5次方程式の厳密解を求めるprogram with *Mathematica* 14　-ver2-

2025 年7月　by　`mixedmoss`

§1. プログラム

「Final_F20 . nb」 をモジュール化して, 可解で既約な5次方程式f (x) を入力するだけで, 厳密解が求まるようにプログラムしました. 3月に発表したプログラムでは 原始元とガロア群を利用していて, 計算時間が20~30秒かかりましたが, 今回は Galois 分解式を利用し,あらかじめ補助公式 (pb,pc,pd)を作っておくことにより即座に解が求まるようにしています. pb~ pd, p20 の定義など詳しい説明は「Final_F20 . nb」をご覧ください. それらの計算は非常に時間がかかるので直下の closed cell に入れてあります.(計算には計2時間ほど掛かります). したがって 新規, またはClearAll["Global`*"] のなどの後には必ず 「評価」 して下さい. ノートブック全体の評価でも 数秒です.

In[ ]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

(↓pb, pc, pd, p20　評価してください)

```
(*gの有理数解で重複度がmultiplicityのいずれかとなるものを取り出す*)
getTheta[g_,multiplicity_List]:=Module[{ichiji},ichiji = Select[FactorList[g], Exponent[#〚1〛,
If[ichiji≠{},x/.Solve[ichiji〚1,1〛==0,x]〚1〛,{}]];

calculateQuintic[f_]:=Module[{(*alist,fb,pc,pd,θa,θb,θc,θd,wa1,wa2,seki1,seki2,perms,ξ,Ra,Rb,
(*Part1 (R1,R2,R3,R4)の4つの候補Ra,Rb,Rc,Rdを求める*)
alist=(CoefficientList[f,x]//Drop[#,-1]&//Reverse){-1,1,-1,1,-1};(*{a1,a2,a3,a4,a5}*)
fb:=pb/. AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5}→alist];
fc:=pc/. AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5}→alist];
fd:=pd/. AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5}→alist];
θa=2 alist〚1〛^2-5 alist〚2〛;(*θa=r1r4+r2r3*)
θb=getTheta[fb,{1,6}];(*(r1 r4-r2 r3)^2*)
θc=getTheta[fc,{1,6}];(*θc=l1 l4+l2 l3*)
θd=getTheta[fd,{1,6}];(*θd=(l1+l4-l2-l3)^2*)
{wa1,wa2}=1/2{(4 alist〚1〛^5-5θc+√θd √5),(4 alist〚1〛^5-5θc-√θd √5)};(*{R1+R4,R2+R3}={wa1,wa2
{seki1,seki2}=(1/2{θa+Sqrt[θb],θa-Sqrt[θb]})^5;(*{R1R4,R2R3}={seki1,seki2}または{seki2,seki1}
(*case a*)Ra=Flatten[{t/.Solve[t^2-wa1 t +seki1==0],t/.Solve[t^2-wa2 t+seki2==0,t]},1]〚{1,3,4
(*case b*)Rb=Ra〚{1,3,2,4}〛;
(*case c*)Rc=Flatten[{t/.Solve[t^2-wa1 t +seki2==0],t/.Solve[t^2-wa2 t+seki1==0,t]},1]〚{1,3,4
(*case d*)Rd=Rc〚{1,3,2,4}〛;
(*Part2 Ra,Rb,Rc,Rdのうち正しいものを 数値解から求める.数値解は先頭に$を付ける*)
perms={{1,2,3,4,5},{1,3,5,2,4},{1,5,4,3,2},{1,4,2,5,3},{2,1,5,3,4},{2,5,4,1,3},{2,4,3,5,1},{
{2,3,5,1,4},{2,5,4,3,1},{2,4,1,5,3},{2,1,3,4,5},{3,1,5,2,4},{3,5,4,1,2},{3,4,2,5,1},{3,2,1,4,
$sol=x/.NSolve[f==0,x];(*数値解*)
ξ=Cos[2Pi/5]+I Sin[2Pi/5];(*最後のr1234の値はξの選択に依存する事に注意*)
$r1234Table=Table[{{1,ξ,ξ^2,ξ^3,ξ^4},{1,ξ^2,ξ^4,ξ,ξ^3},{1,ξ^3,ξ,ξ^4,ξ^2},{1,ξ^4,ξ^3,ξ^2,ξ}}
$R1234Table=$r1234Table^5//Quiet;(*$solsに対する{R1,R2,R3,R4}*)
ΔRa=Norm/@($R1234Table-Table[N[Ra],24]);(*{R1,R2,R3,R4}=Raのとき, $R1234Talbeとの差*)
ΔRb=Norm/@($R1234Table-Table[N[Rb],24]);
ΔRc=Norm/@($R1234Table-Table[N[Rc],24]);
ΔRd=Norm/@($R1234Table-Table[N[Rd],24]);
ΔRabcd={ΔRa,ΔRb,ΔRc,ΔRd};
pos=Position[ΔRabcd,Min[ΔRabcd]]〚1〛;(*厳密解{R1,R2,R3,R4}と$R1234Talbeとの差が最小のposition*)
R1234={Ra,Rb,Rc,Rd}〚pos〚1〛〛;(*{R1,R2,R3,R4}の厳密解*)
r1234=N@R1234^(1/5);(*{R1,R2,R3,R4}の偏角が最小の5乗根*)
$r1234=$r1234Table〚pos〚2〛〛;(*正しい数値解{r1,r2,r3,r4}*)
(*Part3 正しい(R1,R2,R3,R4)の組から, (R1,R2,R3,R4)^1/5 に掛けるξの指数を求める*)
power=Mod[Round[(Arg[$r1234]-Arg[r1234])/Arg[ξ]],5];
Clear[ξ];(*解をξを使って表すために「記号(偏角は2/5piで固定)」に戻す*)
{r1,r2,r3,r4}=R1234^(1/5)* ξ^power;(*{r1,r2,r3,r4}の厳密解*)
{x1,x2,x3,x4,x5}=1/5{{1,1,1,1,1},{1,ξ^4,ξ^3,ξ^2,ξ},{1,ξ^3,ξ,ξ^4,ξ^2},{1,ξ^2,ξ^4,ξ,ξ^3},{1,ξ
Print[{TraditionalForm[x1],TraditionalForm[x2],TraditionalForm[x3],TraditionalForm[x4],Tradit
];

solveQuintic[f_]:=Module[{alist,f20,θ20},alist=(CoefficientList[f,x]//Drop[#,-1]&//Reverse){
f20:=p20/. AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5}→alist];
θ20=getTheta[f20,{1}];
If[IrreduciblePolynomialQ[f]&&θ20=!={},calculateQuintic[f], Print["可解で既約な5次方程式でありませ
]]
```

§2. 使用例

可解で既約な有理数係数でmonicな5次方程式fに対応しています．コマンドや使い方は「solveQuinticProgram . nb」と同じにしました．（旧バージョンと異なりGalois群は出力されません.また旧バージョンと併用される場合は名前を変更してください.）即ち **solveQuintic[f]** と入力するだけで厳密解が得られます．但し今回は「$\zeta=\cos(2\pi/5)+i\sin(2\pi/5)$」をそのまま「$\zeta$」という記号の形で出力させました．これはその方が見やすいと感じたからです．厳密解は変数「x1,x2,x3,x4,x5」に入っているので,「ζ」を「$\cos(2\pi/5)+i\sin(2\pi/5)$」に直すことも容易です．

「solveQuinticProgram . nb」と同じ例で見てみます．

例1. $x^5-5x+12$

In[∘]:=
```
f = x^5 - 5 x + 12;
```

In[∘]:=
```
solveQuintic[f]
```

$$\left\{\frac{1}{5^{2/5}}\left(\left(\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}+\sqrt[5]{-25-10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}+5^{3/10}\sqrt[5]{-\frac{1}{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}}\right)\zeta^2+\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\right),\right.$$

$$\frac{1}{5^{2/5}}\left(5^{3/10}\sqrt[5]{-\frac{1}{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}}\zeta^3+\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\zeta^2+\sqrt[5]{-5\left(5+2\sqrt{5}\right)-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\zeta+\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\right),$$

$$\frac{1}{5^{2/5}}\left(\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\zeta^4+\left(\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}+\sqrt[5]{-25-10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\right)\zeta^3+5^{3/10}\sqrt[5]{-\frac{1}{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}}\zeta\right),$$

$$\frac{1}{5^{2/5}}\left(\sqrt[5]{-5\left(5+2\sqrt{5}\right)-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\zeta^4+\left(\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}+\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\right)\zeta+5^{3/10}\sqrt[5]{-\frac{1}{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}}\right),$$

$$\left.\frac{1}{5^{2/5}}\left(\left(\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}+5^{3/10}\sqrt[5]{-\frac{1}{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}}\right)\zeta^4+\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\zeta^3+\sqrt[5]{-5\left(5+2\sqrt{5}\right)-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\right)\right\}$$

但し $\zeta=\cos(2\pi/5)+\iota\ \sin(2\pi/5)$

In[∘]:=

例によって **NSolve**で求めた数値解と比較します．そのためには x1~x5を「$\zeta \to$ Cos[2 Pi/5] + ı Sin[2 Pi/5]」を使って変形してから 近似値を求めます． 上が厳密解の近似値で,下がNSolveを使って求めた数値解です．ご覧の様に一致します．

In[∘]:=
```
{x1, x2, x3, x4, x5} /. {ζ → Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5]} // N // Chop // Sort
x /. NSolve[f, x] // Sort
```

Out[∘]=
```
{-1.84209, -0.351854 - 1.70956 i,
 -0.351854 + 1.70956 i, 1.2729 - 0.719799 i, 1.2729 + 0.719799 i}
```

Out[∘]=
```
{-1.84209, -0.351854 - 1.70956 i,
 -0.351854 + 1.70956 i, 1.2729 - 0.719799 i, 1.2729 + 0.719799 i}
```

In[∘]:=

■ 例2. $x^5 - 3$

In[∘]:=
```
f = x^5 - 3;
solveQuintic[f]
```

$\left\{\sqrt[5]{3},\ \sqrt[5]{3}\,\zeta,\ \sqrt[5]{3}\,\zeta^2,\ \sqrt[5]{3}\,\zeta^3,\ \sqrt[5]{3}\,\zeta^4\right\}$

但し $\zeta = \cos(2\pi/5) + \iota\ \sin(2\pi/5)$

これなどは特にζを使った方が見やすい気がします．この例では計算せずとも正しいことが分かりますが，念のためチェックしてみましょう．

In[∘]:=
```
{x1, x2, x3, x4, x5} /. {ζ → Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5]} // N // Chop // Sort
x /. NSolve[f, x] // Sort
```

Out[∘]=
```
{-1.00782 - 0.732222 i, -1.00782 + 0.732222 i,
 0.384952 - 1.18476 i, 0.384952 + 1.18476 i, 1.24573}
```

Out[∘]=
```
{-1.00782 - 0.732222 i, -1.00782 + 0.732222 i,
 0.384952 - 1.18476 i, 0.384952 + 1.18476 i, 1.24573}
```

■ 例3. $x^5 - 11x^3 - 10x^2 + 11x + 10$

最後に計算時間も見ておきましょう.

In[ ]:=
```
f = x^5 - 11 x^3 - 10 x^2 + 11 x + 10;
Timing[solveQuintic[f]]
```

$$\Bigg\{\frac{1}{\sqrt[5]{2}\,5^{4/5}}\left(\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}-2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}+\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}+\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}-2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}+\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}\,5^{4/5}}\zeta\left(\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}-2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta^3+\sqrt[5]{-5\left(455+211\sqrt{5}\right)-2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta^2+\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta+\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}\,5^{4/5}}\zeta\left(\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta^3+\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta^2+\sqrt[5]{-5\left(455+211\sqrt{5}\right)-2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta+\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}-2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}\,5^{4/5}}\zeta\left(\sqrt[5]{-5\left(455+211\sqrt{5}\right)-2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta^3+\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta^2+\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}-2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta+\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}\,5^{4/5}}\zeta\left(\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta^3+\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}-2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta^2+\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\,\zeta+\sqrt[5]{-5\left(455+211\sqrt{5}\right)-2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\right)\Bigg\}$$

但し $\zeta=\cos(2\pi/5)+\iota\ \sin(2\pi/5)$

Out[ ]=

{0.34375, Null}

約0.5秒です．ガロア群を使った旧バージョンでは約30秒かかっていたので60倍ほど速いです．

なお，旧バージョンの様に 全てを累乗根で表すことも簡単です．

In[∘]:=
```
{x1, x2, x3, x4, x5} /. {ξ → Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5]} // Simplify
```

Out[∘]=

$$
\begin{aligned}
\Bigg\{ & \frac{1}{2^{1/5}\times 5^{4/5}}\Bigg(\left(-2275+1055\sqrt{5}-2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}+\left(-2275+1055\sqrt{5}+2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}+\\
&\quad \left(-2275-1055\sqrt{5}-2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}+\left(-2275-1055\sqrt{5}+2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\Bigg),\\
& \frac{1}{4\times 2^{1/5}\times 5^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\Bigg(\left(-2275+1055\sqrt{5}+2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}+\\
&\quad \frac{1}{64}\left(-2275+1055\sqrt{5}-2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{3}+\\
&\quad \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{2}\left(-5\left(455+211\sqrt{5}\right)-2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}+\\
&\quad \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-2275-1055\sqrt{5}+2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\Bigg),\\
& \frac{1}{4\times 2^{1/5}\times 5^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\Bigg(\left(-2275+1055\sqrt{5}-2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}+\\
&\quad \frac{1}{64}\left(-2275+1055\sqrt{5}+2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{3}+\\
&\quad \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-5\left(455+211\sqrt{5}\right)-2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}+\\
&\quad \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{2}\left(-2275-1055\sqrt{5}+2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\Bigg),\ \frac{1}{4\times 2^{1/5}\times 5^{4/5}}\\
& \left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\Bigg(\frac{1}{4}\left(-2275+1055\sqrt{5}-2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\\
&\quad \frac{1}{16}\left(-2275+1055\sqrt{5}+2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{2}+\\
&\quad \frac{1}{64}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{3}\left(-5\left(455+211\sqrt{5}\right)-2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}+\\
&\quad \left(-2275-1055\sqrt{5}+2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\Bigg),\ \frac{1}{4\times 2^{1/5}\times 5^{4/5}}\\
& \left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\Bigg(\frac{1}{4}\left(-2275+1055\sqrt{5}+2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\\
&\quad \frac{1}{16}\left(-2275+1055\sqrt{5}-2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{2}+\\
&\quad \left(-5\left(455+211\sqrt{5}\right)-2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}+\\
&\quad \frac{1}{64}\left(-1+\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{3}\left(-2275-1055\sqrt{5}+2\,\mathrm{i}\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\Bigg)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

最後に数値解との比較です．ご覧の様に一致しています．

In[∘]:=
```
{x1, x2, x3, x4, x5} /. {ξ → Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5]} // N // Chop // Sort
x /. NSolve[f, x] // Sort
```

Out[∘]=

{−2.3504, −1.42891, −0.813416, 1.0264, 3.56632}

Out[∘]=

{−2.3504, −1.42891, −0.813416, 1.0264, 3.56632}

§3. プログラムの解説

まず，基本の確認をします．

fの解を $x_1 \sim x_5$，ガロア群を $F_{20} = \langle \tau, \sigma \rangle$
ただし $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$，$\tau = (2, 3, 5, 4)$ とします．ここで Lagrange 分解式

$$(\sharp 1)\left\{\begin{array}{ll} r_0 & = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ r_1 & = x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3 + \zeta^3 x_4 + \zeta^4 x_5 \\ r_2 & = x_1 + \zeta^2 x_2 + \zeta^4 x_3 + \zeta x_4 + \zeta^3 x_5 \\ r_3 & = x_1 + \zeta^3 x_2 + \zeta x_3 + \zeta^4 x_4 + \zeta^2 x_5 \\ r_4 & = x_1 + \zeta^4 x_2 + \zeta^3 x_3 + \zeta^2 x_4 + \zeta x_5 \end{array}\right.$$

を考えると，σは「$r_1 \to \zeta^4 r_1 \to \zeta^3 r_1 \to \zeta^2 r_1 \to \zeta r_1 \to r_1$」の様に移し，
τは 分解式を「$r_1 \to r_3 \to r_4 \to r_2 \to r_1$」の様に移します．

さらに$R_1 = r_1{}^5$，$R_2 = r_2{}^5$，$R_3 = r_3{}^5$，$R_4 = r_4{}^5$ とすると σによって R_1，R_2，R_3，R_4 は動かず，
τ によって「$(R_1, R_2, R_3, R_4) \overset{\tau}{\to} (R_3, R_1, R_4, R_2) \overset{\tau}{\to}$
$(R_4, R_3, R_2, R_1) \overset{\tau}{\to} (R_2, R_4, R_1, R_3) \overset{\tau}{\to} (R_1, R_2, R_3, R_4) \cdots$」の様に移ります．

先ず「Final_F20.nb」と同様にして Θ_a，Θ_b，Θ_c，Θ_d を使い (R_1, R_2, R_3, R_4) の候補 R_a，R_b，R_c，R_d を求めます．ここまでは「Final_F20.nb」と同様なので省略します．

次に fの数値解 sol = {$x1, $x2, $x3, $x4, $x5} を使って正しい (R_1, R_2, R_3, R_4) を求め，
そのあとやはりsolを使って $R_1 \sim R_4$ の正しい5乗根 $r_1 \sim r_4$ を求めます．

In[◦]:=

次の例で見てみましょう．以下 数値解とそれから直接計算できる変数は先頭に「$」を付けて表します．

■ 【例4】$f = x^5 - 10 x^3 + 5 x^2 + 10 x + 1$

§3 – 1. 正しい (R_1, R_2, R_3, R_4) を選択する

まず 5 次の対称群S_5 は次の様に6個の左剰余類に分けられます．
「$S_5 = F_{20} + (1, 2, 3) F_{20} + (1, 3, 2) F_{20} + (1, 2) F_{20} + (2, 3) F_{20} + (1, 3) F_{20}$」
$(\sharp)$ より (R_1, R_2, R_3, R_4) の固定群 M ($\subset S_5$) は $M = \langle \sigma \rangle$ です．$F_4 = \langle \tau \rangle$ とすると，
$F_{20} / M = F_4$ なので，$T = S_5 / M$ とおくと，
「$T = F_4 + (1, 2, 3) F_4 + (1, 3, 2) F_4 + (1, 2) F_4 + (2, 3) F_4 + (1, 3) F_4$」で，
T の位数は 24 です．結局，
fの解の順列を変えたときに (R_1, R_2, R_3, R_4) の取りえる値は 24 通り有りますが，
その各々に対する $x_1 \sim x_5$ の変換を行う要素をS_5 から1つずつ集めた集合が T となります．

数値解sol = {$x1, $x2, $x3, $x4, $x5} を T を使って移し，
その各々に対する ($R1, $R2, $R3, $R4) の24通りの組を考え，
そのうち R_a，R_b，R_c，R_d の何れかのセットと一致する組を見つけます．

permsは, Tを, 順列 {1, 2, 3, 4, 5} の置換の形として表したものです.

さて「Final_F20.nb」と同様にしてもとめた (R_1, R_2, R_3, R_4) の候補は次の4つとなります.

In[∘]:=

$$\text{Ra} = \left\{\frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1666825+3145551\sqrt{5}}\right),\ \frac{\left(-55+17\sqrt{5}\right)^5}{80\left(2275+1055\sqrt{5}+2\sqrt{-1666825+3145551\sqrt{5}}\right)},\ -\frac{5}{2}\left(2275+1055\sqrt{5}+2\sqrt{-1666825+3145551\sqrt{5}}\right),\ \frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1666825+3145551\sqrt{5}}\right)\right\};$$

$$\text{Rb} = \left\{\frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1666825+3145551\sqrt{5}}\right),\ -\frac{5}{2}\left(2275+1055\sqrt{5}+2\sqrt{-1666825+3145551\sqrt{5}}\right),\ \frac{\left(-55+17\sqrt{5}\right)^5}{80\left(2275+1055\sqrt{5}+2\sqrt{-1666825+3145551\sqrt{5}}\right)},\ \frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1666825+3145551\sqrt{5}}\right)\right\};$$

$$\text{Rc} = \left\{\frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right),\ -\frac{5}{2}\left(2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right),\ -\frac{5}{2}\left(2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right),\ \frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)\right\};$$

$$\text{Rd} = \left\{\frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right),\ -\frac{5}{2}\left(2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right),\ -\frac{5}{2}\left(2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right),\ \frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)\right\};$$

各々の近似値は次の通りです.

In[∘]:=
```
N[Ra]
N[Rb]
N[Rc]
N[Rd]
```

Out[∘]=
{210.129 − 14748.3 i, −1.90774, −23168.4, 210.129 + 14748.3 i}

Out[∘]=
{210.129 − 14748.3 i, −23168.4, −1.90774, 210.129 + 14748.3 i}

Out[∘]=
{210.129 − 6.69291 i, −11585.1 − 9129.14 i, −11585.1 + 9129.14 i, 210.129 + 6.69291 i}

Out[∘]=
{210.129 − 6.69291 i, −11585.1 + 9129.14 i, −11585.1 − 9129.14 i, 210.129 + 6.69291 i}

一方, fの数値解 sol は次の様になります.

In[∘]:=
```
sol = {$x1, $x2, $x3, $x4, $x5} = x /. NSolve[f == 0, x]
```

Out[∘]=
{−2.3504, −1.42891, −0.813416, 1.0264, 3.56632}

以下の計算は「$\zeta = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$」と固定します.
この時, sol の \$x1~\$x5 をperms を使って移し,
その各々に対する (\$$r_1$, \$$r_2$, \$$r_3$, \$$r_4$), (\$$R_1$, \$$R_2$, \$$R_3$, \$$R_4$) の値を求めると,
次の \$r1234Table と \$R1234Table の様になります. (\$R1234Table のみ表示.)

In[∘]:=
```
ξ = Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5];
$r1234Table = Table[{{1, ξ, ξ^2, ξ^3, ξ^4}, {1, ξ^2, ξ^4, ξ, ξ^3},
     {1, ξ^3, ξ, ξ^4, ξ^2}, {1, ξ^4, ξ^3, ξ^2, ξ}}.sol[[perms[[i]]]], {i, 1, 24}];
$R1234Table = $r1234Table^5
```

Out[∘]=
```
{{-8598.43 - 218.924 i, -171.417 - 1272.93 i, -171.417 + 1272.93 i, -8598.43 + 218.924 i},
 {-171.417 + 1272.93 i, -8598.43 - 218.924 i, -8598.43 + 218.924 i, -171.417 - 1272.93 i},
 {-8598.43 + 218.924 i, -171.417 + 1272.93 i, -171.417 - 1272.93 i, -8598.43 - 218.924 i},
 {-171.417 - 1272.93 i, -8598.43 + 218.924 i, -8598.43 - 218.924 i, -171.417 + 1272.93 i},
 {-840.815 - 827.442 i, 3480.92 - 8235.98 i, 3480.92 + 8235.98 i, -840.815 + 827.442 i},
 {3480.92 + 8235.98 i, -840.815 - 827.442 i, -840.815 + 827.442 i, 3480.92 - 8235.98 i},
 {-840.815 + 827.442 i, 3480.92 + 8235.98 i, 3480.92 - 8235.98 i, -840.815 - 827.442 i},
 {3480.92 - 8235.98 i, -840.815 + 827.442 i, -840.815 - 827.442 i, 3480.92 + 8235.98 i},
 {50.0537 + 24.7503 i, -1399.19 - 17624.2 i, -1399.19 + 17624.2 i, 50.0537 - 24.7503 i},
 {-1399.19 + 17624.2 i, 50.0537 + 24.7503 i, 50.0537 - 24.7503 i, -1399.19 - 17624.2 i},
 {50.0537 - 24.7503 i, -1399.19 + 17624.2 i, -1399.19 - 17624.2 i, 50.0537 + 24.7503 i},
 {-1399.19 - 17624.2 i, 50.0537 - 24.7503 i, 50.0537 + 24.7503 i, -1399.19 + 17624.2 i},
 {210.129 - 6.69291 i, -11585.1 - 9129.14 i, -11585.1 + 9129.14 i, 210.129 + 6.69291 i},
 {-11585.1 + 9129.14 i, 210.129 - 6.69291 i, 210.129 + 6.69291 i, -11585.1 - 9129.14 i},
 {210.129 + 6.69291 i, -11585.1 + 9129.14 i, -11585.1 - 9129.14 i, 210.129 - 6.69291 i},
 {-11585.1 - 9129.14 i, 210.129 + 6.69291 i, 210.129 - 6.69291 i, -11585.1 + 9129.14 i},
 {-204.657 - 102.717 i, 9099.11 - 11311.2 i, 9099.11 + 11311.2 i, -204.657 + 102.717 i},
 {9099.11 + 11311.2 i, -204.657 - 102.717 i, -204.657 + 102.717 i, 9099.11 - 11311.2 i},
 {-204.657 + 102.717 i, 9099.11 + 11311.2 i, 9099.11 - 11311.2 i, -204.657 - 102.717 i},
 {9099.11 - 11311.2 i, -204.657 + 102.717 i, -204.657 - 102.717 i, 9099.11 + 11311.2 i},
 {-2238.77 + 581.546 i, -5301.8 - 3171.03 i, -5301.8 + 3171.03 i, -2238.77 - 581.546 i},
 {-5301.8 + 3171.03 i, -2238.77 + 581.546 i, -2238.77 - 581.546 i, -5301.8 - 3171.03 i},
 {-2238.77 - 581.546 i, -5301.8 + 3171.03 i, -5301.8 - 3171.03 i, -2238.77 + 581.546 i},
 {-5301.8 - 3171.03 i, -2238.77 - 581.546 i, -2238.77 + 581.546 i, -5301.8 + 3171.03 i}}
```

$R1234Table と N[Ra]~N[Rd] の値を比べると, N[Rc]と 上表の13番目の要素が一致することが分かります. 故に, 正しい (R_1, R_2, R_3, R_4)($=R_{1234}$とおく) は

In[∘]:=

$$\text{R1234} = \text{Rc} = \left\{\frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right),\ -\frac{5}{2}\left(2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right),\ -\frac{5}{2}\left(2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right),\ \frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)\right\};$$

です. また13番目の要素に対する ($\$r_1$,$\$r_2$, $\$r_3$, $\$r_4$)の値($=\$r_{1234}$とおく)は

In[∘]:=
```
$r1234 = $r1234Table[[13]]
```

Out[∘]=
```
{-2.3468 + 1.72799 i, -1.22548 - 6.70856 i, -1.22548 + 6.70856 i, -2.3468 - 1.72799 i}
```

となります.

§3 – 2. 正しい5乗根を選択する

まずは R1234 の5乗根 $\left(R_1{}^{1/5},\ R_2{}^{1/5},\ R_3{}^{1/5},\ R_4{}^{1/5}\right)$ の近似値 r1234 を求めます.

In[∘]:=
```
r1234 = N[R1234]^(1/5)
```

Out[∘]=
```
{2.91429 - 0.0185588 i, 6.00152 - 3.23856 i, 6.00152 + 3.23856 i, 2.91429 + 0.0185588 i}
```

多分, Mathematicaでは「$z = r\ (\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0,\ -\pi < \theta < \pi)$ に対し,
$z^{\frac{1}{5}} = r^{\frac{1}{5}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{5}\right) + i\cos\left(\frac{\theta}{5}\right)\right)$ 」と定義しています.

何れにせよ，r1234の要素は5乗根の内の一つを選んでいるので，
r1234 の各々の要素に ζ^k (k = 0, 1, 2, 3, 4) を掛けて $r1234 とできるだけ一致させます．
そのためには偏角を調べるとOKです．例えば r1 と $r1 に対しては

In[∘]:=
```
(Arg[$r1234[[1]]] - Arg[r1234[[1]]]) / Arg[ζ]
```

Out[∘]=
```
2.
```

となるので，「$r1 = r1 * ζ^2」と分かります．
同様にして「$r2 = r2 * ζ^4, $r3 = r3 * ζ, $r4 = r4 * ζ^3」となるので，
正しい (r_1, r_2, r_3, r_4) の厳密解は

In[∘]:=
```
Clear[ζ]
R1234^(1/5) * ζ^{2, 4, 1, 3}
```

Out[∘]=

$$\left\{\left(\frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}-2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)\right)^{1/5}\zeta^2,\right.$$
$$\left(\frac{5}{2}\left(-2275-1055\sqrt{5}-2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)\right)^{1/5}\zeta^4,$$
$$\left(\frac{5}{2}\left(-2275-1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}\right)\right)^{1/5}\zeta,$$
$$\left.\left(\frac{5}{2}\left(-2275+1055\sqrt{5}+2i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}\right)\right)^{1/5}\zeta^3\right\}$$

となります．後はこれを代入して $x_1 \sim x_5$ の厳密解を求めるだけです．(略)

§3 - 3. 補足

「§3 - 2」で $\$x_1$~ $\$x_5$ の置換として σ=(1,2,3,4,5) を考えてない事にお気づきの方もいらっしゃると思います．σ により ($\$r_1$, $\$r_2$,$\$r_3$,$\$r_4$) は次の様に移ります．(直下の行は,見やすくするため「$」は省略.)

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \xrightarrow{\sigma} (r_1\zeta^4, r_2\zeta^3, r_3\zeta^2, r_4\zeta) \xrightarrow{\sigma} (r_1\zeta^3, r_2\zeta, r_3\zeta^4, r_4\zeta^2) \xrightarrow{\sigma}$$
$$(r_1\zeta^2, r_2\zeta^4, r_3\zeta, r_4\zeta^3) \xrightarrow{\sigma} (r_1\zeta, r_2\zeta^2, r_3\zeta^3, r_4\zeta^4) \xrightarrow{\sigma} (r_1, r_2, r_3, r_4)$$

($\$r_1$, $\$r_2$, $\$r_3$, $\$r_4$) としては確かに上の5通りある訳ですが，
このうちどれをとっても {$\$x_1$, $\$x_2$, $\$x_3$, $\$x_4$, $\$x_5$}
の集合は同じになることが簡単な計算で示せます．このことが Dummit 氏の言われる
「r_1 を R_1 の任意の5乗根にとっても一般性を失わない事」に当たります．