の数値解(\$x1~\$x7)を求める

```
In[1466]:=
v0 = (v /. NSolve[V[v] == 0, v])[[1]]
{$x1, $x2, $x3, $x4, $x5, $x6, $x7} = sols /. {v -> v0}

Out[1466]=
-2.38614 - 0.855759 I

Out[1467]=
{-1.3888 + 7.89296 × 10-8 I, 0.736559 + 0.408261 I, 0.997338 + 0.855759 I,
-1.0395 - 0.82652 I, -1.0395 + 0.82652 I, 0.997337 - 0.855758 I, 0.736558 - 0.408261 I}
```

これらの\$x1~\$x7と、 $\zeta = \cos[2\pi/7] + i \sin[2\pi/7]$ を代入した r0~r6, R1~R6, t1~t6 の値を求め、最後に \$t1~\$t6 をまとめて表示すると、

```
In[1468]:=
ζ = Cos[2 Pi / 7] + I Sin[2 Pi / 7];
$r1 = $x1 + ζ $x2 + ζ^2 $x3 + ζ^3 $x4 + ζ^4 $x5 + ζ^5 $x6 + ζ^6 $x7;
$r2 = $x1 + ζ^2 $x2 + ζ^4 $x3 + ζ^6 $x4 + ζ $x5 + ζ^3 $x6 + ζ^5 $x7;
$r3 = $x1 + ζ^3 $x2 + ζ^6 $x3 + ζ^2 $x4 + ζ^5 $x5 + ζ $x6 + ζ^4 $x7;
$r4 = $x1 + ζ^4 $x2 + ζ $x3 + ζ^5 $x4 + ζ^2 $x5 + ζ^6 $x6 + ζ^3 $x7;
$r5 = $x1 + ζ^5 $x2 + ζ^3 $x3 + ζ $x4 + ζ^6 $x5 + ζ^4 $x6 + ζ^2 $x7;
$r6 = $x1 + ζ^6 $x2 + ζ^5 $x3 + ζ^4 $x4 + ζ^3 $x5 + ζ^2 $x6 + ζ $x7;
{$R1, $R2, $R3, $R4, $R5, $R6} = {$r1, $r2, $r3, $r4, $r5, $r6}^7;
$t1 = $R1 + $R6;
$t2 = $R2 + $R5;
$t3 = $R3 + $R4;
$t4 = $R1 $R6;
$t5 = $R2 $R5;
$t6 = $R3 $R4;
{$t1, $t2, $t3, $t4, $t5, $t6}

Out[1482]=
{698.546 - 0.00172395 I, -340.952. + 0.431696 I, -7890.57 + 0.0245842 I,
-27.7729 + 0.000438804 I, 2.00517 × 109 + 4675.17 I, -199534. + 1.36435 I}
```

一方,\$1でもとめた t1~t6 の厳密解の近似値は, $\omega=(-1+\sqrt{-3})/2$ としたとき、

```
In[1483]:=
{t123, t456} = {t123, t456} /. {ω -> (-1 + Sqrt[-3]) / 2};
```

In[1484]:=

N[{t123, t456}]

Out[1484]=

$$\left\{ \left\{ 698.548 + 0. \, i, -340953. - 7.42754 \times 10^{-12} \, i, -7890.57 + 1.48551 \times 10^{-11} \, i \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 2.00517 \times 10^9 + 0. \, i, -199535. + 0. \, i, -27.7729 + 0. \, i \right\} \right\}$$

上の2つを比較すると正しいt1~t6の値は次のようになる

In[1485]:=

{t1, t2, t3} = t123;**{t4, t5, t6} = t456[[{3, 1, 2}]];**

\$2 - 2. 数値計算を利用してr1~r6を求める

t1~t6に正しい厳密解が入ったので R16={R1, R6}, R25={R2, R5}, R34={R3, R4} は各々次の2次方程式の2解となる

In[1487]:=

R16 = y /. Solve[y^2 - t1 y + t4 == 0, y];**R25 = y /. Solve[y^2 - t2 y + t5 == 0, y];****R34 = y /. Solve[y^2 - t3 y + t6 == 0, y];**

これらの近似値と, \$R1~\$R6 を比べる.

In[1490]:=

{R16, R25, R34} // N

Out[1490]=

$$\left\{ \left\{ -0.0397559 + 0. \, i, 698.588 + 0. \, i \right\}, \right. \\ \left\{ -334967. - 7.56269 \times 10^{-12} \, i, -5986.19 + 1.35153 \times 10^{-13} \, i \right\}, \\ \left. \left\{ -7915.77 + 1.48079 \times 10^{-11} \, i, 25.2072 + 4.71548 \times 10^{-14} \, i \right\} \right\}$$

In[1491]:=

{{R1, R6}, {R2, R5}, {R3, R4}}

Out[1491]=

$$\left\{ \left\{ -0.0397559 + 5.29993 \times 10^{-7} \, i, 698.586 - 0.00172448 \, i \right\}, \right. \\ \left\{ -334966. + 0.453762 \, i, -5986.18 - 0.0220663 \, i \right\}, \\ \left. \left\{ 25.2071 - 0.0000937734 \, i, -7915.78 + 0.024678 \, i \right\} \right\}$$

\$R1~\$R6の値とR16, R25, R34の値を比較して,R1~R6の厳密解が求まる. (R1のみを表示)

In[1492]:=

```
{R1, R6} = R16;
{R2, R5} = R25;
{R3, R4} = R34[[{2, 1}]];
R1
```

Out[1495]=

$$\begin{aligned}
& \left(4802 \right. \\
& \quad \left(835\,058 + \frac{1}{2} \times 7^{2/3} (-1 + i\sqrt{3}) (13 (914\,408\,322\,573\,077 - 136\,483\,676\,034 (-1 + i\sqrt{3})))^{1/3} + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{4} \times 7^{2/3} (-1 + i\sqrt{3})^2 (13 (914\,681\,289\,925\,145 + 136\,483\,676\,034 (-1 + i\sqrt{3})))^{1/3} \right) \Bigg/ \\
& \quad \left(3 \left(\frac{49}{3} (-7105 + (91 (-3\,717\,946\,663 - 136\,936\,446 (-1 + i\sqrt{3})))^{1/3} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (91 (-3\,444\,073\,771 + 136\,936\,446 (-1 + i\sqrt{3})))^{1/3} \right) + \right. \\
& \quad \sqrt{\left(\frac{2401}{9} (-7105 + (91 (-3\,717\,946\,663 - 136\,936\,446 (-1 + i\sqrt{3})))^{1/3} + \right. \\
& \quad \left. (91 (-3\,444\,073\,771 + 136\,936\,446 (-1 + i\sqrt{3})))^{1/3} \right)^2 - \frac{9604}{3} \left(835\,058 + \frac{1}{2} \times 7^{2/3} \right. \\
& \quad \left. (-1 + i\sqrt{3}) (13 (914\,408\,322\,573\,077 - 136\,483\,676\,034 (-1 + i\sqrt{3})))^{1/3} + \frac{1}{4} \times \right. \\
& \quad \left. 7^{2/3} (-1 + i\sqrt{3})^2 (13 (914\,681\,289\,925\,145 + 136\,483\,676\,034 (-1 + i\sqrt{3})))^{1/3} \right) \Bigg) \Bigg)
\end{aligned}$$

In[1496]:=

```
N[{R1, R2, R3, R4, R5, R6}]
```

Out[1496]=

$$\begin{aligned}
& \left\{ -0.0397559 + 0. i, -334\,967. - 7.56269 \times 10^{-12} i, 25.2072 + 4.71548 \times 10^{-14} i, \right. \\
& \quad \left. -7915.77 + 1.48079 \times 10^{-11} i, -5986.19 + 1.35153 \times 10^{-13} i, 698.588 + 0. i \right\}
\end{aligned}$$

どうやら R1~R6は全て実数である。後は7乗根をとるだけ。これも数値計算を使っても良いが「R1~R6が全て実数の時、r1~r6は全て実数としても一般性を失わない」事が5次方程式の時と同様に言えるので、r1~r6の値は次のようになる(r1のみ表示. また再利用のため r1mainとおく)

In[1497]:=

```
real7thRoot[x_] := If[Re[N[x]] > 0, x^(1/7), -(-x)^(1/7)];
{r1, r2, r3, r4, r5, r6} = real7thRoot /@ {R1, R2, R3, R4, R5, R6};
r1main = r1
```

Out[1499]=

[illegible]

§3. $x_1 \sim x_7$ の値を求める

(#) より $x_1 \sim x_7$ の値は次の様になる(x_1, x_2 のみを表示してます.)

In[150]:=

```
x1 = 1 / 7 (r1 + r2 + r3 + r4 + r5 + r6) // Simplify // TraditionalForm
x2 = 1 / 7 (ξ^6 r1 + ξ^5 r2 + ξ^4 r3 + ξ^3 r4 + ξ^2 r5 + ξ r6) // Simplify // TraditionalForm
x3 = 1 / 7 (ξ^5 r1 + ξ^3 r2 + ξ r3 + ξ^6 r4 + ξ^4 r5 + ξ^2 r6);
x4 = 1 / 7 (ξ^4 r1 + ξ r2 + ξ^5 r3 + ξ^2 r4 + ξ^6 r5 + ξ^3 r6);
x5 = 1 / 7 (ξ^3 r1 + ξ^6 r2 + ξ^2 r3 + ξ^5 r4 + ξ r5 + ξ^4 r6);
x6 = 1 / 7 (ξ^2 r1 + ξ^4 r2 + ξ^6 r3 + ξ r4 + ξ^3 r5 + ξ^5 r6);
x7 = 1 / 7 (ξ r1 + ξ^2 r2 + ξ^3 r3 + ξ^4 r4 + ξ^5 r5 + ξ^6 r6);
```

Out[1500]//TraditionalForm=

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{7} \left(-7^{2/7} \left(\left(-1670116 + 7^{2/3} (1-i\sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111-136483676034i\sqrt{3})} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 7^{2/3} (1+i\sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111+136483676034i\sqrt{3})} \right) / \right. \\
& \quad \left(-7105 + \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} + \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})} + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left(-10020696 + 6 \times 7^{2/3} (1-i\sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111-136483676034i\sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6 \times 7^{2/3} (1+i\sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111+136483676034i\sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (-7105 + \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} + \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})})^2 \right) \right) \right)^{(1/7)} + \\
& 7^{2/7} \left(\frac{1}{6} \left(-7105 + \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} + \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left(-10020696 + 6 \times 7^{2/3} (1-i\sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111-136483676034i\sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6 \times 7^{2/3} (1+i\sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111+136483676034i\sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (-7105 + \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} + \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})})^2 \right) \right) \right)^{(1/7)} - \\
& \left(\frac{49}{12} \left(14210 + (1-i\sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} + (1+i\sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})} \right) + \right. \\
& \quad \frac{49}{6} \sqrt{\left(-10020696 + 6 \times 7^{2/3} (1+i\sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111-136483676034i\sqrt{3})} + \right. \\
& \quad \left. 6 \times 7^{2/3} (1-i\sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111+136483676034i\sqrt{3})} - \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{4} \left(14210i - \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})} (-i+\sqrt{3}) + \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} (i+\sqrt{3}) \right)^2 \right) \right)^{(1/7)} + \\
& (1/7) + \left(\frac{49}{12} i \left(14210i - \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})} (-i+\sqrt{3}) + \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} (i+\sqrt{3}) \right) + \right. \\
& \quad \frac{49}{6} \sqrt{\left(-10020696 + 6 \times 7^{2/3} (1+i\sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111-136483676034i\sqrt{3})} + \right. \\
& \quad \left. 6 \times 7^{2/3} (1-i\sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111+136483676034i\sqrt{3})} - \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{4} \left(14210i - \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})} (-i+\sqrt{3}) + \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} (i+\sqrt{3}) \right)^2 \right) \right)^{(1/7)} + \\
& (1/7) - \left(\frac{49}{12} \left(14210 + (1+i\sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} + (1-i\sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})} \right) - \right. \\
& \quad \frac{49}{6} \sqrt{\left(-12 \left(835058 + 7^{2/3} \sqrt[3]{13(914544806249111-136483676034i\sqrt{3})} + 7^{2/3} \sqrt[3]{13(914544806249111+136483676034i\sqrt{3})} \right) - \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{4} \left(14210i - \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} (-i+\sqrt{3}) + \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})} (i+\sqrt{3}) \right)^2 \right) \right)^{(1/7)} - \\
& (1/7) - \left(\frac{49}{12} \left(14210 + (1+i\sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} + (1-i\sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})} \right) + \right. \\
& \quad \frac{49}{6} \sqrt{\left(-12 \left(835058 + 7^{2/3} \sqrt[3]{13(914544806249111-136483676034i\sqrt{3})} + 7^{2/3} \sqrt[3]{13(914544806249111+136483676034i\sqrt{3})} \right) - \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{4} \left(14210i - \sqrt[3]{91(-3581010217-136936446i\sqrt{3})} (-i+\sqrt{3}) + \sqrt[3]{91(-3581010217+136936446i\sqrt{3})} (i+\sqrt{3}) \right)^2 \right) \right)^{(1/7)} \Bigg)
\end{aligned}$$

Out[1501]//TraditionalForm=

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{7} \left(7^{2/7} \left((-1670116 + 7^{2/3} (1 - i \sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111 - 136483676034 i \sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. 7^{2/3} (1 + i \sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111 + 136483676034 i \sqrt{3})} \right) / \\
& \quad \left(-7105 + \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} + \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})} + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left(-10020696 + 6 \times 7^{2/3} (1 - i \sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111 - 136483676034 i \sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6 \times 7^{2/3} (1 + i \sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111 + 136483676034 i \sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (-7105 + \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} + \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})})^2 \right) \right)^{(1/7)} \\
& \quad \left(\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \right)^6 + 7^{2/7} \left(\frac{1}{6} \left(-7105 + \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} + \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left(-10020696 + 6 \times 7^{2/3} (1 - i \sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111 - 136483676034 i \sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6 \times 7^{2/3} (1 + i \sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111 + 136483676034 i \sqrt{3})} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})} \right)^2 \right) \right)^{(1/7)} \left(i \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \right) - \\
& \quad \left(\frac{49}{12} (14210 + (1 + i \sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} + (1 - i \sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})}) - \right. \\
& \quad \frac{49}{6} \sqrt{\left(-12 (835058 + 7^{2/3} \sqrt[3]{13(914544806249111 - 136483676034 i \sqrt{3})} + \right. \\
& \quad \left. 7^{2/3} \sqrt[3]{13(914544806249111 + 136483676034 i \sqrt{3})} \right) - \frac{1}{4} (14210 i - \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} \\
& \quad \left. (-i + \sqrt{3}) + \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})} (i + \sqrt{3}) \right)^2 \right)^{(1/7)} \left(i \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \right)^2 - \\
& \quad \left(\frac{49}{12} (14210 + (1 - i \sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} + (1 + i \sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})}) + \right. \\
& \quad \frac{49}{6} \sqrt{\left(-10020696 + 6 \times 7^{2/3} (1 + i \sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111 - 136483676034 i \sqrt{3})} + \right. \\
& \quad \left. 6 \times 7^{2/3} (1 - i \sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111 + 136483676034 i \sqrt{3})} \right) - \frac{1}{4} (14210 i - \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})} \\
& \quad \left. (-i + \sqrt{3}) + \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} (i + \sqrt{3}) \right)^2 \right)^{(1/7)} \left(i \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \right)^3 + \\
& \quad \left(\frac{49}{12} i (14210 i - \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})} (-i + \sqrt{3}) + \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} (i + \sqrt{3}) \right) + \\
& \quad \frac{49}{6} \sqrt{\left(-10020696 + 6 \times 7^{2/3} (1 + i \sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111 - 136483676034 i \sqrt{3})} + \right. \\
& \quad \left. 6 \times 7^{2/3} (1 - i \sqrt{3}) \sqrt[3]{13(914544806249111 + 136483676034 i \sqrt{3})} \right) - \frac{1}{4} (14210 i - \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})} \\
& \quad \left. (-i + \sqrt{3}) + \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} (i + \sqrt{3}) \right)^2 \right)^{(1/7)} \left(i \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \right)^4 - \\
& \quad \left(\frac{49}{12} (14210 + (1 + i \sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} + (1 - i \sqrt{3}) \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})}) + \right. \\
& \quad \frac{49}{6} \sqrt{\left(-12 (835058 + 7^{2/3} \sqrt[3]{13(914544806249111 - 136483676034 i \sqrt{3})} + \right. \\
& \quad \left. 7^{2/3} \sqrt[3]{13(914544806249111 + 136483676034 i \sqrt{3})} \right) - \frac{1}{4} (14210 i - \sqrt[3]{91(-3581010217 - 136936446 i \sqrt{3})} \\
& \quad \left. (-i + \sqrt{3}) + \sqrt[3]{91(-3581010217 + 136936446 i \sqrt{3})} (i + \sqrt{3}) \right)^2 \right)^{(1/7)} \left(i \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \right)^5 \right)
\end{aligned}$$

念のため, 上のx1~x7の値と NSolve で求めた解を比べてみると, ご覧の様に一致します. (Sort がうまく働いていませんが「謎」です)

In[1507]:=

{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7} // N // Chop // Sort

Out[1507]=

$$\{-1.0395 + 0.82652 i, -1.0395 - 0.82652 i, 0.736558 - 0.408262 i, \\ 0.997338 - 0.855759 i, 0.997338 + 0.855759 i, -1.3888, 0.736558 + 0.408262 i\}$$

In[1508]:=

x /. NSolve[f[x] == 0, x] // Sort

Out[1508]=

$$\{-1.3888, -1.0395 - 0.82652 i, -1.0395 + 0.82652 i, 0.736558 - 0.408262 i, \\ 0.736558 + 0.408262 i, 0.997338 - 0.855759 i, 0.997338 + 0.855759 i\}$$

§4. 補足

まず、最初の定義に戻ります。§2の冒頭でセーブしておいたデータを入力します。

```
In[150]:=
ClearAll[ξ, ω]
{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7} = sols;
{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} = oldr;
{R1, R2, R3, R4, R5, R6} = oldR;
{t1, t2, t3, t4, t5, t6} = oldt;
```

§4A. 束縛条件を考慮して、正しい $t_1 \sim t_6$ の値を求めることも可能?

5次方程式では、 $R_1 \sim R_4$ の取りえる値をすべて考え、さらに5つの5乗根をとり、そのうち束縛条件($r_1 r_2^2 + r_4 r_3^2, r_3 r_1^2 + r_2 r_4^2$)をみたす $r_1 \sim r_4$ を求めました。7次方程式でも同様の束縛条件を考えることもできます。 $p = r_1 r_3^2 + r_2 r_6^2 + r_4 r_5^2$, $q = r_3 r_2^2 + r_5 r_1^2 + r_6 r_4^2$ とおくと、 p, q は σ によって変わらず、 $p \xrightarrow{\tau} q$, $q \xrightarrow{\tau} p$ であるから、 $p+q$ と pq は σ, τ によって変わらない。故に $p+q$ と pq は $Q(\zeta, \omega)$ に含まれる。「単純計算」して、

```
In[1514]:=
p = r1 r3^2 + r2 r6^2 + r4 r5^2 //
  PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ], Cyclotomic[3, ω]}] &;
q = r3 r2^2 + r5 r1^2 + r6 r4^2 //
  PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ], Cyclotomic[3, ω]}] &;
p + q // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ], Cyclotomic[3, ω]}] &
p q // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ], Cyclotomic[3, ω]}] &
```

```
Out[1516]=
```

7

```
Out[1517]=
```

- 7791

ゆえに p, q の値は

```
In[1518]:=
```

```
x /. Solve[x^2 - 7 x - 7791 == 0, x]
```

```
Out[1518]=
```

$$\left\{ \frac{7}{2} (1 - 7 \sqrt{13}), \frac{7}{2} (1 + 7 \sqrt{13}) \right\}$$

取りえるすべての $R_1 \sim R_6$ の値に対して7乗根を考え、上の束縛条件を満たす $r_1 \sim r_6$ を求めることも可能でしょう。しかしそれはかなり大変。

§4B. Lagrangeの3次分解式u1~u3を使わずに、3次方程式の解の公式から、t1~t6の候補を求めることも可能

t1, t2, t3は σ で動かずさらに「 $t1 \xrightarrow{\tau} t2 \xrightarrow{\tau} t3 \xrightarrow{\tau} t1 \cdots$ 」となるから $t1 \ t2 \ t3$,
 $t1 \ t2 + t2 \ t3 + t3 \ t1$, $t1 + t2 + t3$ は σ, τ で動かない.
 ゆえにこれらは F_{42} の固定体 $Q(\xi, \omega)$ に入るから, 「単純計算」で値は求まる.

In[1519]:=

```
p1 = t1 + t2 + t3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ]}] &
p2 = t1 t2 + t2 t3 + t3 t1 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ]}] &
p3 = t1 * t2 * t3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, ξ]}] &
```

Out[1519]=

- 348 145

Out[1520]=

2 446 628 604

Out[1521]=

1 879 311 949 312

故に, t1, t2, t3 は次の3次方程式の解となる. 分母を有理化していない点が, 本文の結果と異なる.

Out[982]=

$$\left\{ \frac{49}{3} \left(-7105 + \frac{521\,143 \times 91^{2/3}}{(-3\,581\,010\,217 + 136\,936\,446 \, i \sqrt{3})^{1/3}} + \right. \right. \\ \left. \left. (91 (-3\,581\,010\,217 + 136\,936\,446 \, i \sqrt{3}))^{1/3} \right), \right. \\ \frac{49}{6} \left(-14\,210 - \frac{521\,143 \times 91^{2/3} (1 + i \sqrt{3})}{(-3\,581\,010\,217 + 136\,936\,446 \, i \sqrt{3})^{1/3}} + \right. \\ \left. i (91 (-3\,581\,010\,217 + 136\,936\,446 \, i \sqrt{3}))^{1/3} (i + \sqrt{3}) \right), \\ \frac{49}{6} \left(-14\,210 + (-1 - i \sqrt{3}) (91 (-3\,581\,010\,217 + 136\,936\,446 \, i \sqrt{3}))^{1/3} + \right. \\ \left. \left. \frac{521\,143 \, i \, 91^{2/3} (i + \sqrt{3})}{(-3\,581\,010\,217 + 136\,936\,446 \, i \sqrt{3})^{1/3}} \right) \right\}$$

同様にして t4, t5, t6 も求まる. この方が早くて簡単. しかし「3 次方程式の解の公式はLagrangeの3次分解式を使っている」ので, 本文の方法と本質的には同じ.

§4C. $t_1=R_1+R_6$, $t_2=R_2+R_5$, $t_3=R_3+R_4$ の値を求める代わりに, 最初に $s_1=R_1+R_2+R_4$, $s_2=R_3+R_5+R_6$ の値を求めることも可能

即ち「3次方程式→2次方程式」の代わりに「2次方程式→3次方程式」でも解けるということ. ただし, こちらの方が時間がかかります.

「 σ で $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ は不変. τ で「 $R_1 \rightarrow R_5 \rightarrow R_4 \rightarrow R_6 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_1$ 」のように移るので, $s_1=R_1+R_4+R_2$, $s_2=R_5+R_6+R_3$ とおくと, s_1, s_2 は σ で動かず, τ によって互いに移る. ゆえに s_1+s_2 , $s_1 s_2$ は σ, τ によって不変なので F_{42} の固定体に入る. 「単純計算」すると,

```
In[1522]:=
s1 = R1 + R4 + R2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, 5]}] &;
s2 = R5 + R6 + R3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, 5]}] &;
p = s1 + s2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, 5]}] &
q = s1 * s2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[7, 5]}] &
```

```
Out[1524]=
- 348 145
```

```
Out[1525]=
1 804 382 713
```

これから $s_1=R_1+R_2+R_4$ と $s_2=R_3+R_5+R_6$ を解に持つ2次方程式を作り, s_1, s_2 の値を求めると

```
In[1526]:=
x /. Solve[x^2 - p x + q == 0, x]
```

```
Out[1526]=
{ 2401/2 (-145 - 39 Sqrt[13]), 2401/2 (-145 + 39 Sqrt[13]) }
```

同様に, $(R_1 R_4 + R_4 R_2 + R_2 R_1) + (R_3 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_3)$,

$(R_1 R_4 + R_4 R_2 + R_2 R_1)(R_3 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_3)$ と $(R_1 R_4 R_2)(R_3 R_5 R_6)$,

$(R_1 R_4 R_2) + (R_3 R_5 R_6)$ は σ, τ によって不変なので F_{42} の固定体に入る.

故に「単純計算」でこれらの値は求まる. 計算はかなり時間がかかるので, 経過は省略するが結果は

$$\{R_1 R_4 + R_4 R_2 + R_2 R_1, R_3 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_3\} = \frac{117649}{2} \left\{ 22501 \pm 6261 \sqrt{13}, 22501 \mp 6261 \sqrt{13} \right\} \quad (\text{複合同順})$$

$$\{R_1 R_4 R_2, R_3 R_5 R_6\} = \{-105413504, -105413504\}$$

となる. ゆえに「 R_1, R_2, R_4 を解に持つ3次方程式」

と「 R_3, R_5, R_6 を解に持つ3次方程式」は次の4組のいずれかとなる.

$$\begin{aligned} \text{A. } & \left\{ x^3 + \frac{2401}{2} (145 + 39 \sqrt{13}) x^2 + \frac{117649}{2} (22501 + 6261 \sqrt{13}) x + 105413504 = 0, \right. \\ & \left. x^3 + \frac{2401}{2} (145 - 39 \sqrt{13}) x^2 + \frac{117649}{2} (22501 - 6261 \sqrt{13}) x + 105413504 = 0 \right\} \\ \text{B. } & \left\{ x^3 + \frac{2401}{2} (145 + 39 \sqrt{13}) x^2 + \frac{117649}{2} (22501 - 6261 \sqrt{13}) x + 105413504, \right. \\ & \left. x^3 + \frac{2401}{2} (145 - 39 \sqrt{13}) x^2 + \frac{117649}{2} (22501 + 6261 \sqrt{13}) x + 105413504 = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$C. \left\{ x^3 + \frac{2401}{2} (145 - 39 \sqrt{13}) x^2 + \frac{117649}{2} (22501 + 6261 \sqrt{13}) x + 105413504 = 0, \right. \\ \left. x^3 + \frac{2401}{2} (145 + 39 \sqrt{13}) x^2 + \frac{117649}{2} (22501 - 6261 \sqrt{13}) x + 105413504 = 0 \right\}$$

$$D. \left\{ x^3 + \frac{2401}{2} (145 - 39 \sqrt{13}) x^2 + \frac{117649}{2} (22501 - 6261 \sqrt{13}) x + 105413504 = 0, \right. \\ \left. x^3 + \frac{2401}{2} (145 + 39 \sqrt{13}) x^2 + \frac{117649}{2} (22501 + 6261 \sqrt{13}) x + 105413504 = 0 \right\}$$

本文と同様に数値計算を利用すると、正しい方程式のセットはAでR1はその1番目の解と分かる。それをR1newとおくと、

In[1527]:=

R1new =

$$x /. \text{Solve} \left[x^3 + \frac{2401}{2} (145 + 39 \sqrt{13}) x^2 + \frac{117649}{2} (22501 + 6261 \sqrt{13}) x + 105413504 == \right. \\ \left. 0, \text{Cubics} \rightarrow \text{True} \right] // \text{First}$$

Out[1527]=

$$-\frac{2401}{6} (145 + 39 \sqrt{13}) + \\ (1372 \times 7^{2/3} (116506 + 32289 \sqrt{13})) / \left(3 \left(\frac{1}{2} (-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} + \right. \right. \\ \left. \left. 3 \sqrt[3]{3 (554388682885501321 + 153759755291383332 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} + \\ \frac{49}{3} \left(\frac{7}{2} (-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} + 3 \sqrt[3]{3 (554388682885501321 + 153759755291383332 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3}$$

対応するr1の値をr1newとおくと、r1newは実数としても一般性を失わないから、

In[1528]:=

$$\mathbf{r1new = - (-R1new) ^ (1 / 7)}$$

Out[1528]=

$$-\left(\frac{2401}{6} (145 + 39 \sqrt{13}) - \right. \\ (1372 \times 7^{2/3} (116506 + 32289 \sqrt{13})) / \left(3 \left(\frac{1}{2} (-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} + \right. \right. \\ \left. \left. 3 \sqrt[3]{3 (554388682885501321 + 153759755291383332 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \left. \right) - \\ \frac{49}{3} \left(\frac{7}{2} (-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} + 3 \sqrt[3]{3 (554388682885501321 + 153759755291383332 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \left. \right)^{1/7}$$

一方、本文で求めたr1は

In[1529]:=

r1main

Out[1529]=

[illegible]

$$\ln[1\,530]:=$$
$$N[\{r1main, r1new\}]$$

Out[1530]=

$$\{-0.630833 + 0. \, \text{i}, -0.630833 - 6.59729 \times 10^{-11} \, \text{i}\}$$

2つの「形」はかなり異なるが、同じ「値」になる.

§4D. R1, R2, R3, R4, R5, R6 を解に持つ6次方程式を作りR1~R6を求めることも可能

$$\S 3 - 3 \text{ より } (R1 + R4 + R2) + (R5 + R6 + R3) = -348145$$

同様に「単純計算」で、R1~R6の基本対称式の値が求まる(計算には非常に時間がかかるので結果のみ述べる)

$$R1 R2 + R1 R3 + R1 R4 + R1 R5 + R1 R6 + \cdots + R5 R6 = 4451602862$$

$$R1 R2 R3 + R1 R2 R4 + R1 R2 R5 + \cdots + R4 R5 R6 = -12474035347599$$

$$R1 R2 R3 R4 + R1 R2 R3 R5 + R1 R2 R3 R6 + \cdots + R3 R4 R5 R6 = -11405103991346163$$

$$R1 R2 R3 R4 R5 + R1 R2 R3 R4 R6 + \cdots + R2 R3 R4 R5 R6 = -279052751765492096$$

$$R1 R2 \cdots R6 = (-105413504)^2$$

これから R1, R2, R3, R4, R5, R6 を解に持つ6次方程式 $fR(x)$ は,

In[1531]:=

$$fR[x_] = x^6 + 348145 x^5 + 4451602862 x^4 + 12474035347599 x^3 - 11405103991346163 x^2 + 279052751765492096 x + (-105413504)^2$$

Out[1531]=

$$11112006825558016 + 279052751765492096 x - 11405103991346163 x^2 + 12474035347599 x^3 + 4451602862 x^4 + 348145 x^5 + x^6$$

この方程式のGalois群は Magma によると C_6 なので可解.

よって2次と3次の方程式の組み合わせで解くことができる.

(これまでのR1~R6の値の求め方からも明らかですが...) まず判別式を取ると.

In[1532]:=

$$\text{Discriminant}[fR[x], x] // \text{Sqrt}$$

Out[1532]=

$$3355327053514724125951107001509733522036654132648314465259776 \sqrt{13}$$

よって次のように $Q(\sqrt{13})$ において、因数分解できる.

In[1533]:=

$$\text{Factor}[fR[x], \text{Extension} \rightarrow \text{Sqrt}[13]]$$

Out[1533]=

$$\frac{1}{4} \left(-210827008 + (-2647220149 + 736600389 \sqrt{13}) x + (-348145 + 93639 \sqrt{13}) x^2 - 2 x^3 \right) \\ \left(210827008 + (2647220149 + 736600389 \sqrt{13}) x + (348145 + 93639 \sqrt{13}) x^2 + 2 x^3 \right)$$

このあと3次方程式の解の公式を使えば、R1~R6が求まる. この方法は最もすっきりしているが、基本対称式の計算が非常に時間がかかるので実用的ではない. これよりは

「R1 の ζ^k ($0 \leq k \leq 6$) の係数10, 11, .. 16を求める解法」(Another_F42.nb 参照)の方が、同じく6次方程式に帰着させる解法だが、計算量がずーと少ない.