Galois 分解式を使った5次方程式の解法例 with *Mathematica* 14

2025 年7月 by mixedmoss

「$f = x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x + 4$」を例にとり，
ガロア分解式を使って解いてみます． fは可解で既約で，
そのガロア群は「$F_{20} = \langle \sigma, \tau \rangle$, $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\tau = (2, 3, 5, 4)$」です．

今回は一般論から始めます．そのために可解で既約な5次方程式を
「$f = x^5 - a_1 x^4 + a_2 x^3 - a_3 x^2 + a_4 x - a_5$ ($a_1 \sim a_5$ は有理数)」，
「$f = 0$」の解を x1, x2, x3, x4, x5 と置きます． fのガロア群Gal は F_{20} としますが，
後出の ⊖a～⊖d の性質は，F_{20} の部分群の時でも成り立ちます．

なおノートブックの評価には 15 秒ほど掛かります．

§ 1 .Lagrange分解式, l_0~l_4 の定義

1-1. Lagrange分解式と R_1~ R_4の定義

「$C_5 \triangleright \{Id\}$」の部分に注目し，ラグランジュの5次分解式を作ります．(ζは1の原始 5 乗根の1つ.) この時 x_k ($1 \leqq k \leqq 5$) を自由変数，即ち「$f = 0$」の解となっている事は忘れるものとします．

```
In[◦]:= ClearAll["`*"];
r0 = x1 + x2 + x3 + x4 + x5;
r1 = x1 + ζ x2 + ζ^2 x3 + ζ^3 x4 + ζ^4 x5;
r2 = x1 + ζ^2 x2 + ζ^4 x3 + ζ x4 + ζ^3 x5;
r3 = x1 + ζ^3 x2 + ζ x3 + ζ^4 x4 + ζ^2 x5;
r4 = x1 + ζ^4 x2 + ζ^3 x3 + ζ^2 x4 + ζ x5;
```

解と係数の関係より「$r0 = a_1$」． また以下の性質が成り立ちます．

$$(\#1)\begin{cases} r_1 \text{を}\sigma\text{で移すと } r_1 \to \zeta^4 r_1, & \tau\text{で移すと } r_1 \to r_3, \\ r_2 \text{を}\sigma\text{で移すと } r_2 \to \zeta^3 r_2, & \tau\text{で移すと } r_2 \to r_1, \\ r_3 \text{を}\sigma\text{で移すと } r_3 \to \zeta^2 r_3, & \tau\text{で移すと } r_3 \to r_4, \\ r_4 \text{を}\sigma\text{で移すと } r_4 \to \zeta r_4, & \tau\text{で移すと } r_4 \to r_2, \end{cases}$$

結局，τは 分解式を「$r_1 \to r_3 \to r_4 \to r_2 \to r_1$」の様に移し， σは「$r_1 \to \zeta^4 r_1 \to \to \zeta^3 r_1 \to \to \zeta^2 r_1 \to \zeta r_1 \to r_1$」の様に移します．
さらに fの最小分解体にζを付加した体をK, K内の同型写像「$\omega: \zeta \to \zeta^3$」とすると， 分解式は次の様に移ります． ωはτと同じ様に分解式を移します．

(by ω) $r_1 \to r_3 \to r_4 \to r_2 \to r_1 \cdots$

以上より，$\Theta_a = r_1 r_3 + r_2 r_4$ と $\Theta_b = (r_1 r_3 - r_2 r_4)^2$ は σとτで変わらないので $Q(\zeta)$ に入ります．
また$R_1 = r_1{}^5$，$R_2 = r_2{}^5$ ，$R_3 = r_3{}^5$ ，$R_4 = r_4{}^5$ とおくと，
σは $R_1 \sim R_4$ を動かさず， τは「$R_1 \xrightarrow{\tau} R_3 \xrightarrow{\tau} R_4 \xrightarrow{\tau} R_2 \xrightarrow{\tau} R_1$」の様に移します．

1－2．$l_0 \sim l_4$ の定義 と $R_0 \sim R_4$ との関係

$R_1 = r_1{}^5$ を展開し「$\zeta^5 = 1$」のみを使って次数を下げ，さらにζについて整理した式を

$R_1 = r_1{}^5 = l_0 + l_1 \zeta + l_2 \zeta^2 + l_3 \zeta^3 +$
$l_4 \zeta^4$ (l_i は ζを含まない x_j のみの式)とおきます． これを ω で移すと次の式が得られます．

$$(\sharp 2)\quad \left\{\begin{array}{l} R_1 = r_1{}^5 = l_0 + l_1 \zeta + l_2 \zeta^2 + l_3 \zeta^3 + l_4 \zeta^4 \\ R_2 = r_2{}^5 = l_0 + l_3 \zeta + l_1 \zeta^2 + l_4 \zeta^3 + l_2 \zeta^4 \\ R_3 = r_3{}^5 = l_0 + l_2 \zeta + l_4 \zeta^2 + l_1 \zeta^3 + l_3 \zeta^4 \\ R_4 = r_4{}^5 = l_0 + l_4 \zeta + l_3 \zeta^2 + l_2 \zeta^3 + l_1 \zeta^4 \end{array}\right.$$

ここで $(\sharp 1)$ より， σで $R_1 \sim R_4$ は動きません． よってσで $l_0 \sim l_4$ も動きません．
次に τによって「$R_1 \to R_3 \to R_4 \to R_2 \to R_1$」と動くから，「$l_1 \to l_2 \to l_4 \to l_3 \to l_1$ 」と動きます．
故に「$\Theta_c = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$」と「$\Theta_d = (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)^2$ 」は F_{20} によって動かず，
かつζ を含んでないから 有理数となります．
同様に l_0 も σとτによって動かず ζ を含んでないから 有理数となります．

$l_0 \sim l_4$ を 実際に計算します．

In[ ]:=
```
R1 = r1^5 // PolynomialMod[#, ζ^5 - 1] & // Collect[#, ζ] &
{l0, l1, l2, l3, l4} = CoefficientList[R1, ζ];
```

Out[ ]=

$$\begin{aligned}
& x1^5 + x2^5 + 20\, x1\, x2^3\, x3 + 30\, x1^2\, x2\, x3^2 + x3^5 + 30\, x1^2\, x2^2\, x4 + 20\, x1^3\, x3\, x4 + \\
& 20\, x2\, x3^3\, x4 + 30\, x2^2\, x3\, x4^2 + 30\, x1\, x3^2\, x4^2 + 20\, x1\, x2\, x4^3 + x4^5 + 20\, x1^3\, x2\, x5 + 30\, x2^2\, x3^2\, x5 + \\
& 20\, x1\, x3^3\, x5 + 20\, x2^3\, x4\, x5 + 120\, x1\, x2\, x3\, x4\, x5 + 30\, x1^2\, x4^2\, x5 + 20\, x3\, x4^3\, x5 + 30\, x1\, x2^2\, x5^2 + \\
& 30\, x1^2\, x3\, x5^2 + 30\, x3^2\, x4\, x5^2 + 30\, x2\, x4^2\, x5^2 + 20\, x2\, x3\, x5^3 + 20\, x1\, x4\, x5^3 + x5^5 + \\
& \big(5\, x1^4\, x2 + 5\, x2^4\, x3 + 30\, x1\, x2^2\, x3^2 + 10\, x1^2\, x3^3 + 20\, x1\, x2^3\, x4 + 60\, x1^2\, x2\, x3\, x4 + 5\, x3^4\, x4 + \\
& \quad 10\, x1^3\, x4^2 + 30\, x2\, x3^2\, x4^2 + 10\, x2^2\, x4^3 + 20\, x1\, x3\, x4^3 + 30\, x1^2\, x2^2\, x5 + 20\, x1^3\, x3\, x5 + \\
& \quad 20\, x2\, x3^3\, x5 + 60\, x2^2\, x3\, x4\, x5 + 60\, x1\, x3^2\, x4\, x5 + 60\, x1\, x2\, x4^2\, x5 + 5\, x4^4\, x5 + 10\, x2^3\, x5^2 + \\
& \quad 60\, x1\, x2\, x3\, x5^2 + 30\, x1^2\, x4\, x5^2 + 30\, x3\, x4^2\, x5^2 + 10\, x3^2\, x5^3 + 20\, x2\, x4\, x5^3 + 5\, x1\, x5^4\big)\, \zeta + \\
& \big(10\, x1^3\, x2^2 + 5\, x1^4\, x3 + 10\, x2^3\, x3^2 + 20\, x1\, x2\, x3^3 + 5\, x2^4\, x4 + 60\, x1\, x2^2\, x3\, x4 + 30\, x1^2\, x3^2\, x4 + \\
& \quad 30\, x1^2\, x2\, x4^2 + 10\, x3^3\, x4^2 + 20\, x2\, x3\, x4^3 + 5\, x1\, x4^4 + 20\, x1\, x2^3\, x5 + 60\, x1^2\, x2\, x3\, x5 + \\
& \quad 5\, x3^4\, x5 + 20\, x1^3\, x4\, x5 + 60\, x2\, x3^2\, x4\, x5 + 30\, x2^2\, x4^2\, x5 + 60\, x1\, x3\, x4^2\, x5 + 30\, x2^2\, x3\, x5^2 + \\
& \quad 30\, x1\, x3^2\, x5^2 + 60\, x1\, x2\, x4\, x5^2 + 10\, x4^3\, x5^2 + 10\, x1^2\, x5^3 + 20\, x3\, x4\, x5^3 + 5\, x2\, x5^4\big)\, \zeta^2 + \\
& \big(10\, x1^2\, x2^3 + 20\, x1^3\, x2\, x3 + 10\, x2^2\, x3^3 + 5\, x1\, x3^4 + 5\, x1^4\, x4 + 20\, x2^3\, x3\, x4 + 60\, x1\, x2\, x3^2\, x4 + \\
& \quad 30\, x1\, x2^2\, x4^2 + 30\, x1^2\, x3\, x4^2 + 10\, x3^2\, x4^3 + 5\, x2\, x4^4 + 5\, x2^4\, x5 + 60\, x1\, x2^2\, x3\, x5 + \\
& \quad 30\, x1^2\, x3^2\, x5 + 60\, x1^2\, x2\, x4\, x5 + 20\, x3^3\, x4\, x5 + 60\, x2\, x3\, x4^2\, x5 + 20\, x1\, x4^3\, x5 + 10\, x1^3\, x5^2 + \\
& \quad 30\, x2\, x3^2\, x5^2 + 30\, x2^2\, x4\, x5^2 + 60\, x1\, x3\, x4\, x5^2 + 20\, x1\, x2\, x5^3 + 10\, x4^2\, x5^3 + 5\, x3\, x5^4\big)\, \zeta^3 + \\
& \big(5\, x1\, x2^4 + 30\, x1^2\, x2^2\, x3 + 10\, x1^3\, x3^2 + 5\, x2\, x3^4 + 20\, x1^3\, x2\, x4 + 30\, x2^2\, x3^2\, x4 + 20\, x1\, x3^3\, x4 + \\
& \quad 10\, x2^3\, x4^2 + 60\, x1\, x2\, x3\, x4^2 + 10\, x1^2\, x4^3 + 5\, x3\, x4^4 + 5\, x1^4\, x5 + 20\, x2^3\, x3\, x5 + 60\, x1\, x2\, x3^2\, x5 + \\
& \quad 60\, x1\, x2^2\, x4\, x5 + 60\, x1^2\, x3\, x4\, x5 + 30\, x3^2\, x4^2\, x5 + 20\, x2\, x4^3\, x5 + 30\, x1^2\, x2\, x5^2 + \\
& \quad 10\, x3^3\, x5^2 + 60\, x2\, x3\, x4\, x5^2 + 30\, x1\, x4^2\, x5^2 + 10\, x2^2\, x5^3 + 20\, x1\, x3\, x5^3 + 5\, x4\, x5^4\big)\, \zeta^4
\end{aligned}$$

$(\sharp 2)$ の式は「$\zeta^5 = 1$」のみを使って整形した式だから「$\zeta = 1$」と置くことができます． この時

(♯3)　$l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = (x1 + x2 + x3 + x4 + x5)^5 = (-a_1)^5$

さらに（♯2）より $\begin{cases} (R_1 + R_4) + (R_2 + R_3) = 4\, l_0 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) \\ (R_1 + R_4) - (R_2 + R_3) = (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)\left(\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3\right) \end{cases}$

故に,

(♯4) $\begin{cases} R_1 + R_4 = \frac{1}{2}\left(4\, l_0 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)\left(\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3\right)\right) \\ R_2 + R_3 = \frac{1}{2}\left(4\, l_0 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)\left(\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3\right)\right) \end{cases}$

§2.Galois 分解式を利用して $R_1 R_4$, $R_2 R_3$ の値を求める

以下のコマンドを主に使います

In[∘]:=
```
PolynomialMod[poly, m]
```
m を法として多項式 *poly* を与える.

In[∘]:= 【例】PolynomialMod[3 x^2 + 2 x + 1, x^2 + 1] で　出力は - 2 + 2 x

In[∘]:=
```
SymmetricReduction[f, {x1, …, xn}, {s1, …, sn}]
```
p における初等対称式を $s_1, \ldots, s_n$ で置き換えたペア $\{p, q\}$ を与える.

【例】SymmetricReduction[x^2 + y^2, {x, y}] で　出力は $\{-2 x y + (x + y)^2, 0\}$

In[∘]:=
```
SymmetricPolynomial[k, {x1, …, xn}]
```
変数 $x_1, \ldots, x_n$ における k 次初等対称多項式を与える.

【例】SymmetricPolynomial[3, {x1, x2, x3, x4}] で　出力は $x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$

In[∘]:=
expr /. *rules* または ReplaceAll[*expr*, *rules*]
式 *expr* の下位区分のそれぞれを変換しようとするとき, 規則または規則のリストを適用する.

【例】{x, x^2, y, z} /. x -> 1　と入力すると, 出力は{1, 1, y, z}

In[∘]:=
```
AssociationThread[{key1, key2, …} → {val1, val2, …}]
```
連想 <| key_1 → val_1, key_2 → val_2, … |> を与える.

【例】AssociationThread[{1, 2, 3} -> {"one", "two", "three"}]　と入力すると, 出力は <|1 -> "one", 2 -> "two", 3 -> "three"|>

2-1. $\theta_a = r_1 r_4 + r_2 r_3$ の値を 求める

まず「$1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$」を使って θ_a を簡単にします.
(Cyclotomic[5, ζ] = $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4$)

In[∘]:=
```
θa = PolynomialMod[r1 * r4 + r2 * r3, Cyclotomic[5, ζ]]
```

Out[∘]=

$$2 x1^2 - x1\,x2 + 2 x2^2 - x1\,x3 - x2\,x3 + 2 x3^2 - x1\,x4 - x2\,x4 - x3\,x4 + 2 x4^2 - x1\,x5 - x2\,x5 - x3\,x5 - x4\,x5 + 2 x5^2$$

ζ を含まない式に変形できました. 「$\theta_a \in \mathbb{Q}(\zeta)$」だったので, θ_a は有理数.
さらによく見ると $x_1 \sim x_5$ の対称式となっているので簡単に $a_1 \sim a_5$ の式で表せます.

In[ ]:= `SymmetricReduction[θa, {x1, x2, x3, x4, x5}, {a1, a2, a3, a4, a5}]`

Out[ ]=

$\{2\,a1^2 - 5\,a2,\, 0\}$

第2成分は基本対称式で表せない部分でありその値が0なので,
θ_a が対称式であることが分かります. 即ち

$\theta a = 2\,a1^2 - 5\,a2;$

ここまでの議論は Gal = F_{20} としていますが,
上の式は Gal ≠ F_{20} の時でも成り立ちます. 後出の θb, θc, θd についても同様です.

なお「$f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x + 4$」に対しては「$\theta_a = 3$」となります.

2-2. $\theta_b = (r_1 r_3 - r_2 r_4)^2$ の値を 求める(Galois分解式の利用)

まず $\theta_b = (r1 * r4 - r2 * r3)^2$ を「$1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$」を使って簡単にします.

In[ ]:= `θb = PolynomialMod[(r1 * r4 - r2 * r3)^2, Cyclotomic[5, ζ]]`

Out[ ]=

$5\,x1^2\,x2^2 - 10\,x1^2\,x2\,x3 + 10\,x1\,x2^2\,x3 + 5\,x1^2\,x3^2 - 10\,x1\,x2\,x3^2 + 5\,x2^2\,x3^2 - 10\,x1^2\,x2\,x4 - 10\,x1\,x2^2\,x4 + 10\,x1^2\,x3\,x4 + 10\,x1\,x2\,x3\,x4 - 10\,x2^2\,x3\,x4 - 10\,x1\,x3^2\,x4 + 10\,x2\,x3^2\,x4 + 5\,x1^2\,x4^2 + 10\,x1\,x2\,x4^2 + 5\,x2^2\,x4^2 - 10\,x1\,x3\,x4^2 - 10\,x2\,x3\,x4^2 + 5\,x3^2\,x4^2 + 10\,x1^2\,x2\,x5 - 10\,x1\,x2^2\,x5 - 10\,x1^2\,x3\,x5 + 10\,x1\,x2\,x3\,x5 - 10\,x2^2\,x3\,x5 + 10\,x1\,x3^2\,x5 - 10\,x2\,x3^2\,x5 - 10\,x1^2\,x4\,x5 + 10\,x1\,x2\,x4\,x5 + 10\,x2^2\,x4\,x5 + 10\,x1\,x3\,x4\,x5 + 10\,x2\,x3\,x4\,x5 - 10\,x3^2\,x4\,x5 - 10\,x1\,x4^2\,x5 - 10\,x2\,x4^2\,x5 + 10\,x3\,x4^2\,x5 + 5\,x1^2\,x5^2 - 10\,x1\,x2\,x5^2 + 5\,x2^2\,x5^2 - 10\,x1\,x3\,x5^2 + 10\,x2\,x3\,x5^2 + 5\,x3^2\,x5^2 + 10\,x1\,x4\,x5^2 - 10\,x2\,x4\,x5^2 - 10\,x3\,x4\,x5^2 + 5\,x4^2\,x5^2$

これもζを含まないのでθ_a と同様に有理数となります.
残念ながら $x_1 \sim x_5$ の対称式ではありませんが, ガロア分解式を使ってその値を求めることができます.
(ガロア分解式については「 6次方程式について 」
(https : // mixedmoss.com / mathematica / Galois / sextic / pdf /
SexticEquation.pdf) をご覧ください)

まず 5 次の対称群 S_5 は次のように6個の左剰余類に分けられます.
「$S_5 = F_{20} + (1, 2, 3) F_{20} + (1, 3, 2) F_{20} + (1, 2) F_{20} + (2, 3) F_{20} + (1, 3) F_{20}$」

その代表元の集合をΣ6 とし,
θ_b をΣ6 の全ての要素で置換して作った式を「$\theta_1 = \theta_c$, $\theta_2 = (1, 2, 3)\,\theta_1$,
$\theta_3 = (1, 3, 2)\,\theta_1$, $\theta_4 = (1, 2)\,\theta_1$, $\theta_5 = (2, 3)\,\theta_1$, $\theta_6 = (1, 3)\,\theta_1$」とおくと,
θ_1 は F_{20} によって動かず, θ_2 は「$\theta_2 \overset{\sigma}{\to} \theta_6 \overset{\sigma}{\to} \theta_3 \overset{\sigma}{\to} \theta_4 \overset{\sigma}{\to} \theta_5 \overset{\sigma}{\to} \theta_2$」と動くので,
$\theta_2 \sim \theta_5$ のF_{20} による軌道は $\{\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}$ となります.
故に積 $pb(x) = \Pi\,(x - \theta_k) = (x - \theta_1)(x - \theta_2) \cdots (x - \theta_6)$ は ,
x1 ~ x5の対称式となり, pb (x) は有理数係数の多項式となります.
そして$pb(x) = 0$ の6個の解のうちちょうど一個が θ_1 となる訳ですが,
θ_1 は F_{20} によって不変なので, 有理数です. 即ち pb (x) は有理数解を少なくとも1つ持ちます.
さらに $\theta_2 \sim \theta_6$ は F_{20} によって可移なので
A :「$pb(x) = (x - \theta_1)\,q(x)$ (θ_1 は有理数, q (x) はQ上既約)」或いはB :
「$pb(x) = (x - \theta_1)(x - \theta_2)^5$ (θ_1, θ_2 は有理数)」

となります．(可解な5次方程式の場合はAのケースしかないことが，
参考文献［1］［2］から言えるはずなのですが， 私には確信はありません．)
さてまずは Σ6 ({x1, x2, x3, x4, x5} の置換として表現) を作ります.

```
In[∘]:= Σ6 = {{x1, x2, x3, x4, x5}, {x2, x3, x1, x4, x5}, {x3, x1, x2, x4, x5},
          {x2, x1, x3, x4, x5}, {x1, x3, x2, x4, x5}, {x3, x2, x1, x4, x5}};
```

次に「$\theta 1 = \theta_b$, $\theta 2 = (1, 2, 3)\,\theta_b$, $\theta 3 = (1, 3, 2)\,\theta_b$, $\theta 4 = (1, 2)\theta_b$, $\theta 5 = (2, 3)\,\theta_b$, $\theta 6 = (1, 3)\,\theta_b$」を作ります.

```
In[∘]:= θ1 = θb;
        θ2 = θb /. AssociationThread[Σ6[[1]] → Σ6[[2]]];
        θ3 = θb /. AssociationThread[Σ6[[1]] → Σ6[[3]]];
        θ4 = θb /. AssociationThread[Σ6[[1]] → Σ6[[4]]];
        θ5 = θb /. AssociationThread[Σ6[[1]] → Σ6[[5]]];
        θ6 = θb /. AssociationThread[Σ6[[1]] → Σ6[[6]]];
```

$\theta 1$~$\theta 6$ の1次対称式「$\theta 1 + \theta 2 + \theta 3 + \theta 4 + \theta 5 + \theta 6$」を基本対称式で表して k1 と置きます.

```
In[∘]:= k1 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[1, {θ1, θ2, θ3, θ4, θ5, θ6}],
          {x1, x2, x3, x4, x5}, {a1, a2, a3, a4, a5}][[1]]
```

Out[∘]=

$$30\,a2^2 - 80\,a1\,a3 + 200\,a4$$

以下同様に $\theta 1$~$\theta 6$ の i次対称式 を基本対称式で表して k_i (i=1,2,⋯ ,6)と置きます.

```
In[∘]:= k2 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[2, {θ1, θ2, θ3, θ4, θ5, θ6}],
           {x1, x2, x3, x4, x5}, {a1, a2, a3, a4, a5}][[1]];

In[∘]:= k3 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[3, {θ1, θ2, θ3, θ4, θ5, θ6}],
           {x1, x2, x3, x4, x5}, {a1, a2, a3, a4, a5}][[1]];

In[∘]:= k4 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[4, {θ1, θ2, θ3, θ4, θ5, θ6}],
           {x1, x2, x3, x4, x5}, {a1, a2, a3, a4, a5}][[1]];

In[∘]:= k5 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[5, {θ1, θ2, θ3, θ4, θ5, θ6}],
           {x1, x2, x3, x4, x5}, {a1, a2, a3, a4, a5}][[1]];

In[∘]:= k6 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[6, {θ1, θ2, θ3, θ4, θ5, θ6}],
           {x1, x2, x3, x4, x5}, {a1, a2, a3, a4, a5}][[1]];
```

以上より
「$pb(x) = (x - \theta 1)(x - \theta 2)\cdots(x - \theta 6) = x^6 - k1\,x^5 + k2\,x^4 - k3\,x^3 + k4\,x^2 - k5\,x + k6$」
は次の様になります.

```
In[∘]:= pb = x^6 - k1 x^5 + k2 x^4 - k3 x^3 + k4 x^2 - k5 x + k6
```

Out[∘]=

$$
\begin{aligned}
&15\,625\,a2^{12} - 250\,000\,a1\,a2^{10}\,a3 + 1\,500\,000\,a1^2\,a2^8\,a3^2 + 500\,000\,a2^9\,a3^2 - 4\,000\,000\,a1^3\,a2^6\,a3^3 - 6\,000\,000\,a1\,a2^7\,a3^3 + \\
&4\,000\,000\,a1^4\,a2^4\,a3^4 + 24\,000\,000\,a1^2\,a2^5\,a3^4 + 6\,000\,000\,a2^6\,a3^4 - 32\,000\,000\,a1^3\,a2^3\,a3^5 - 48\,000\,000\,a1\,a2^4\,a3^5 + \\
&96\,000\,000\,a1^2\,a2^2\,a3^6 + 32\,000\,000\,a2^3\,a3^6 - 128\,000\,000\,a1\,a2\,a3^7 + 64\,000\,000\,a3^8 + 500\,000\,a1^2\,a2^9\,a4 - 875\,000\,a2^{10}\,a4 - \\
&6\,000\,000\,a1^3\,a2^7\,a3\,a4 + 10\,500\,000\,a1\,a2^8\,a3\,a4 + 24\,000\,000\,a1^4\,a2^5\,a3^2\,a4 - 30\,000\,000\,a1^2\,a2^6\,a3^2\,a4 - 21\,000\,000\,a2^7\,a3^2\,a4 - \\
&32\,000\,000\,a1^5\,a2^3\,a3^3\,a4 - 40\,000\,000\,a1^3\,a2^4\,a3^3\,a4 + 168\,000\,000\,a1\,a2^5\,a3^3\,a4 + 192\,000\,000\,a1^4\,a2^2\,a3^4\,a4 - \\
&240\,000\,000\,a1^2\,a2^3\,a3^4\,a4 - 168\,000\,000\,a2^4\,a3^4\,a4 - 384\,000\,000\,a1^3\,a2\,a3^5\,a4 + 672\,000\,000\,a1\,a2^2\,a3^5\,a4 + \\
&256\,000\,000\,a1^2\,a3^6\,a4 - 448\,000\,000\,a2\,a3^6\,a4 + 6\,000\,000\,a1^4\,a2^6\,a4^2 - 21\,000\,000\,a1^2\,a2^7\,a4^2 + 17\,750\,000\,a2^8\,a4^2 - \\
&48\,000\,000\,a1^5\,a2^4\,a3\,a4^2 + 168\,000\,000\,a1^3\,a2^5\,a3\,a4^2 - 140\,000\,000\,a1\,a2^6\,a3\,a4^2 + 96\,000\,000\,a1^6\,a2^2\,a3^2\,a4^2 - \\
&240\,000\,000\,a1^4\,a2^3\,a3^2\,a4^2 - 68\,000\,000\,a1^2\,a2^4\,a3^2\,a4^2 + 284\,000\,000\,a2^5\,a3^2\,a4^2 - 384\,000\,000\,a1^5\,a2\,a3^3\,a4^2 + \\
&1\,376\,000\,000\,a1^3\,a2^2\,a3^3\,a4^2 - 1\,104\,000\,000\,a1\,a2^3\,a3^3\,a4^2 + 384\,000\,000\,a1^4\,a3^4\,a4^2 - 1\,472\,000\,000\,a1^2\,a2\,a3^4\,a4^2 +
\end{aligned}
$$

$1136000000\, a2^2\, a3^4\, a4^2 + 128000000\, a1\, a3^5\, a4^2 + 32000000\, a1^6\, a2^3\, a4^3 - 168000000\, a1^4\, a2^4\, a4^3 + 284000000\, a1^2\, a2^5\, a4^3 -$
$164000000\, a2^6\, a4^3 - 128000000\, a1^7\, a2\, a3\, a4^3 + 672000000\, a1^5\, a2^2\, a3\, a4^3 - 1104000000\, a1^3\, a2^3\, a3\, a4^3 +$
$640000000\, a1\, a2^4\, a3\, a4^3 + 256000000\, a1^6\, a3^2\, a4^3 - 1472000000\, a1^4\, a2\, a3^2\, a4^3 + 2336000000\, a1^2\, a2^2\, a3^2\, a4^3 -$
$1392000000\, a2^3\, a3^2\, a4^3 + 256000000\, a1^3\, a3^3\, a4^3 + 192000000\, a1\, a2\, a3^3\, a4^3 - 640000000\, a3^4\, a4^3 + 64000000\, a1^8\, a4^4 -$
$448000000\, a1^6\, a2\, a4^4 + 1136000000\, a1^4\, a2^2\, a4^4 - 1392000000\, a1^2\, a2^3\, a4^4 + 764000000\, a2^4\, a4^4 + 128000000\, a1^5\, a3\, a4^4 +$
$192000000\, a1^3\, a2\, a3\, a4^4 - 768000000\, a1\, a2^2\, a3\, a4^4 - 1216000000\, a1^2\, a3^2\, a4^4 + 2240000000\, a2\, a3^2\, a4^4 - 640000000\, a1^4\, a4^5 +$
$2240000000\, a1^2\, a2\, a4^5 - 1760000000\, a2^2\, a4^5 - 640000000\, a1\, a3\, a4^5 + 1600000000\, a4^6 - 1500000\, a1\, a2^9\, a5 +$
$18000000\, a1^2\, a2^7\, a3\, a5 + 2500000\, a2^8\, a3\, a5 - 72000000\, a1^3\, a2^5\, a3^2\, a5 - 64000000\, a1\, a2^6\, a3^2\, a5 + 96000000\, a1^4\, a2^3\, a3^3\, a5 +$
$392000000\, a1^2\, a2^4\, a3^3\, a5 + 40000000\, a2^5\, a3^3\, a5 - 704000000\, a1^3\, a2^2\, a3^4\, a5 - 576000000\, a1\, a2^3\, a3^4\, a5 +$
$1664000000\, a1^2\, a2\, a3^5\, a5 + 160000000\, a2^2\, a3^5\, a5 - 1280000000\, a1\, a3^6\, a5 - 36000000\, a1^3\, a2^6\, a4\, a5 + 62000000\, a1\, a2^7\, a4\, a5 +$
$288000000\, a1^4\, a2^4\, a3\, a4\, a5 - 456000000\, a1^2\, a2^5\, a3\, a4\, a5 - 20000000\, a2^6\, a3\, a4\, a5 - 576000000\, a1^5\, a2^2\, a3^2\, a4\, a5 +$
$128000000\, a1^3\, a2^3\, a3^2\, a4\, a5 + 1096000000\, a1\, a2^4\, a3^2\, a4\, a5 + 2816000000\, a1^4\, a2\, a3^3\, a4\, a5 - 3744000000\, a1^2\, a2^2\, a3^3\, a4\, a5 +$
$240000000\, a2^3\, a3^3\, a4\, a5 - 3328000000\, a1^3\, a3^4\, a4\, a5 + 2560000000\, a1\, a2\, a3^4\, a4\, a5 + 3200000000\, a3^5\, a4\, a5 -$
$288000000\, a1^5\, a2^3\, a4^2\, a5 + 992000000\, a1^3\, a2^4\, a4^2\, a5 - 824000000\, a1\, a2^5\, a4^2\, a5 + 1152000000\, a1^6\, a2\, a3\, a4^2\, a5 -$
$3808000000\, a1^4\, a2^2\, a3\, a4^2\, a5 + 3440000000\, a1^2\, a2^3\, a3\, a4^2\, a5 - 960000000\, a2^4\, a3\, a4^2\, a5 - 2816000000\, a1^5\, a3^2\, a4^2\, a5 +$
$6912000000\, a1^3\, a2\, a3^2\, a4^2\, a5 - 2240000000\, a1\, a2^2\, a3^2\, a4^2\, a5 + 5120000000\, a1^2\, a3^3\, a4^2\, a5 - 11200000000\, a2\, a3^3\, a4^2\, a5 -$
$768000000\, a1^7\, a4^3\, a5 + 3968000000\, a1^5\, a2\, a4^3\, a5 - 6592000000\, a1^3\, a2^2\, a4^3\, a5 + 4000000000\, a1\, a2^3\, a4^3\, a5 +$
$2432000000\, a1^4\, a3\, a4^3\, a5 - 11840000000\, a1^2\, a2\, a3\, a4^3\, a5 + 8000000000\, a2^2\, a3\, a4^3\, a5 + 9600000000\, a1\, a3^2\, a4^3\, a5 +$
$3840000000\, a1^3\, a4^4\, a5 - 6400000000\, a1\, a2\, a4^4\, a5 - 16000000000\, a3\, a4^4\, a5 + 86000000\, a1^2\, a2^6\, a5^2 -$
$125000000\, a2^7\, a5^2 - 688000000\, a1^3\, a2^4\, a3\, a5^2 + 880000000\, a1\, a2^5\, a3\, a5^2 + 1376000000\, a1^4\, a2^2\, a3^2\, a5^2 +$
$240000000\, a1^2\, a2^3\, a3^2\, a5^2 - 1900000000\, a2^4\, a3^2\, a5^2 - 7040000000\, a1^3\, a2\, a3^3\, a5^2 + 6400000000\, a1\, a2^2\, a3^3\, a5^2 +$
$9600000000\, a1^2\, a3^4\, a5^2 - 8000000000\, a2\, a3^4\, a5^2 + 1376000000\, a1^4\, a2^3\, a4\, a5^2 - 4360000000\, a1^2\, a2^4\, a4\, a5^2 +$
$3500000000\, a2^5\, a4\, a5^2 - 5504000000\, a1^5\, a2\, a3\, a4\, a5^2 + 16480000000\, a1^3\, a2^2\, a3\, a4\, a5^2 - 14800000000\, a1\, a2^3\, a3\, a4\, a5^2 +$
$14080000000\, a1^4\, a3^2\, a4\, a5^2 - 30400000000\, a1^2\, a2\, a3^2\, a4\, a5^2 + 32000000000\, a2^2\, a3^2\, a4\, a5^2 - 32000000000\, a1\, a3^3\, a4\, a5^2 +$
$5504000000\, a1^6\, a4^2\, a5^2 - 26880000000\, a1^4\, a2\, a4^2\, a5^2 + 43200000000\, a1^2\, a2^2\, a4^2\, a5^2 - 22000000000\, a2^3\, a4^2\, a5^2 -$
$16000000000\, a1^3\, a3\, a4^2\, a5^2 + 24000000000\, a1\, a2\, a3\, a4^2\, a5^2 + 40000000000\, a3^2\, a4^2\, a5^2 - 16000000000\, a1^2\, a4^3\, a5^2 +$
$40000000000\, a2\, a4^3\, a5^2 - 2400000000\, a1^3\, a2^3\, a5^3 + 6000000000\, a1\, a2^4\, a5^3 + 9600000000\, a1^4\, a2\, a3\, a5^3 -$
$20000000000\, a1^2\, a2^2\, a3\, a5^3 - 10000000000\, a2^3\, a3\, a5^3 - 32000000000\, a1^3\, a3^2\, a5^3 + 80000000000\, a1\, a2\, a3^2\, a5^3 -$
$19200000000\, a1^5\, a4\, a5^3 + 80000000000\, a1^3\, a2\, a4\, a5^3 - 80000000000\, a1\, a2^2\, a4\, a5^3 + 80000000000\, a1^2\, a3\, a4\, a5^3 -$
$200000000000\, a2\, a3\, a4\, a5^3 + 40000000000\, a1^4\, a5^4 - 200000000000\, a1^2\, a2\, a5^4 + 250000000000\, a2^2\, a5^4 -$
$(18750\, a2^{10} - 250000\, a1\, a2^8\, a3 + 1200000\, a1^2\, a2^6\, a3^2 + 400000\, a2^7\, a3^2 - 2400000\, a1^3\, a2^4\, a3^3 - 3600000\, a1\, a2^5\, a3^3 +$
$1600000\, a1^4\, a2^2\, a3^4 + 9600000\, a1^2\, a2^3\, a3^4 + 2800000\, a2^4\, a3^4 - 6400000\, a1^3\, a2\, a3^5 - 12800000\, a1\, a2^2\, a3^5 +$
$6400000\, a1^2\, a3^6 + 6400000\, a2\, a3^6 + 400000\, a1^2\, a2^7\, a4 - 575000\, a2^8\, a4 - 3600000\, a1^3\, a2^5\, a3\, a4 + 4600000\, a1\, a2^6\, a3\, a4 +$
$9600000\, a1^4\, a2^3\, a3^2\, a4 - 3600000\, a1^2\, a2^4\, a3^2\, a4 - 7800000\, a2^5\, a3^2\, a4 - 6400000\, a1^5\, a2\, a3^3\, a4 - 25600000\, a1^3\, a2^2\, a3^3\, a4 +$
$25600000\, a1\, a2^3\, a3^3\, a4 + 12800000\, a1^4\, a3^4\, a4 + 41600000\, a1^2\, a2\, a3^4\, a4 - 25600000\, a2^2\, a3^4\, a4 - 44800000\, a1\, a3^5\, a4 +$
$2800000\, a1^4\, a2^4\, a4^2 - 7800000\, a1^2\, a2^5\, a4^2 + 6200000\, a2^6\, a4^2 - 12800000\, a1^5\, a2^2\, a3\, a4^2 + 25600000\, a1^3\, a2^3\, a3\, a4^2 -$
$14400000\, a1\, a2^4\, a3\, a4^2 + 6400000\, a1^6\, a3^2\, a4^2 + 41600000\, a1^4\, a2\, a3^2\, a4^2 - 91200000\, a1^2\, a2^2\, a3^2\, a4^2 +$
$40000000\, a2^3\, a3^2\, a4^2 - 96000000\, a1^3\, a3^3\, a4^2 + 124800000\, a1\, a2\, a3^3\, a4^2 + 9600000\, a3^4\, a4^2 + 6400000\, a1^6\, a2\, a4^3 -$
$25600000\, a1^4\, a2^2\, a4^3 + 40000000\, a1^2\, a2^3\, a4^3 - 5600000\, a2^4\, a4^3 - 44800000\, a1^5\, a3\, a4^3 + 124800000\, a1^3\, a2\, a3\, a4^3 -$
$182400000\, a1\, a2^2\, a3\, a4^3 + 96000000\, a1^2\, a3^2\, a4^3 + 92800000\, a2\, a3^2\, a4^3 + 9600000\, a1^4\, a4^4 + 92800000\, a1^2\, a2\, a4^4 -$
$129600000\, a2^2\, a4^4 - 294400000\, a1\, a3\, a4^4 + 339200000\, a4^5 - 400000\, a1^3\, a2^6\, a5 + 600000\, a1\, a2^7\, a5 +$
$3200000\, a1^4\, a2^4\, a3\, a5 - 3600000\, a1^2\, a2^5\, a3\, a5 - 1000000\, a2^6\, a3\, a5 - 6400000\, a1^5\, a2^2\, a3^2\, a5 - 6400000\, a1^3\, a2^3\, a3^2\, a5 +$
$19200000\, a1\, a2^4\, a3^2\, a5 + 44800000\, a1^4\, a2\, a3^3\, a5 - 57600000\, a1^2\, a2^2\, a3^3\, a5 + 19200000\, a2^3\, a3^3\, a5 -$
$38400000\, a1^3\, a3^4\, a5 - 38400000\, a1\, a2\, a3^4\, a5 + 185600000\, a3^5\, a5 - 6400000\, a1^5\, a2^3\, a4\, a5 + 23200000\, a1^3\, a2^4\, a4\, a5 -$
$27600000\, a1\, a2^5\, a4\, a5 + 25600000\, a1^6\, a2\, a3\, a4\, a5 - 83200000\, a1^4\, a2^2\, a3\, a4\, a5 + 153600000\, a1^2\, a2^3\, a3\, a4\, a5 -$
$134400000\, a2^4\, a3\, a4\, a5 - 89600000\, a1^5\, a3^2\, a4\, a5 + 12800000\, a1^3\, a2\, a3^2\, a4\, a5 + 403200000\, a1\, a2^2\, a3^2\, a4\, a5 +$
$364800000\, a1^2\, a3^3\, a4\, a5 - 1296000000\, a2\, a3^3\, a4\, a5 - 25600000\, a1^7\, a4^2\, a5 + 147200000\, a1^5\, a2\, a4^2\, a5 -$
$342400000\, a1^3\, a2^2\, a4^2\, a5 + 236800000\, a1\, a2^3\, a4^2\, a5 + 544000000\, a1^4\, a3\, a4^2\, a5 - 1731200000\, a1^2\, a2\, a3\, a4^2\, a5 +$
$1392000000\, a2^2\, a3\, a4^2\, a5 + 1024000000\, a1\, a3^2\, a4^2\, a5 - 563200000\, a1^3\, a4^3\, a5 + 992000000\, a1\, a2\, a4^3\, a5 -$
$1920000000\, a3\, a4^3\, a5 + 19200000\, a1^4\, a2^3\, a5^2 - 128400000\, a1^2\, a2^4\, a5^2 + 270600000\, a2^5\, a5^2 - 76800000\, a1^5\, a2\, a3\, a5^2 +$
$556800000\, a1^3\, a2^2\, a3\, a5^2 - 1376000000\, a1\, a2^3\, a3\, a5^2 + 6400000\, a1^4\, a3^2\, a5^2 + 112000000\, a1^2\, a2\, a3^2\, a5^2 +$
$2040000000\, a2^2\, a3^2\, a5^2 - 1280000000\, a1\, a3^3\, a5^2 + 153600000\, a1^6\, a4\, a5^2 - 1286400000\, a1^4\, a2\, a4\, a5^2 +$
$3744000000\, a1^2\, a2^2\, a4\, a5^2 - 2680000000\, a2^3\, a4\, a5^2 - 288000000\, a1^3\, a3\, a4\, a5^2 - 2960000000\, a1\, a2\, a3\, a4\, a5^2 +$
$3200000000\, a3^2\, a4\, a5^2 + 2240000000\, a1^2\, a4^2\, a5^2 + 400000000\, a2\, a4^2\, a5^2 + 179200000\, a1^5\, a5^3 - 1120000000\, a1^3\, a2\, a5^3 +$
$1200000000\, a1\, a2^2\, a5^3 + 2400000000\, a1^2\, a3\, a5^3 - 2000000000\, a2\, a3\, a5^3 - 8000000000\, a1\, a4\, a5^3 + 10000000000\, a5^4)\, x +$
$(9375\, a2^8 - 100000\, a1\, a2^6\, a3 + 360000\, a1^2\, a2^4\, a3^2 + 120000\, a2^5\, a3^2 - 480000\, a1^3\, a2^2\, a3^3 - 720000\, a1\, a2^3\, a3^3 +$
$160000\, a1^4\, a3^4 + 960000\, a1^2\, a2\, a3^4 + 400000\, a2^2\, a3^4 - 640000\, a1\, a3^5 + 120000\, a1^2\, a2^5\, a4 - 110000\, a2^6\, a4 -$
$720000\, a1^3\, a2^3\, a3\, a4 + 240000\, a1\, a2^4\, a3\, a4 + 960000\, a1^4\, a2\, a3^2\, a4 + 2160000\, a1^2\, a2^2\, a3^2\, a4 - 600000\, a2^3\, a3^2\, a4 -$
$3520000\, a1^3\, a3^3\, a4 - 1600000\, a1\, a2\, a3^3\, a4 + 1600000\, a3^4\, a4 + 400000\, a1^4\, a2^2\, a4^2 - 600000\, a1^2\, a2^3\, a4^2 +$
$900000\, a2^4\, a4^2 - 640000\, a1^5\, a3\, a4^2 - 1600000\, a1^3\, a2\, a3\, a4^2 - 2400000\, a1\, a2^2\, a3\, a4^2 + 15200000\, a1^2\, a3^2\, a4^2 -$
$800000\, a2\, a3^2\, a4^2 + 1600000\, a1^4\, a4^3 - 800000\, a1^2\, a2\, a4^3 + 800000\, a2^2\, a4^3 - 28800000\, a1\, a3\, a4^3 + 28000000\, a4^4 -$
$240000\, a1^3\, a2^4\, a5 + 720000\, a1\, a2^5\, a5 + 1280000\, a1^4\, a2^2\, a3\, a5 - 3600000\, a1^2\, a2^3\, a3\, a5 - 1200000\, a2^4\, a3\, a5 -$
$1280000\, a1^5\, a3^2\, a5 + 1600000\, a1^3\, a2\, a3^2\, a5 + 9600000\, a1\, a2^2\, a3^2\, a5 - 1600000\, a1^2\, a3^3\, a5 - 8000000\, a2\, a3^3\, a5 -$
$1280000\, a1^5\, a2\, a4\, a5 + 4000000\, a1^3\, a2^2\, a4\, a5 - 1200000\, a1\, a2^3\, a4\, a5 + 12800000\, a1^4\, a3\, a4\, a5 - 43200000\, a1^2\, a2\, a3\, a4\, a5 +$
$12000000\, a2^2\, a3\, a4\, a5 + 24000000\, a1\, a3^2\, a4\, a5 - 28800000\, a1^3\, a4^2\, a5 + 88000000\, a1\, a2\, a4^2\, a5 -$

$$
\begin{aligned}
&80\,000\,000\,a3\,a4^{2}\,a5+2\,560\,000\,a1^{6}\,a5^{2}-19\,200\,000\,a1^{4}\,a2\,a5^{2}+42\,000\,000\,a1^{2}\,a2^{2}\,a5^{2}-15\,000\,000\,a2^{3}\,a5^{2}+\\
&16\,000\,000\,a1^{3}\,a3\,a5^{2}-80\,000\,000\,a1\,a2\,a3\,a5^{2}+100\,000\,000\,a3^{2}\,a5^{2}+40\,000\,000\,a1^{2}\,a4\,a5^{2}-100\,000\,000\,a2\,a4\,a5^{2}\Big)\,x^{2}-\\
&\Big(2500\,a2^{6}-20\,000\,a1\,a2^{4}\,a3+48\,000\,a1^{2}\,a2^{2}\,a3^{2}+16\,000\,a2^{3}\,a3^{2}-32\,000\,a1^{3}\,a3^{3}-48\,000\,a1\,a2\,a3^{3}+16\,000\,a3^{4}+\\
&16\,000\,a1^{2}\,a2^{3}\,a4+2000\,a2^{4}\,a4-48\,000\,a1^{3}\,a2\,a3\,a4-120\,000\,a1\,a2^{2}\,a3\,a4+336\,000\,a1^{2}\,a3^{2}\,a4+24\,000\,a2\,a3^{2}\,a4+\\
&16\,000\,a1^{4}\,a4^{2}+24\,000\,a1^{2}\,a2\,a4^{2}+184\,000\,a2^{2}\,a4^{2}-1\,024\,000\,a1\,a3\,a4^{2}+1\,120\,000\,a4^{3}-48\,000\,a1^{3}\,a2^{2}\,a5+\\
&168\,000\,a1\,a2^{3}\,a5+128\,000\,a1^{4}\,a3\,a5-432\,000\,a1^{2}\,a2\,a3\,a5-280\,000\,a2^{2}\,a3\,a5+640\,000\,a1\,a3^{2}\,a5-\\
&416\,000\,a1^{3}\,a4\,a5+1\,360\,000\,a1\,a2\,a4\,a5-1\,600\,000\,a3\,a4\,a5+400\,000\,a1^{2}\,a5^{2}-1\,000\,000\,a2\,a5^{2}\Big)\,x^{3}+\\
&\Big(375\,a2^{4}-2000\,a1\,a2^{2}\,a3+2400\,a1^{2}\,a3^{2}+800\,a2\,a3^{2}+800\,a1^{2}\,a2\,a4+2600\,a2^{2}\,a4-13\,600\,a1\,a3\,a4+\\
&22\,000\,a4^{2}-3200\,a1^{3}\,a5+12\,000\,a1\,a2\,a5-20\,000\,a3\,a5\Big)\,x^{4}-\Big(30\,a2^{2}-80\,a1\,a3+200\,a4\Big)\,x^{5}+x^{6}
\end{aligned}
$$

ご覧の様に非常に長い式です．「$f(x)=x^5+2x^4+x^3+8x^2+9x+4$」
に対して「$\Theta_b=(r1\,r4-r2\,r3)^2$」の値を求めるには次の様にします．

まず，pbに $a_1 \sim a_5$ の値を代入して fbを作り，因数分解します．

In[ ]:=
```
fb := pb /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → {-2, 1, -8, 9, -4}];
Factor[fb]
```

Out[ ]=

$$(-225+x)\,(-8\,757\,900\,390\,625+18\,215\,953\,125\,x-77\,606\,250\,x^2-209\,750\,x^3-325\,x^4+x^5)$$

「fb = 0」の有理数解が「$x=225$」なので「$\Theta_b=(r1*r4-r2*r3)^2=225$」です．
故に 「$r1*r4-r2*r3=\pm 15$」となります．

2 − 3 $R_1 R_4$ ，$R_2 R_3$ の値を求める

「$r_1 r_4+r_2 r_3=3$，$r_1 r_4-r_2 r_3=\pm 15$」だから 「$(r_1 r_4,\ r_2 r_3)=(9,-6),(-6,9)$」

「$R_1 R_4=r_1^5 r_4^5=(r_1 r_4)^5$，$R_2 R_3=r_2^5 r_3^5=(r_2 r_3)^5$」だから，

$\{R_1 R_4,\ R_2 R_3\}=\{9^5,\ -6^5\}$ (集合として一致)

§3 . R_1, R_2, R_3, R_4 の候補を求める

3 – 1. $R_1 + R_4,\ R_2 + R_3$ と $\theta_c,\ \theta_d$ の関係

§1(#4) より

$$\begin{cases} R_1 + R_4 = \frac{1}{2}\left(4\,l_0 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)\left(\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3\right)\right) \\ R_2 + R_3 = \frac{1}{2}\left(4\,l_0 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)\left(\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3\right)\right) \end{cases}$$

であるから，l_0，$\theta_c = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$，
$\theta_d = (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)^2$ の値が求まれば，$R_1 + R_4$，$R_2 + R_3$ の値も求まります．

3-2. $\theta_c = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ と l_0 を求める

§1（#3） より
「$l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = (x1 + x2 + x3 + x4 + x5)^5 = (-a_1)^5$」 だから $\theta_c = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ を求めると l_0 はすぐ求まります．
θ_c はθ_b と同様に，ガロア分解式を使って値を求めることができます．

In[∘]:= **θc = l1 + l2 + l3 + l4**

Out[∘]=

$$5\,x1^4\,x2 + 10\,x1^3\,x2^2 + 10\,x1^2\,x2^3 + 5\,x1\,x2^4 + 5\,x1^4\,x3 + 20\,x1^3\,x2\,x3 + 30\,x1^2\,x2^2\,x3 + 5\,x2^4\,x3 + 10\,x1^3\,x3^2 + 30\,x1\,x2^2\,x3^2 + 10\,x2^3\,x3^2 + 10\,x1^2\,x3^3 + 20\,x1\,x2\,x3^3 + 10\,x2^2\,x3^3 + 5\,x1\,x3^4 + 5\,x2\,x3^4 + 5\,x1^4\,x4 + 20\,x1^3\,x2\,x4 + 20\,x1\,x2^3\,x4 + 5\,x2^4\,x4 + 60\,x1^2\,x2\,x3\,x4 + 60\,x1\,x2^2\,x3\,x4 + 20\,x2^3\,x3\,x4 + 30\,x1^2\,x3^2\,x4 + 60\,x1\,x2\,x3^2\,x4 + 30\,x2^2\,x3^2\,x4 + 20\,x1\,x3^3\,x4 + 5\,x3^4\,x4 + 10\,x1^3\,x4^2 + 30\,x1^2\,x2\,x4^2 + 30\,x1\,x2^2\,x4^2 + 10\,x2^3\,x4^2 + 30\,x1^2\,x3\,x4^2 + 60\,x1\,x2\,x3\,x4^2 + 30\,x2\,x3^2\,x4^2 + 10\,x3^3\,x4^2 + 10\,x1^2\,x4^3 + 10\,x2^2\,x4^3 + 20\,x1\,x3\,x4^3 + 20\,x2\,x3\,x4^3 + 10\,x3^2\,x4^3 + 5\,x1\,x4^4 + 5\,x2\,x4^4 + 5\,x3\,x4^4 + 5\,x1^4\,x5 + 30\,x1^2\,x2^2\,x5 + 20\,x1\,x2^3\,x5 + 5\,x2^4\,x5 + 20\,x1^3\,x3\,x5 + 60\,x1^2\,x2\,x3\,x5 + 60\,x1\,x2^2\,x3\,x5 + 20\,x2^3\,x3\,x5 + 30\,x1^2\,x3^2\,x5 + 60\,x1\,x2\,x3^2\,x5 + 20\,x2\,x3^3\,x5 + 5\,x3^4\,x5 + 20\,x1^3\,x4\,x5 + 60\,x1^2\,x2\,x4\,x5 + 60\,x1\,x2^2\,x4\,x5 + 60\,x1^2\,x3\,x4\,x5 + 60\,x2^2\,x3\,x4\,x5 + 60\,x1\,x3^2\,x4\,x5 + 60\,x2\,x3^2\,x4\,x5 + 20\,x3^3\,x4\,x5 + 60\,x1\,x2\,x4^2\,x5 + 30\,x2^2\,x4^2\,x5 + 60\,x1\,x3\,x4^2\,x5 + 60\,x2\,x3\,x4^2\,x5 + 30\,x3^2\,x4^2\,x5 + 20\,x1\,x4^3\,x5 + 20\,x2\,x4^3\,x5 + 5\,x4^4\,x5 + 10\,x1^3\,x5^2 + 30\,x1^2\,x2\,x5^2 + 10\,x2^3\,x5^2 + 60\,x1\,x2\,x3\,x5^2 + 30\,x2^2\,x3\,x5^2 + 30\,x1\,x3^2\,x5^2 + 30\,x2\,x3^2\,x5^2 + 10\,x3^3\,x5^2 + 30\,x1^2\,x4\,x5^2 + 60\,x1\,x2\,x4\,x5^2 + 30\,x2^2\,x4\,x5^2 + 60\,x1\,x3\,x4\,x5^2 + 60\,x2\,x3\,x4\,x5^2 + 30\,x1\,x4^2\,x5^2 + 30\,x3\,x4^2\,x5^2 + 10\,x4^3\,x5^2 + 10\,x1^2\,x5^3 + 20\,x1\,x2\,x5^3 + 10\,x2^2\,x5^3 + 20\,x1\,x3\,x5^3 + 10\,x3^2\,x5^3 + 20\,x2\,x4\,x5^3 + 20\,x3\,x4\,x5^3 + 10\,x4^2\,x5^3 + 5\,x1\,x5^4 + 5\,x2\,x5^4 + 5\,x3\,x5^4 + 5\,x4\,x5^4$$

θkをθ_cを Σ6 のk番目の要素で移した式， p(x)=Π(x-θk)=(x-θ1)(x-θ2)⋯(x-θ6) ,さらにp(x)を基本対称式で表した式をpcとすると， pcはpb と同様にして求まりますが， この計算は 5 分程時間がかかるので， 結果のみ直下の closed cell に入れてあります． Mathematicaでは， 直下右の小さい「コ」マークをクリックして「評価」して下さい． また結果の式を見るには「セル」→「セルのプロパティ」→「開く」を選択してください． Mathematicaをお持ちでない方は 「quinticFormulas . txt」をご覧ください． なお「quinticFormulas . txt」は約4千行になります． (↓ pc)

「$f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x + 4$」に対して「$\theta_c = l1 + l2 + l3 + l4$ 」の値を求めるために，
fcを作り因数分解し有理数解を求めます．

In[∘]:=
```
fc := pc /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → {-2, 1, -8, 9, -4}];
Factor[fc]
```

Out[∘]=

$$(-2960 + x)\left(-7636158917600000 - 1067069550000\,x - 1497880000\,x^2 + 4143000\,x^3 + 800\,x^4 + x^5\right)$$

故に $\theta_c = l1 + l2 + l3 + l4 = 2960$ と分かります.
また $l_0 = (-a_1)^5 - \theta_c = (-2)^5 - 2960 = -2992$

3-3. $\theta_d = (l1 + l4 - l2 - l3)^2$ を求める.

θ_b,θ_cと同様に Galois分解式を使って求めます. 即ち　θkをθ_dをΣ6 のk番目の要素で移した式, p(x)=Π(x-θk)=(x-θ1)(x-θ2)⋯(x-θ6) , さらにp(x)を基本対称式で表した式をpdとすると, pdはpb,pcと同様にして求まりますが, この計算は14時間程かかりました. 従って結果のみを 直下の closed cell に入れてあります. (↓ pd)

「$f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x + 4$」に対して「$\theta_d = (l1 + l4 - l2 - l3)^2$」
　の値を求めるために, fdを作り因数分解し有理数解を求めます.

In[∘]:=
```
fd = pd /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → {-2, 1, -8, 9, -4}]
Factor[fd]
```

Out[∘]=

$$46262965935791840661504000000000000000 - 55392073208506187977280000000000000\,x - 3566875199741109397500000000\,x^2 - 487402984614300000000\,x^3 - 260809898900000\,x^4 - 29486000\,x^5 + x^6$$

Out[∘]=

$$(-36992000 + x)\left(-1250620835201985312000000000000000 + 1463598950402903402500000000\,x + 135988163660900000000\,x^2 + 16852053100000\,x^3 + 7506000\,x^4 + x^5\right)$$

上の因数分解から「$\theta_d = (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)^2 = 36992000$」と分かります.

3-4. R_1+ R_4, R_2+ R_3を求める.

ここで「$\zeta = \mathrm{Cos}(2\pi/5) + \iota\,\mathrm{Sin}(2\pi/5)$」としても一般性を失いません.
このとき「$\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3 = \sqrt{5}$」となるから §1 (♯4) より,

$$\begin{cases} R_1 + R_4 = \frac{1}{2}\left(4\,l_0 - \theta_c \pm \sqrt{\theta_d}\ \sqrt{5}\right) \\ R_2 + R_3 = \frac{1}{2}\left(4\,l_0 - \theta_c \mp \sqrt{\theta_d}\ \sqrt{5}\right) \end{cases}$$

「$l_0 = -2992,\ l_c = 2960,\ \sqrt{\theta_d} = \sqrt{36992000} = 2720\sqrt{5}$」
を代入すると「$\{R_1 + R_4,\ R_2 + R_3\} = \{-664,\ -14264\}$」(集合として一致)

3－5. R_1, R_2, R_3, R_4 の候補を求める.

§2より「$\{R_1 R_4,\ R_2 R_3\} = \{-6^5,\ 9^5\}$」だから, 次の何れかとなります.

$$\begin{cases} (A) & \{R_1, R_4\} \text{ は「} t^2 + 664\,t - 6^5 = 0 \text{」の解, } \{R_2, R_3\} \text{ は「} t^2 + 14264\,t + 9^5 = 0 \text{」の解} \\ (A') & \{R_1, R_4\} \text{ は「} t^2 + 14264\,t + 9^5 = 0 \text{」の解, } \{R_2, R_3\} \text{ は「} t^2 + 664\,t - 6^5 = 0 \text{」の解} \\ (B) & \{R_1, R_4\} \text{ は「} t^2 + 664\,t + 9^5 = 0 \text{」の解, } \{R_2, R_3\} \text{ は「} t^2 + 14264\,t - 6^5 = 0 \text{」の解} \\ (B') & \{R_1, R_4\} \text{ は「} t^2 + 14264\,t - 6^5 = 0 \text{」の解, } \{R_2, R_3\} \text{ は「} t^2 + 664\,t + 9^5 = 0 \text{」の解} \end{cases}$$

（A）または（A'）のとき,
「$t^2 + 664\,t - 6^5 = 0$」の解を｛t11, t12｝,
「$t^2 + 14\,264\,t + 9^5 = 0$」の解を｛t21, t22｝とおき, RA =（t11, t21, t22, t12）と置くと,

In[ ]:=
```
RA =
 Flatten[{t /. Solve[t^2 + 664 t - 6^5 == 0], t /. Solve[t^2 + 14 264 t + 9^5 == 0, t]}, 1][[
   {1, 3, 4, 2}]] // Simplify
```
Out[ ]=

$$\left\{-4\left(83+5\sqrt{295}\right), -7132+415\sqrt{295}, -7132-415\sqrt{295}, 4\left(-83+5\sqrt{295}\right)\right\}$$

t11とt12, t21とt22は同じ方程式の2解だから, $R_i = i$と省略し, 順序も考えた$R_1 \sim R_4$の値は,
RA =（1, 2, 3, 4）,（1, 3, 2, 4）,（4, 2, 3, 1）,（4, 3, 2, 1）,
（2, 1, 4, 3）,（2, 4, 1, 3）,（3, 1, 4, 2）,（3, 4, 1, 2）の８通りのいずれか.

ここで「§1 - 1」より「（1, 2, 3, 4）と（2, 4, 1, 3）と（3, 1, 4, 2）と（4, 3, 2, 1）」,
「（1, 3, 2, 4）と（2, 1, 4, 3）と（3, 4, 1, 2）と（4, 2, 3, 1）」は同じfの解を与えます.
（例えば｛x_k｝の 置換「τ =（2, 3, 5, 4）」により「（R_1, R_2, R_3, R_4）→（R_3, R_1, R_4, R_2）」です）

故に (A) 或いは (A') のときは, 順列 (R_1,R_2,R_3,R_4)は次の a, b のいずれかです.

In[ ]:=
```
(*case a*)RA
```
Out[ ]=

$$\left\{-4\left(83+5\sqrt{295}\right), -7132+415\sqrt{295}, -7132-415\sqrt{295}, 4\left(-83+5\sqrt{295}\right)\right\}$$

In[ ]:=
```
(*case b*)RA[[{1, 3, 2, 4}]]
```
Out[ ]=

$$\left\{-4\left(83+5\sqrt{295}\right), -7132-415\sqrt{295}, -7132+415\sqrt{295}, 4\left(-83+5\sqrt{295}\right)\right\}$$

同様に（B）或いは（B'）のときは, （R_1, R_2, R_3, R_4）は次の c, d のいずれかです.

In[ ]:=
```
(*case c*)RB =
 Flatten[{t /. Solve[t^2 + 664 t + 9^5 == 0], t /. Solve[t^2 + 14 264 t - 6^5 == 0, t]}, 1][[
   {1, 3, 4, 2}]] // Simplify
```
Out[ ]=

$$\left\{-332-5\sqrt{2047}, -4\left(1783+5\sqrt{127\,183}\right), -7132+20\sqrt{127\,183}, -332+5\sqrt{2047}\right\}$$

In[ ]:=
```
(*case d*)RB[[{1, 3, 2, 4}]]
```
Out[ ]=

$$\left\{-332-5\sqrt{2047}, -7132+20\sqrt{127\,183}, -4\left(1783+5\sqrt{127\,183}\right), -332+5\sqrt{2047}\right\}$$

以上より, （R_1, R_2, R_3, R_4）の値は上の a, b, c, d の何れかと分かりました.

§4. 数値解と比較して解を求める

4-1. 解の候補

「§1 – 1」の $r_0 \sim r_4$ の定義式の逆変換を求めると

$$(\sharp 5)\ \begin{cases} x1 = 1/5\,(r0 + r1 + r2 + r3 + r4) \\ x2 = 1/5\,(r0 + \zeta\text{^}4\,r1 + \zeta\text{^}3\,r2 + \zeta\text{^}2\,r3 + \zeta\,r4) \\ x3 = 1/5\,(r0 + \zeta\text{^}3\,r1 + \zeta\,r2 + \zeta\text{^}4\,r3 + \zeta\text{^}2\,r4) \\ x4 = 1/5\,(r0 + \zeta\text{^}2\,r1 + \zeta\text{^}4\,r2 + \zeta\,r3 + \zeta\text{^}3\,r4) \\ x5 = 1/5\,(r0 + \zeta\,r1 + \zeta\text{^}2\,r2 + \zeta\text{^}3\,r3 + \zeta\text{^}4\,r4) \end{cases}$$

「$R_1 \sim R_4$ が実数のときは $r_1 \sim r_4$ が全て実数としても一般性を失わない」(D5_Solutions.nb) から,
a, b, c, d 4 組の(R_1, R_2, R_3, R_4) に対する r_i の値を求めて代入すると,
それぞれに対応する $x_1 \sim x_5$ の値が求まります．まず実5乗根を求めるコマンドを作っておきます.
さらに「$\zeta = \mathrm{Cos}(2/5\,\pi) + i\mathrm{Sin}(2/5\,\pi)$」とします.
また「$f = x^5 + 2\,x^4 + x^3 + 8\,x^2 + 9\,x + 4$」のとき「$r_0 = -a_1 = -2$」です

In[∘]:=
```
realRoot[p_] := Sign[p] Abs[p] ^ (1 / 5) (*実5乗根を求めるコマンド*)
ζ = Cos[2 / 5 π] + I Sin[2 / 5 π];
r0 = -2;
```

(a) {R1, R2, R3, R4} = RA のとき

In[∘]:=
```
{r1, r2, r3, r4} = realRoot /@ RA;
x1a = 1 / 5 (r0 + r1 + r2 + r3 + r4);
x2a = 1 / 5 (r0 + ζ^4 r1 + ζ^3 r2 + ζ^2 r3 + ζ r4);
x3a = 1 / 5 (r0 + ζ^3 r1 + ζ r2 + ζ^4 r3 + ζ^2 r4);
x4a = 1 / 5 (r0 + ζ^2 r1 + ζ^4 r2 + ζ r3 + ζ^3 r4);
x5a = 1 / 5 (r0 + ζ r1 + ζ^2 r2 + ζ^3 r3 + ζ^4 r4);
```

小数近似を求めると

In[∘]:=
```
N[{x1a, x2a, x3a, x4a, x5a}] // Sort
```

Out[∘]=
```
{-2.43057, -0.568969 - 1.66002 i,
 -0.568969 + 1.66002 i, 0.784255 + 0.37008 i, 0.784255 - 0.37008 i}
```

(b) {R1, R2, R3, R4} = RA[[{1, 3, 2, 4}]] のとき

In[∘]:=
```
{r1, r2, r3, r4} = realRoot /@ RA[[{1, 3, 2, 4}]];
x1b = 1 / 5 (r0 + r1 + r2 + r3 + r4);
x2b = 1 / 5 (r0 + ζ^4 r1 + ζ^3 r2 + ζ^2 r3 + ζ r4);
x3b = 1 / 5 (r0 + ζ^3 r1 + ζ r2 + ζ^4 r3 + ζ^2 r4);
x4b = 1 / 5 (r0 + ζ^2 r1 + ζ^4 r2 + ζ r3 + ζ^3 r4);
x5b = 1 / 5 (r0 + ζ r1 + ζ^2 r2 + ζ^3 r3 + ζ^4 r4);
```

小数近似を求めると

In[◦]:=
```
N[{x1b, x2b, x3b, x4b, x5b}] // Sort
```
Out[◦]=
```
{-2.43057, -0.568969 + 0.411374 ⅈ,
 -0.568969 - 0.411374 ⅈ, 0.784255 - 1.65027 ⅈ, 0.784255 + 1.65027 ⅈ}
```

(c) {R1, R2, R3, R4} = RB のとき

In[◦]:=
```
{r1, r2, r3, r4} = realRoot /@ RB;
x1c = 1 / 5 (r0 + r1 + r2 + r3 + r4);
x2c = 1 / 5 (r0 + ξ^4 r1 + ξ^3 r2 + ξ^2 r3 + ξ r4);
x3c = 1 / 5 (r0 + ξ^3 r1 + ξ r2 + ξ^4 r3 + ξ^2 r4);
x4c = 1 / 5 (r0 + ξ^2 r1 + ξ^4 r2 + ξ r3 + ξ^3 r4);
x5c = 1 / 5 (r0 + ξ r1 + ξ^2 r2 + ξ^3 r3 + ξ^4 r4);
```

小数近似を求めると

In[◦]:=
```
N[{x1c, x2c, x3c, x4c, x5c}] // Sort
```
Out[◦]=
```
{-2.79431, 0.176797 - 1.09118 ⅈ,
 0.176797 + 1.09118 ⅈ, 0.22036 - 1.33912 ⅈ, 0.22036 + 1.33912 ⅈ}
```

(d){R1, R2, R3, R4} = RB[[{1, 3, 2, 4}]] のとき

In[◦]:=
```
{r1, r2, r3, r4} = realRoot /@ RB[[{1, 3, 2, 4}]];
x1d = 1 / 5 (r0 + r1 + r2 + r3 + r4);
x2d = 1 / 5 (r0 + ξ^4 r1 + ξ^3 r2 + ξ^2 r3 + ξ r4);
x3d = 1 / 5 (r0 + ξ^3 r1 + ξ r2 + ξ^4 r3 + ξ^2 r4);
x4d = 1 / 5 (r0 + ξ^2 r1 + ξ^4 r2 + ξ r3 + ξ^3 r4);
x5d = 1 / 5 (r0 + ξ r1 + ξ^2 r2 + ξ^3 r3 + ξ^4 r4);
```

小数近似を求めると

In[◦]:=
```
N[{x1d, x2d, x3d, x4d, x5d}] // Sort
```
Out[◦]=
```
{-2.79431, 0.176797 - 0.709754 ⅈ,
 0.176797 + 0.709754 ⅈ, 0.22036 - 1.57485 ⅈ, 0.22036 + 1.57485 ⅈ}
```

4-2. 解の決定

以上で解の候補が出尽くしました. 一方, NSolveを使って f の数値解を求めると,

In[◦]:=
```
x /. NSolve[x^5 + 2 x^4 + x^3 + 8 x^2 + 9 x + 4 == 0, x] // Sort
```
Out[◦]=
```
{-2.43057, -0.568969 - 0.411374 ⅈ,
 -0.568969 + 0.411374 ⅈ, 0.784255 - 1.65027 ⅈ, 0.784255 + 1.65027 ⅈ}
```

上の (a) 〜 (d) の数値解と比較すると (a) のケースが求める解と分かります. 即ち「f=0」の厳密解は x1a~x5a となります.

「ζ=cos(2π/5)+i sin(2π/5)」として解を表示すると次の様になります.

In[∘]:=
```
Clear[ξ];
{x1, x2, x3, x4, x5} = {x1a, x2a, x3a, x4a, x5a} /. {1/4 (√5 - 1) + ⅈ Sqrt[5/8 + √5/8] → ξ};
Column[
 {"以下は「x^5+2x^4+x^3+8x^2+9x+4=0」の解です．但し「ξ=cos(2π/5)+i sin(2π/5)」です",
  TraditionalForm[x1], TraditionalForm[x2], TraditionalForm[x3],
  TraditionalForm[x4], TraditionalForm[x5]}, Spacings → 2]
```

Out[∘]=

以下は「$x^5+2x^4+x^3+8x^2+9x+4=0$」の解です．但し「$\xi=\cos(2\pi/5)+i\ \sin(2\pi/5)$」です

$$\frac{1}{5}\left(-2-\sqrt[5]{7132-415\sqrt{295}}+2^{2/5}\sqrt[5]{5\sqrt{295}-83}-2^{2/5}\sqrt[5]{83+5\sqrt{295}}-\sqrt[5]{7132+415\sqrt{295}}\right)$$

$$\frac{1}{5}\left(-2^{2/5}\sqrt[5]{83+5\sqrt{295}}\,\xi^4-\sqrt[5]{7132-415\sqrt{295}}\,\xi^3-\sqrt[5]{7132+415\sqrt{295}}\,\xi^2+2^{2/5}\sqrt[5]{5\sqrt{295}-83}\,\xi-2\right)$$

$$\frac{1}{5}\left(-\sqrt[5]{7132+415\sqrt{295}}\,\xi^4-2^{2/5}\sqrt[5]{83+5\sqrt{295}}\,\xi^3+2^{2/5}\sqrt[5]{5\sqrt{295}-83}\,\xi^2-\sqrt[5]{7132-415\sqrt{295}}\,\xi-2\right)$$

$$\frac{1}{5}\left(-\sqrt[5]{7132-415\sqrt{295}}\,\xi^4+2^{2/5}\sqrt[5]{5\sqrt{295}-83}\,\xi^3-2^{2/5}\sqrt[5]{83+5\sqrt{295}}\,\xi^2-\sqrt[5]{7132+415\sqrt{295}}\,\xi-2\right)$$

$$\frac{1}{5}\left(2^{2/5}\sqrt[5]{5\sqrt{295}-83}\,\xi^4-\sqrt[5]{7132+415\sqrt{295}}\,\xi^3-\sqrt[5]{7132-415\sqrt{295}}\,\xi^2-2^{2/5}\sqrt[5]{83+5\sqrt{295}}\,\xi-2\right)$$

§5. 補足

5 – 1. 束縛条件 $w_1 = r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$, $w_2 = r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$ から $r_1 \sim r_4$ を決める事はできないか？

「F20_Solutions.nb」などのノートブックでは 束縛条件
「$w_1 = r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$, $w_2 = r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$」から $r_1 \sim r_4$ を決めました.
しかしそのためには そもそも w_1, w_2 の値を求めないといけません.
この2式の値は $Q(\zeta)$ に入りますが, 有理数ではありません.
そのためガロア分解式を用いても容易に値が求まらないので, w_1, w_2 を利用することは断念しました.

5 – 2. 参考文献 [1] [2] の $f_{20}(x)$ と fb, fc, fd の関係について

Dummit氏の論文では次の F_{20} 不変な式として次のθを考え,
ガロア分解式$f_{20}(x)$ を作ります. （ただし Dummit氏は ガロア分解式とは述べていません.）

In[ ]:=
```
ClearAll[x1, x2, x3, x4, x5]
θ = x1^2 (x2 x5 + x3 x4) + x2^2 (x1 x3 + x4 x5) +
   x3^2 (x1 x5 + x2 x4) + x4^2 (x1 x2 + x3 x5) + x5^2 (x1 x4 + x2 x3);
```

In[ ]:=
```
θ1 = θ;
θ2 = θ /. AssociationThread[Σ6[[1]] → Σ6[[2]]];
θ3 = θ /. AssociationThread[Σ6[[1]] → Σ6[[3]]];
θ4 = θ /. AssociationThread[Σ6[[1]] → Σ6[[4]]];
θ5 = θ /. AssociationThread[Σ6[[1]] → Σ6[[5]]];
θ6 = θ /. AssociationThread[Σ6[[1]] → Σ6[[6]]];
```

In[ ]:=
```
p20 = SymmetricReduction[(x - θ1) (x - θ2) (x - θ3) (x - θ4) (x - θ5) (x - θ6),
    {x1, x2, x3, x4, x5}, {a1, a2, a3, a4, a5}] // Collect[#, x] & // First
```

Out[ ]=

$$
\begin{aligned}
&a3^8 + a1\,a2^2\,a3^5\,a4 - 13\,a2\,a3^6\,a4 + a2^5\,a3^2\,a4^2 + 2\,a1^3\,a2^2\,a3^3\,a4^2 - 15\,a1\,a2^3\,a3^3\,a4^2 - 2\,a1^4\,a3^4\,a4^2 + \\
&5\,a1^2\,a2\,a3^4\,a4^2 + 65\,a2^2\,a3^4\,a4^2 + 5\,a1\,a3^5\,a4^2 + a1^2\,a2^5\,a4^3 - 4\,a2^6\,a4^3 + a1^5\,a2^2\,a3\,a4^3 - \\
&15\,a1^3\,a2^3\,a3\,a4^3 + 44\,a1\,a2^4\,a3\,a4^3 + 5\,a1^4\,a2\,a3^2\,a4^3 + 19\,a1^2\,a2^2\,a3^2\,a4^3 - 128\,a2^3\,a3^2\,a4^3 + \\
&6\,a1^3\,a3^3\,a4^3 - 118\,a1\,a2\,a3^3\,a4^3 + 17\,a3^4\,a4^3 + a1^8\,a4^4 - 13\,a1^6\,a2\,a4^4 + 65\,a1^4\,a2^2\,a4^4 - \\
&128\,a1^2\,a2^3\,a4^4 + 48\,a2^4\,a4^4 + 5\,a1^5\,a3\,a4^4 - 118\,a1^3\,a2\,a3\,a4^4 + 384\,a1\,a2^2\,a3\,a4^4 + \\
&82\,a1^2\,a3^2\,a4^4 - 16\,a2\,a3^2\,a4^4 + 17\,a1^4\,a4^5 - 16\,a1^2\,a2\,a4^5 - 192\,a2^2\,a4^5 - 192\,a1\,a3\,a4^5 + 256\,a4^6 + \\
&a1^2\,a2^4\,a3^3\,a5 - 4\,a2^5\,a3^3\,a5 - 6\,a1^3\,a2^2\,a3^4\,a5 + 25\,a1\,a2^3\,a3^4\,a5 + 8\,a1^4\,a3^5\,a5 - 36\,a1^2\,a2\,a3^5\,a5 - \\
&12\,a2^2\,a3^5\,a5 + 38\,a1\,a3^6\,a5 + a1^4\,a2^4\,a3\,a4\,a5 - 9\,a1^2\,a2^5\,a3\,a4\,a5 + 18\,a2^6\,a3\,a4\,a5 - \\
&4\,a1^5\,a2^2\,a3^2\,a4\,a5 + 43\,a1^3\,a2^3\,a3^2\,a4\,a5 - 95\,a1\,a2^4\,a3^2\,a4\,a5 - 28\,a1^4\,a2\,a3^3\,a4\,a5 + \\
&93\,a1^2\,a2^2\,a3^3\,a4\,a5 + 12\,a2^3\,a3^3\,a4\,a5 - 12\,a1^3\,a3^4\,a4\,a5 - 29\,a1\,a2\,a3^4\,a4\,a5 - 124\,a3^5\,a4\,a5 + \\
&2\,a1^7\,a2^2\,a4^2\,a5 - 22\,a1^5\,a2^3\,a4^2\,a5 + 76\,a1^3\,a2^4\,a4^2\,a5 - 78\,a1\,a2^5\,a4^2\,a5 - 8\,a1^8\,a3\,a4^2\,a5 + \\
&88\,a1^6\,a2\,a3\,a4^2\,a5 - 287\,a1^4\,a2^2\,a3\,a4^2\,a5 + 168\,a1^2\,a2^3\,a3\,a4^2\,a5 + 196\,a2^4\,a3\,a4^2\,a5 - \\
&54\,a1^5\,a3^2\,a4^2\,a5 + 447\,a1^3\,a2\,a3^2\,a4^2\,a5 - 528\,a1\,a2^2\,a3^2\,a4^2\,a5 - 172\,a1^2\,a3^3\,a4^2\,a5 + \\
&590\,a2\,a3^3\,a4^2\,a5 + 12\,a1^7\,a4^3\,a5 - 148\,a1^5\,a2\,a4^3\,a5 + 514\,a1^3\,a2^2\,a4^3\,a5 - 384\,a1\,a2^3\,a4^3\,a5 + \\
&180\,a1^4\,a3\,a4^3\,a5 - 1174\,a1^2\,a2\,a3\,a4^3\,a5 - 160\,a2^2\,a3\,a4^3\,a5 + 780\,a1\,a3^2\,a4^3\,a5 - 276\,a1^3\,a4^4\,a5 + \\
&1760\,a1\,a2\,a4^4\,a5 - 1600\,a3\,a4^4\,a5 + a1^6\,a2^4\,a5^2 - 9\,a1^4\,a2^5\,a5^2 + 27\,a1^2\,a2^6\,a5^2 - 27\,a2^7\,a5^2 - \\
&8\,a1^7\,a2^2\,a3\,a5^2 + 72\,a1^5\,a2^3\,a3\,a5^2 - 210\,a1^3\,a2^4\,a3\,a5^2 + 198\,a1\,a2^5\,a3\,a5^2 + 16\,a1^8\,a3^2\,a5^2 - \\
&144\,a1^6\,a2\,a3^2\,a5^2 + 370\,a1^4\,a2^2\,a3^2\,a5^2 - 185\,a1^2\,a2^3\,a3^2\,a5^2 - 150\,a2^4\,a3^2\,a5^2 + 152\,a1^5\,a3^3\,a5^2 -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&700\,a1^3\,a2\,a3^3\,a5^2 + 525\,a1\,a2^2\,a3^3\,a5^2 + 375\,a1^2\,a3^4\,a5^2 - 125\,a2\,a3^4\,a5^2 + 12\,a1^6\,a2^2\,a4\,a5^2 - \\
&76\,a1^4\,a2^3\,a4\,a5^2 + 141\,a1^2\,a2^4\,a4\,a5^2 - 99\,a2^5\,a4\,a5^2 - 48\,a1^7\,a3\,a4\,a5^2 + 304\,a1^5\,a2\,a3\,a4\,a5^2 - \\
&397\,a1^3\,a2^2\,a3\,a4\,a5^2 + 15\,a1\,a2^3\,a3\,a4\,a5^2 - 676\,a1^4\,a3^2\,a4\,a5^2 + 1995\,a1^2\,a2\,a3^2\,a4\,a5^2 - \\
&725\,a2^2\,a3^2\,a4\,a5^2 - 2050\,a1\,a3^3\,a4\,a5^2 + 86\,a1^6\,a4^2\,a5^2 - 294\,a1^4\,a2\,a4^2\,a5^2 - \\
&610\,a1^2\,a2^2\,a4^2\,a5^2 + 1200\,a2^3\,a4^2\,a5^2 + 1470\,a1^3\,a3\,a4^2\,a5^2 - 850\,a1\,a2\,a3\,a4^2\,a5^2 + \\
&3250\,a3^2\,a4^2\,a5^2 - 1450\,a1^2\,a4^3\,a5^2 - 2000\,a2\,a4^3\,a5^2 - 14\,a1^5\,a2^2\,a5^3 + 50\,a1^3\,a2^3\,a5^3 + \\
&56\,a1^6\,a3\,a5^3 - 200\,a1^4\,a2\,a3\,a5^3 - 125\,a1^2\,a2^2\,a3\,a5^3 + 250\,a1^3\,a3^2\,a5^3 + 625\,a1\,a2\,a3^2\,a5^3 - \\
&468\,a1^5\,a4\,a5^3 + 2300\,a1^3\,a2\,a4\,a5^3 - 1750\,a1\,a2^2\,a4\,a5^3 - 3500\,a1^2\,a3\,a4\,a5^3 - 1250\,a2\,a3\,a4\,a5^3 + \\
&7500\,a1\,a4^2\,a5^3 + 625\,a1^4\,a5^4 - 3125\,a1^2\,a2\,a5^4 + 3125\,a2^2\,a5^4 + 3125\,a1\,a3\,a5^4 - 9375\,a4\,a5^4 + \\
&\big(-2\,a2\,a3^6 - a1\,a2^3\,a3^3\,a4 - 2\,a1^2\,a2\,a3^4\,a4 + 19\,a2^2\,a3^4\,a4 + 6\,a1\,a3^5\,a4 - a1^3\,a2^3\,a3\,a4^2 + \\
&\quad 3\,a1\,a2^4\,a3\,a4^2 - 2\,a1^4\,a2\,a3^2\,a4^2 + 28\,a1^2\,a2^2\,a3^2\,a4^2 - 51\,a2^3\,a3^2\,a4^2 + 4\,a1^3\,a3^3\,a4^2 - \\
&\quad 89\,a1\,a2\,a3^3\,a4^2 + 3\,a3^4\,a4^2 - 2\,a1^6\,a2\,a4^3 + 19\,a1^4\,a2^2\,a4^3 - 51\,a1^2\,a2^3\,a4^3 + 32\,a2^4\,a4^3 + \\
&\quad 6\,a1^5\,a3\,a4^3 - 89\,a1^3\,a2\,a3\,a4^3 + 212\,a1\,a2^2\,a3\,a4^3 + 102\,a1^2\,a3^2\,a4^3 + 76\,a2\,a3^2\,a4^3 + \\
&\quad 3\,a1^4\,a4^4 + 76\,a1^2\,a2\,a4^4 - 256\,a2^2\,a4^4 - 384\,a1\,a3\,a4^4 + 512\,a4^5 - 2\,a1^3\,a2^3\,a3^2\,a5 + \\
&\quad 9\,a1\,a2^4\,a3^2\,a5 + 8\,a1^4\,a2\,a3^3\,a5 - 32\,a1^2\,a2^2\,a3^3\,a5 - 31\,a2^3\,a3^3\,a5 - 8\,a1^3\,a3^4\,a5 + \\
&\quad 112\,a1\,a2\,a3^4\,a5 - 58\,a3^5\,a5 - 2\,a1^5\,a2^3\,a4\,a5 + 15\,a1^3\,a2^4\,a4\,a5 - 27\,a1\,a2^5\,a4\,a5 + \\
&\quad 8\,a1^6\,a2\,a3\,a4\,a5 - 50\,a1^4\,a2^2\,a3\,a4\,a5 + 33\,a1^2\,a2^3\,a3\,a4\,a5 + 117\,a2^4\,a3\,a4\,a5 - \\
&\quad 24\,a1^5\,a3^2\,a4\,a5 + 194\,a1^3\,a2\,a3^2\,a4\,a5 - 231\,a1\,a2^2\,a3^2\,a4\,a5 - 234\,a1^2\,a3^3\,a4\,a5 + \\
&\quad 105\,a2\,a3^3\,a4\,a5 + 8\,a1^7\,a4^2\,a5 - 94\,a1^5\,a2\,a4^2\,a5 + 347\,a1^3\,a2^2\,a4^2\,a5 - 366\,a1\,a2^3\,a4^2\,a5 + \\
&\quad 166\,a1^4\,a3\,a4^2\,a5 - 901\,a1^2\,a2\,a3\,a4^2\,a5 + 260\,a2^2\,a3\,a4^2\,a5 + 1220\,a1\,a3^2\,a4^2\,a5 - \\
&\quad 364\,a1^3\,a4^3\,a5 + 1640\,a1\,a2\,a4^3\,a5 - 2400\,a3\,a4^3\,a5 + 8\,a1^6\,a2^2\,a5^2 - 66\,a1^4\,a2^3\,a5^2 + \\
&\quad 162\,a1^2\,a2^4\,a5^2 - 108\,a2^5\,a5^2 - 32\,a1^7\,a3\,a5^2 + 264\,a1^5\,a2\,a3\,a5^2 - 574\,a1^3\,a2^2\,a3\,a5^2 + \\
&\quad 180\,a1\,a2^3\,a3\,a5^2 - 352\,a1^4\,a3^2\,a5^2 + 1340\,a1^2\,a2\,a3^2\,a5^2 - 325\,a2^2\,a3^2\,a5^2 - 850\,a1\,a3^3\,a5^2 + \\
&\quad 48\,a1^6\,a4\,a5^2 - 318\,a1^4\,a2\,a4\,a5^2 + 305\,a1^2\,a2^2\,a4\,a5^2 + 525\,a2^3\,a4\,a5^2 + 1090\,a1^3\,a3\,a4\,a5^2 - \\
&\quad 3075\,a1\,a2\,a3\,a4\,a5^2 + 2750\,a3^2\,a4\,a5^2 - 550\,a1^2\,a4^2\,a5^2 - 500\,a2\,a4^2\,a5^2 - 56\,a1^5\,a5^3 + \\
&\quad 350\,a1^3\,a2\,a5^3 - 375\,a1\,a2^2\,a5^3 - 750\,a1^2\,a3\,a5^3 + 625\,a2\,a3\,a5^3 + 2500\,a1\,a4\,a5^3 - 3125\,a5^4\big)\,x + \\
&\big(a2^2\,a3^4 + 2\,a1\,a3^5 + 3\,a1^2\,a2^2\,a3^2\,a4 - 6\,a2^3\,a3^2\,a4 - 19\,a1\,a2\,a3^3\,a4 - 8\,a3^4\,a4 + a1^4\,a2^2\,a4^2 - \\
&\quad 6\,a1^2\,a2^3\,a4^2 + 9\,a2^4\,a4^2 + 2\,a1^5\,a3\,a4^2 - 19\,a1^3\,a2\,a3\,a4^2 + 30\,a1\,a2^2\,a3\,a4^2 + 41\,a1^2\,a3^2\,a4^2 + \\
&\quad 76\,a2\,a3^2\,a4^2 - 8\,a1^4\,a4^3 + 76\,a1^2\,a2\,a4^3 - 136\,a2^2\,a4^3 - 264\,a1\,a3\,a4^3 + 400\,a4^4 + \\
&\quad 2\,a1^4\,a2^2\,a3\,a5 - 9\,a1^2\,a2^3\,a3\,a5 - 8\,a1^5\,a3^2\,a5 + 28\,a1^3\,a2\,a3^2\,a5 + 45\,a1\,a2^2\,a3^2\,a5 - \\
&\quad 70\,a1^2\,a3^3\,a5 - 50\,a2\,a3^3\,a5 - 8\,a1^5\,a2\,a4\,a5 + 46\,a1^3\,a2^2\,a4\,a5 - 54\,a1\,a2^3\,a4\,a5 + \\
&\quad 68\,a1^4\,a3\,a4\,a5 - 354\,a1^2\,a2\,a3\,a4\,a5 + 90\,a2^2\,a3\,a4\,a5 + 630\,a1\,a3^2\,a4\,a5 - 144\,a1^3\,a4^2\,a5 + \\
&\quad 640\,a1\,a2\,a4^2\,a5 - 1400\,a3\,a4^2\,a5 + 16\,a1^6\,a5^2 - 120\,a1^4\,a2\,a5^2 + 225\,a1^2\,a2^2\,a5^2 + \\
&\quad 250\,a1^3\,a3\,a5^2 - 875\,a1\,a2\,a3\,a5^2 + 625\,a3^2\,a5^2 - 200\,a1^2\,a4\,a5^2 + 500\,a2\,a4\,a5^2\big)\,x^2 + \\
&\big(-2\,a1\,a2\,a3^3 - 2\,a3^4 - 2\,a1^3\,a2\,a3\,a4 + 5\,a1\,a2^2\,a3\,a4 + 6\,a1^2\,a3^2\,a4 + 21\,a2\,a3^2\,a4 - \\
&\quad 2\,a1^4\,a4^2 + 21\,a1^2\,a2\,a4^2 - 40\,a2^2\,a4^2 - 80\,a1\,a3\,a4^2 + 160\,a4^3 - 2\,a1^3\,a2^2\,a5 + \\
&\quad 9\,a1\,a2^3\,a5 + 16\,a1^4\,a3\,a5 - 66\,a1^2\,a2\,a3\,a5 - 15\,a2^2\,a3\,a5 + 120\,a1\,a3^2\,a5 - \\
&\quad 44\,a1^3\,a4\,a5 + 190\,a1\,a2\,a4\,a5 - 400\,a3\,a4\,a5 - 50\,a1^2\,a5^2 + 125\,a2\,a5^2\big)\,x^3 + \\
&\big(a1^2\,a3^2 + 2\,a2\,a3^2 + 2\,a1^2\,a2\,a4 - 6\,a2^2\,a4 - 14\,a1\,a3\,a4 + 40\,a4^2 - 8\,a1^3\,a5 + 30\,a1\,a2\,a5 - 50\,a3\,a5\big) \\
&\; x^4 + (-2\,a1\,a3 + 8\,a4)\,x^5 + x^6
\end{aligned}
$$

上の式が $f_{20}(x)$ です．文献[1][2]によると，
f が既約な5次方程式の時に限り，$f_{20}(x)$ は有理数解をただ一つ持ちます．

θ_b，θ_c，θ_d と θ は解の置換に関する性質は非常に似ています．
しかし少なくとも f_c，f_d については上の性質は成り立たないようです．
（f_b については不明です．）例えば，「$\theta_1 = \theta$ ，$\theta_2 = (1, 2, 3)\,\theta_1$，
$\theta_3 = (1, 3, 2)\,\theta_1$，$\theta_4 = (1, 2)\,\theta_1$，$\theta_5 = (2, 3)\,\theta_1$，$\theta_6 = (1, 3)\,\theta_1$」とおくと，

θ_1 は F_{20} によって動かず, $\theta_2 \sim \theta_6$ は「$\theta_2 \xrightarrow{\sigma} \theta_6 \xrightarrow{\sigma} \theta_3 \xrightarrow{\sigma} \theta_4 \xrightarrow{\sigma} \theta_5 \xrightarrow{\sigma} \theta_2$」,
「$\theta_2 \overset{\tau}{\longleftrightarrow} \theta_2$」, 「$\theta_3 \overset{\tau}{\longleftrightarrow} \theta_5$」, 「$\theta_4 \overset{\tau}{\longleftrightarrow} \theta_6$」と動きます. そして**この動き方は θ_b ,
θ_c, θ_d も全く同じ**です. しかし f_{20} と f_c , f_d は異なる振る舞いをします.

即ち殆ど全ての可解で既約な5次方程式については
A :「$f_c = (x - \theta_1)\, q(x)$ $\left(\theta_1\right.$ は有理数, $q(x)$ はQ上既約$\left.\right)$」となりますが,
例外的に B :「$f_c = (x - \theta_1)(x - \theta_2)^5$ $\left(\theta_1, \theta_2\right.$ は有理数$\left.\right)$」となる事が有ります.
f_d についても同様です.

例えば「$f = x^5 + 2$」は Gal = F_{20} の既約5次方程式ですが,
f20, fb, fc, fd は次の様になります.

In[∘]:=
```
f20 := p20 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → {0, 0, 0, 0, -2}];
fb := pb /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → {0, 0, 0, 0, -2}];
fc := pc /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → {0, 0, 0, 0, -2}];
fd := pd /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → {0, 0, 0, 0, -2}];
Factor[f20]
Factor[fb]
Factor[fc]
Factor[fd]
```

Out[∘]=

$x\left(-50000 + x^5\right)$

Out[∘]=

$x\left(-160000000000 + x^5\right)$

Out[∘]=

$(-1250 + x)(-250 + x)^5$

Out[∘]=

$(-7812500 + x)(-312500 + x)^5$

このようなことになる理由は, 私にはまだ良く分かりません.

5 – 3. 解の公式について

参考文献[7]の中で, Daniel Lazard氏は, 5次方程式の解の公式を挙げられています. ここでは Dummit氏のθを少し変形したF_{20}不変な式が沢山使われています. 具体的には

$i_4=\theta = x_1^2\,(x_2 x_5 + x_3 x_4) + x_2^2\,(x_1 x_3 + x_4 x_5) + x_3^2\,(x_1 x_5 + x_2 x_4) + x_4^2\,(x_1 x_2 + x_3 x_5) + x_5^2\,(x_1 x_4 + x_2 x_3)$

$i_5=x_1^3\,(x_2 x_5 + x_3 x_4) + x_2^3\,(x_1 x_3 + x_4 x_5) + x_3^3\,(x_1 x_5 + x_2 x_4) + x_4^3\,(x_1 x_2 + x_3 x_5) + x_5^3\,(x_1 x_4 + x_2 x_3)$

$i_6=x_1^4\,(x_2 x_5 + x_3 x_4) + x_2^4\,(x_1 x_3 + x_4 x_5) + x_3^4\,(x_1 x_5 + x_2 x_4) + x_4^4\,(x_1 x_2 + x_3 x_5) + x_5^4\,(x_1 x_4 + x_2 x_3)$

$i_7=x_1^3\left(x_2^2 x_5^2 + x_3^2 x_4^2\right) + x_2^3\left(x_1^2 x_3^2 + x_4^2 x_5^2\right) + x_3^3\left(x_1^2 x_5^2 + x_2^2 x_4^2\right) + x_4^3\left(x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_5^2\right) + x_5^3\left(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2\right)$

$i_8=x_1^4\left(x_2^2 x_5^2 + x_3^2 x_4^2\right) + x_2^4\left(x_1^2 x_3^2 + x_4^2 x_5^2\right) + x_3^4\left(x_1^2 x_5^2 + x_2^2 x_4^2\right) + x_4^4\left(x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_5^2\right) + x_5^4\left(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2\right)$

です. (因みに i_3 は対称式なのですぐ値が求まります.) 氏はどうやらこれらの式を使って5次方程式の解の公式(i_4とfの係数を使った式) を導かれている様なのですが, それは非常に複雑で長く, その過程もまだ

理解できていません. なお Dummit 氏も「x^5+ax+b=0」の形の方程式に限って「解の公式（アルゴリズム)」を発表されていますが, こちらはず〜と短いです.

5 – 4. Mathematica のバグ？

今回, x1~x5の値を計算している時に変な事に遭遇しました. 下の x2,y2の式は「全く同じ」に見えますが, 小数近似の値は異なっています. エラーは出ていないので, 全角空白が入っていることはありません.

In[◦]:=
```
r0 = -2;
RA = {-7132 + 415 √295, -4 (83 + 5 √295), 4 (-83 + 5 √295), -7132 - 415 √295};
realRoot[p_] := Sign[p] Abs[p]^(1/5)
{r1, r2, r3, r4} = realRoot /@ RA;
ξ = Cos[2 Pi/5] + I Sin[2 Pi/5];
x2 = 1/5 (r0 + ξ^4 r1 + ξ^3 r2 + ξ^2 r3 + ξ r4);
y2 = 1/5 (r0 + ξ^4 r1 + ξ^3 r2 + ξ^2 r3 + ξ r4);
N[x2]
N[y2]
```

Out[◦]=

$1.64675 + 2.67772\, i$

Out[◦]=

$-0.568969 - 0.411374\, i$

x2, y2 を表示すると式自体が違う事が解ります.

In[◦]:=
```
x2
y2
```

Out[◦]=

$$\frac{1}{5}\left(-\left(7132-415\sqrt{295}\right)^{1/5}\left(-2+i\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right)^4-\left(7132+415\sqrt{295}\right)^{1/5}\left(i\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right)+2^{2/5}\left(-83+5\sqrt{295}\right)^{1/5}\left(i\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right)^2-2^{2/5}\left(83+5\sqrt{295}\right)^{1/5}\left(i\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right)^3\right)$$

Out[◦]=

$$\frac{1}{5}\left(-2-\left(7132+415\sqrt{295}\right)^{1/5}\left(i\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right)+2^{2/5}\left(-83+5\sqrt{295}\right)^{1/5}\left(i\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right)^2-2^{2/5}\left(83+5\sqrt{295}\right)^{1/5}\left(i\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right)^3-\left(7132-415\sqrt{295}\right)^{1/5}\left(i\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right)^4\right)$$

次の場合も奇妙な事が起こっています．

```
a = 1;
b = 2;
x3 = a + b^2
y3 = a + b^2
```

Out[ ]=

5

Out[ ]=

9

a, bの値を消去すると理由が(少しだけ)分かります．

In[ ]:=
```
Clear[a, b]
x3 = a + b^2
y3 = a + b^2
```

Out[ ]=

$a + b^2$

Out[ ]=

$(a + b)^2$

y3を右端から1文字ずつ消去していくと， もっと根本の理由が分かります．

In[ ]:=
```
a + b^2(*start*)
a + b
a
□
```

Out[ ]=

$(a + b)^2$

Out[ ]=

a + b

Out[ ]=

a □

なんと, 全てを消去しても▫が残っています． (▫は Mathematica で添字や分数などを綺麗な形で入力するときに現れるフォームです. 目には見えませんでしたが， ▫があり， その中に a+b が入っていた訳です．) y2についても同様です． これが原因ですが， 気づく事は非常に難しいです． 皆様もお気を付けください． 私は半日ほど， これに嵌りました． (^_^;)