5 次方程式の短い解の公式 B with Mathematica14.0

```
In[1]:= ClearAll["`*"];
```

このファイル (formulaB.nb) では「Solving Quintics and Septics by Radicals (Monammed A. Faggal, Daniel Lazard 共著)」(以下【原論文】と略記)

で示された「7 次方程式の解の公式」と類似の方法で導いた

「5 次方程式の解の公式 (formulaB)」の説明をします。

ただ formulaB の方は、数値計算も併用しないと厳密解も求まりません。

それが【原論文】の著者の方に採用されなかった理由だと思います。

a_1 と a1 など添え字の大きさのみ違う変数は同じ変数を表すものとします。

原則として text の中では読みやすいように a_1 を使い、input 文の中では a1 を使います。)

また、原則として、抽象的な関数は大文字で、それを具体化した関数は小文字で表すとします。

(これは【原論文】でも同じやり方です。) また変数に関しては具体的な数値には

$\$a$ の様に「\$」を付けて区別する事もあります。

そして Global 変数は「\$」を付けることが多いです。

このファイルは Mathematica 14.0 で作成されています。

コマンドの簡単な説明は入っていますが、詳しい説明は Google してください。

Wolfram のサイトで詳しい説明を例題付きで読むことができます。

また原論文は Maple で書かれています。したがって、残念ながら、

グレブナー基底に関しては再現できないこともありました。

Mathematica をお持ちの方は「ノートブックを評価」(15秒程度)して頂ければ 対話的 (interactive) に読むことができ、分かりやすいと思います。お持ちでない方は PDF をご覧になってくれても良いのですが、PDFは文の体裁がかなり崩れ、プログラムは右端が切れてしまいます (ここは是非WolframとAdobeに頑張ってもらいたい点です)。しかし、無料の Wolfram Player を使えば、元の体裁のままノートブックを読むことができるのでお勧めです。

以下、\$2までは「FormulaA.nb」とほとんど同じです。

§1. F_{10} について

既約でmonicな有理数係数の5次の整式を $f = x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5$,
 $f = 0$ の解を x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 と置きます.

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対し「 $\sigma: x_k \rightarrow x_{k+1}, \tau: x_k \rightarrow x_{3-k}$ 」(添え数字はMod5) とおくと,

巡回群 $C_5 = \langle \sigma \rangle$, 2面体群 $D_5 = \langle \sigma, \tau^2 \rangle$,

Frobenius群 $F_{20} = \langle \sigma, \tau \rangle$ で, 位数はそれぞれ 5, 10, 20 です.

そして f のガロア群を Gal とすると, f が可解の時, Gal は上の3つのいずれかです.

(σ, τ の定義は, 私の以前のファイルとは異なりますが, 以前の定義と共役です.)

$\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ のうち異なる2個をとりその和を作ります.

その集合を $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{10}\}$ と置きます.

```
In[2]:= Y = Plus @@@ Subsets[{x0, x1, x2, x3, x4}, {2}]
```

```
Out[2]= {x0 + x1, x0 + x2, x0 + x3, x0 + x4, x1 + x2, x1 + x3, x1 + x4, x2 + x3, x2 + x4, x3 + x4}
```

「 $F_{10} = (x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_{10})$ 」と定義します.

```
In[3]:= F10 = Product[x - Y[[k]], {k, 1, 10}]
```

```
Out[3]= (x - x0 - x1)(x - x0 - x2)(x - x1 - x2)(x - x0 - x3)(x - x1 - x3)
(x - x2 - x3)(x - x0 - x4)(x - x1 - x4)(x - x2 - x4)(x - x3 - x4)
```

これは $\text{vars} = \{x_0, x_1, \dots, x_4\}$ の対称式なので, vars の基本対称式 s_k で表されます.

更に「解と係数の関係」より $a_1, a_2, \dots, a_5$ で表せます.

SymmetricReduction [$f, \{x_1, \dots, x_n\}$]

$x_1, \dots, x_n$ において $f = p + q$ であるような多項式のペア $\{p, q\}$ を与える. ただし, p は対称な部分であり q は剰余である.

SymmetricReduction [$f, \{x_1, \dots, x_n\}, \{s_1, \dots, s_n\}$]

p における初等対称式を $s_1, \dots, s_n$ で置き換えたペア $\{p, q\}$ を与える.

```
In[4]:= vars = {x4, x3, x2, x1, x0};
```

```
F10 = SymmetricReduction[F10, vars, {-a1, a2, -a3, a4, -a5}] [[1]] // Collect[#, x] &
```

```
Out[5]= a1 a2 a3 a4 - a3^2 a4 - a1^2 a4^2 - a1 a2^2 a5 + a2 a3 a5 + 2 a1 a4 a5 - a5^2 +
(a1 a2 a3^2 - a3^3 + a1 a2^2 a4 - 4 a1 a4^2 - 4 a1^2 a2 a5 - a2^2 a5 + 4 a1 a3 a5 + 4 a4 a5) x +
(2 a1 a2^2 a3 + a1^2 a3^2 - a2 a3^2 + a1^2 a2 a4 + a2^2 a4 - 3 a1 a3 a4 - 4 a4^2 - 4 a1^3 a5 - 9 a1 a2 a5 +
7 a3 a5) x^2 + (a1 a2^3 + 4 a1^2 a2 a3 + a2^2 a3 - 4 a3 a4 - 16 a1^2 a5 - 4 a2 a5) x^3 +
(3 a1^2 a2^2 + a2^3 + 2 a1^3 a3 + 6 a1 a2 a3 - a3^2 - 2 a1^2 a4 - 2 a2 a4 - 22 a1 a5) x^4 +
(3 a1^3 a2 + 6 a1 a2^2 + 5 a1^2 a3 + 2 a2 a3 - 5 a1 a4 - 11 a5) x^5 +
(a1^4 + 9 a1^2 a2 + 3 a2^2 + 4 a1 a3 - 3 a4) x^6 +
(4 a1^3 + 9 a1 a2 + a3) x^7 + (6 a1^2 + 3 a2) x^8 + 4 a1 x^9 + x^10
```

すなわち

$$\begin{aligned}
 F_{10} = \prod_{0 \leq i < j \leq 4} \{ [x - (x_i + x_j)] \} = & x^{10} + 4 a_1 x^9 + (6 a_1^2 + 3 a_2) x^8 + (4 a_1^3 + 9 a_1 a_2 + a_3) x^7 + \\
 & (a_1^4 + 9 a_1^2 a_2 + 3 a_2^2 + 4 a_1 a_3 - 3 a_4) x^6 + (3 a_1^3 a_2 + 6 a_1 a_2^2 + 5 a_1^2 a_3 + 2 a_2 a_3 - 5 a_1 a_4 - 11 a_5) x^5 + \\
 & (3 a_1^2 a_2^2 + a_2^3 + 2 a_1^3 a_3 + 6 a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - 2 a_1^2 a_4 - 2 a_2 a_4 - 22 a_1 a_5) x^4 + \\
 & (a_1 a_2^3 + 4 a_1^2 a_2 a_3 + a_2^2 a_3 - 4 a_3 a_4 - 16 a_1^2 a_5 - 4 a_2 a_5) x^3 + \\
 & (2 a_1 a_2^2 a_3 + a_1^2 a_3^2 - a_2 a_3^2 + a_1^2 a_2 a_4 + a_2^2 a_4 - 3 a_1 a_3 a_4 - 4 a_4^2 - 4 a_1^3 a_5 - 9 a_1 a_2 a_5 + 7 a_3 a_5) x^2 + \\
 & (a_1 a_2 a_3^2 - a_3^3 + a_1 a_2^2 a_4 - 4 a_1 a_4^2 - 4 a_1^2 a_2 a_5 - a_2^2 a_5 + 4 a_1 a_3 a_5 + 4 a_4 a_5) x + \\
 & a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2 - a_1 a_2^2 a_5 + a_2 a_3 a_5 + 2 a_1 a_4 a_5 - a_5^2
 \end{aligned}$$

【コメント】原論文では、終結式 (resultant) を使って導いています。

§2. F_1, F_2 について

σ による Y の軌道分解は 次の O_1, O_2 の二つしかありません。
(Mod5 で考えると, O_1 は添え数字の差が1, O_2 は差が2)

```
In[7]:= O1 = Table[Total[vars[[Sort[Mod[{0, 1} + k, 5]] + 1]], {k, 0, 4}];
O2 = Table[Total[vars[[Sort[Mod[{0, 2} + k, 5]] + 1]], {k, 0, 4}];
Column[{"O1:" <> ToString[O1], "O2:" <> ToString[O2]]]
Out[9]= O1: {x3 + x4, x2 + x3, x1 + x2, x0 + x1, x0 + x4}
O2: {x2 + x4, x1 + x3, x0 + x2, x1 + x4, x0 + x3}
```

O_1, O_2 の要素を解に持つ5次の整式をそれぞれ F_1, F_2 と置きます。

```
In[10]:= F1 = Product[(x - O1[[k]]), {k, 1, 5}]
F2 = Product[(x - O2[[k]]), {k, 1, 5}]
Out[10]= (x - x0 - x1) (x - x1 - x2) (x - x2 - x3) (x - x0 - x4) (x - x3 - x4)
Out[11]= (x - x0 - x2) (x - x0 - x3) (x - x1 - x3) (x - x1 - x4) (x - x2 - x4)
```

F_1, F_2 は σ, τ^2 で変わらず, τ によって $F_1 \leftrightarrow F_2$ と移ります。

また「 $f = 0$ 」の判別式を D とおくと, $\sqrt{D}$ は σ, τ^2 で変わらず,

τ によって $\sqrt{D} \leftrightarrow -\sqrt{D}$ と移ります。故に F_1, F_2 の係数は $Q(\sqrt{D})$ に入ります。

また「5 次 の整式の根が1つの軌道を形成する場合、その整式は既約多項式または $(x - \alpha)^5$ となる」
ので, $\text{Gal} = F_{10}$ または C_5 のとき, F_1, F_2 は共に「 Q 上既約な5次式」となります。

$\text{Gal} = F_{20}$ のとき, F_{10} は Q 上既約ですが, $Q(\sqrt{D})$ 上では $F_{10} = F_1 F_2$ と因数分解されます。

■ 【例1】 $f = 4 + 10x - x^2 - 6x^3 + x^5$ ($\text{Gal} = F_{10}$)

```
In[12]:= f = 4 + 10x - x^2 - 6x^3 + x^5;
f10 =
F10 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} -> Reverse@CoefficientList[f, x, 5]]
d = Sqrt[Discriminant[f, x]] (*d= sqrt(D)*)
Factor[f10]
Out[13]= -2 + 17x - 62x^2 + 100x^3 - 97x^4 - 32x^5 + 78x^6 - x^7 - 18x^8 + x^10
Out[14]= 262
Out[15]= (-1 + 6x - 11x^2 - 11x^3 + x^5) (2 - 5x + 10x^2 - 7x^3 + x^5)
```

f_{10} は Q 上で f_1, f_2 に因数分解できました。

■ 【例2】 $f = 12 - 6x + 12x^2 - 9x^3 + x^5$ (Gal = F_{20})

```
In[16]:= f = 5 + 5 x - 5 x^3 + x^5
f10 =
  F10 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → Reverse@CoefficientList[f, x, 5]]
Factor[f10];
d = Sqrt[Discriminant[f, x]] (*d= √D*)
$f10 = Factor[f10, Extension → d]
f1 = FactorList[$f10, Extension → d][[3, 1]] * (-1/2) // Expand
f2 = FactorList[$f10, Extension → d][[4, 1]] * (1/2) // Expand
```

Out[16]=
 $5 + 5x - 5x^3 + x^5$

Out[17]=
 $-25 - 25x + 25x^2 + 100x^3 - 75x^4 - 55x^5 + 60x^6 - 15x^8 + x^{10}$

Out[19]=
 $525\sqrt{5}$

Out[20]=
 $-\frac{1}{4} (55 + 25\sqrt{5} + (-35 - 15\sqrt{5})x + (15 + 5\sqrt{5})x^3 - 2x^5)$
 $(-55 + 25\sqrt{5} + (35 - 15\sqrt{5})x + (-15 + 5\sqrt{5})x^3 + 2x^5)$

Out[21]=
 $-\frac{55}{2} - \frac{25\sqrt{5}}{2} + \frac{35x}{2} + \frac{15\sqrt{5}x}{2} - \frac{15x^3}{2} - \frac{5\sqrt{5}x^3}{2} + x^5$

Out[22]=
 $-\frac{55}{2} + \frac{25\sqrt{5}}{2} + \frac{35x}{2} - \frac{15\sqrt{5}x}{2} - \frac{15x^3}{2} + \frac{5\sqrt{5}x^3}{2} + x^5$

f_{10} は $\mathbb{Q}$ 上既約ですが、 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 上では f_1, f_2 に因数分解できました。

f_1, f_2 を見つけるプログラム *findF12* は次の様に作れます。出力は{f1,f2}で、\$f1,\$f2 は f1,f2のGlobal変数です。

```
In[23]:= findF12[f_] := Module[{factors, pos},
  Clear[a1, a2, a3, a4, a5];
  $f10 = F10 /.
    AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → Reverse@CoefficientList[f, x, 5]];
  factors = FactorList[$f10, Extension → Sqrt[Discriminant[f, x]]];
  pos = Position[Exponent[factors, x], 5][[All, 1]];
  {$f1, $f2} = Expand[# / Coefficient[#, x, 5]] & /@ factors[[All, 1]][[pos]];
  If[$f1 == x^5, {$f1, $f2} = {$f2, $f1}];
  Return[{$f1, $f2}]
]
```

In[24]:= **(*例*) findF12[5 + 5 x - 5 x³ + x⁵]**

Out[24]=

$$\left\{ -\frac{55}{2} - \frac{25\sqrt{5}}{2} + \frac{35x}{2} + \frac{15\sqrt{5}x}{2} - \frac{15x^3}{2} - \frac{5\sqrt{5}x^3}{2} + x^5, \right. \\ \left. -\frac{55}{2} + \frac{25\sqrt{5}}{2} + \frac{35x}{2} - \frac{15\sqrt{5}x}{2} - \frac{15x^3}{2} + \frac{5\sqrt{5}x^3}{2} + x^5 \right\}$$

In[25]:= **\$f1**

Out[25]=

$$-\frac{55}{2} - \frac{25\sqrt{5}}{2} + \frac{35x}{2} + \frac{15\sqrt{5}x}{2} - \frac{15x^3}{2} - \frac{5\sqrt{5}x^3}{2} + x^5$$

Gal = F₂₀ のとき, f1とf2は $\sqrt{D}$ の係数の符号のみ異なります.
したがって $f_1 + f_2$, $\sqrt{D} (f_1 - f_2)$ の係数は Qに含まれます.

In[26]:= **\$f1 + \$f2**

Sqrt[5] (\$f1 - \$f2) // Expand

Out[26]=

$$-55 + 35x - 15x^3 + 2x^5$$

Out[27]=

$$-125 + 75x - 25x^3$$

§3. G1, G2 の定義

ζ を1の虚数5乗根とすると、Lagrange 分解式は次の $r_0 \sim r_4$ になります。
(原論文では Fourier transform と呼んでいます.)

```
In[28]:= Clear[x0, x1, x2, x3, x4]
r0 = x0 + x1 + x2 + x3 + x4 ;
r1 = x0 +  $\zeta$ x1 +  $\zeta^2$ x2 +  $\zeta^3$ x3 +  $\zeta^4$ x4;
r2 = x0 +  $\zeta^2$ x1 +  $\zeta^4$ x2 +  $\zeta$ x3 +  $\zeta^3$ x4;
r3 = x0 +  $\zeta^3$ x1 +  $\zeta$ x2 +  $\zeta^4$ x3 +  $\zeta^2$ x4;
r4 = x0 +  $\zeta^4$ x1 +  $\zeta^3$ x2 +  $\zeta^2$ x3 +  $\zeta$ x4;
```

σ, τ によって r_k は次の様に移ります。

$[\sigma : r_0 \rightarrow r_0, r_1 \rightarrow \zeta^4 r_1, r_2 \rightarrow \zeta^3 r_2, r_3 \rightarrow \zeta^2 r_3, r_4 \rightarrow \zeta r_4]$,
 $[\tau : r_k \rightarrow r_{2k}, \tau^2 : r_k \rightarrow r_{4k}]$

ここからは「FormulaA.nb」と異なります。

$[u = r_1 + r_4, v = r_2 + r_3]$ とおくと $u \xrightarrow{\tau} v, v \xrightarrow{\tau} u$, また u, v は τ^2 で不変です。
さらに u, v の σ による軌道を解と持つ5次の整式をそれぞれ G_1, G_2 と置きます。即ち、

$$G_1 = (x - u) (x - \sigma(u)) \cdots (x - \sigma^4(u))$$

$$G_2 = (x - v) (x - \sigma(v)) \cdots (x - \sigma^4(v))$$

具体的に表し「 $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$ 」を使って変形します。

```
In[34]:= Clear[r1, r2, r3, r4,  $\zeta$ ]
```

```
In[35]:= G1 = (x - (r1 + r4)) (x - ( $\zeta^4$  r1 +  $\zeta$  r4))
(x - ( $\zeta^3$  r1 +  $\zeta^2$  r4)) (x - ( $\zeta^2$  r1 +  $\zeta^3$  r4)) (x - ( $\zeta$  r1 +  $\zeta^4$  r4));
G2 = (x - (r2 + r3)) (x - ( $\zeta^3$  r2 +  $\zeta^2$  r3))
(x - ( $\zeta$  r2 +  $\zeta^4$  r3)) (x - ( $\zeta^4$  r2 +  $\zeta$  r3)) (x - ( $\zeta^2$  r2 +  $\zeta^3$  r3));
```

```
In[37]:=
```

```
G1 = PolynomialMod[Collect[Expand[G1], x], Cyclotomic[5,  $\zeta$ ]]
G2 = PolynomialMod[Collect[Expand[G2], x], Cyclotomic[5,  $\zeta$ ]]
```

```
Out[37]=
```

$$-r_1^5 - r_4^5 + 5 r_1^2 r_4^2 x - 5 r_1 r_4 x^3 + x^5$$

```
Out[38]=
```

$$-r_2^5 - r_3^5 + 5 r_2^2 r_3^2 x - 5 r_2 r_3 x^3 + x^5$$

即ち「 $u = r_1 + r_4, v = r_2 + r_3$ 」とおくと

$$\begin{cases} G_1 = (x - u) (x - \sigma(u)) \cdots (x - \sigma^4(u)) = x^5 - 5 r_1 r_4 x^3 + 5 r_1^2 r_4^2 x - r_1^5 - r_4^5 & \square \\ G_2 = (x - v) (x - \sigma(v)) \cdots (x - \sigma^4(v)) = x^5 - 5 r_2 r_3 x^3 + 5 r_2^2 r_3^2 x - r_2^5 - r_3^5 & \square \end{cases}$$

従って

(*) G_1, G_2 の $(5-k)$ 次の係数をそれぞれ b_k, c_k ($1 \leq k \leq 5$) とおくと, $b_1 = c_1 = b_3 = c_3 = 0$

$$\begin{cases} r_1^5 + r_4^5 = -b_5 & \square \\ r_1 r_4 = -\frac{b_2}{5} & \square \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} r_2^5 + r_3^5 = -c_5 & \square \\ r_2 r_3 = -\frac{c_2}{5} & \square \end{cases}$$

故に, r_1^5 と r_4^5 は次の「 $R(x) = 0$ 」の2解となります. r_2^5 と r_3^5 は, b_2, b_5 をそれぞれ c_2, c_5 で置き換えた方程式の解となります.

In[39]:=

R[b2_,b5_] := x^2 + b5 x + (-b2/5)^5 (*評価してください*)

後は G_1, G_2 の具体的な形を, 何らかの方法で求めることができれば, 解の公式が得られます.

§4 g1, g2 を求める

(公式としてのG1, G2を具体化した関数をg1, g2とします.)

以下のセクションで「 $f = x^5 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5$ ($a_1 = 0$)」と仮定します.

§4-1. 補題

次の補題が必要になります

$$\text{【補題1】 } r_1 + r_4 - (r_2 + r_3) = \sqrt{5} (x_1 + x_4 - (x_2 + x_3))$$

(注1) 上の関係式を σ で移した式も成り立ちます. 例えば σ で移すと,

$$(\zeta^4 r_1 + \zeta r_4) - (\zeta^3 r_2 + \zeta^2 r_3) = \sqrt{5} (x_2 + x_0 - (x_3 + x_4))$$

(注2) $\{r_1, r_4\}$ と $\{r_2, r_3\}$ の2組に分ける時のみ上のような関係が成り立ちます. 例えば $\{r_1, r_3\}$ と $\{r_2, r_4\}$ の場合は成り立ちません.

$$\text{【補題2】 } r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 5 x_0$$

(注) 上の関係式を σ で移した式も成り立ちます.

例えば σ^{-1} で移すと「 $\zeta r_1 + \zeta^2 r_2 + \zeta^3 r_3 + \zeta^4 r_4 = 5 x_4$ 」となります.

【補題3】 s_1, s_2 をそれぞれ f_1, f_2 の解とします.

このとき s_1 と s_2 が共通の x_k を含まない $\Leftrightarrow f(-s_1 - s_2) = 0$

【1の証明】単純計算で, $r_1 + r_4 - (r_2 + r_3) = (\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3) (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)$
 ここで「 $\zeta = \text{Cos}[2/5 \text{Pi}] + \text{I Sin}[2/5 \text{Pi}]$ 」とすると「 $\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3 = \sqrt{5}$ 」
 です (有名事実). (注2) に関しては1つずつチェックすればOKと思われませんが,
 実は私も全てはチェックしていません. (^_^;

【2の証明】「 $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$ 」だから, r_i の定義式の両辺を加えて,
 $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 5 x_0$. さらに仮定より $a_1 = 0$ なので, $r_0 = 0$.

【3の証明】 F_1 の解は $\{x_3 + x_4, x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_0 + x_1, x_0 + x_4\}$,

F_2 の解は $\{x_2 + x_4, x_1 + x_3, x_0 + x_2, x_1 + x_4, x_0 + x_3\}$ です.

例えば「 $s_1 = x_3 + x_4, s_2 = x_0 + x_2$ 」とすると,

s_1 と s_2 は共通項がないので「 $f(-s_1 - s_2) = f(-x_3 - x_4 - x_0 - x_2) = f(x_1) = 0$ 」です.

一方, 「 $s_1 = x_3 + x_4, s_2 = x_1 + x_3$ 」とすると,

s_1 と s_2 は共通項 x_3 を持ち「 $f(-s_1 - s_2) = f(-x_1 - 2x_3 - x_4)$ 」

です. もしこの値が0になったとすると $(-x_1 - 2x_3 - x_4)$ は f の解のいずれかです.

仮に「 $-x_1 - 2x_3 - x_4 = x_2$ 」となったとすると「 $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ 」です.

この式を σ で移した式も成り立つので「 $x_2 + x_3 + 2x_4 + x_0 = 0, \dots, x_0 + x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ 」も成り立ちます。これは「 $x_0 = \dots = x_5$ 」を意味するので矛盾します。

§4-2. 終結式とGCD(最大公約因子)を使った求め方

(#1) 「 $x_1 + x_4, x_2 + x_3, r_1 + r_4, r_2 + r_3$, を σ^i (i はある 0 以上の整数) で移した式を各々 s_1, s_2, t_1, t_2 」とすると, 上の補題から以下の式を満たす f の解 x が存在します。

$$(\#2) \begin{cases} s_1 + s_2 + x = 0 & (\text{ア}) \\ t_1 + t_2 = 5x & (\text{イ}) \\ t_1 - t_2 = \sqrt{5}(s_1 - s_2) & (\text{ウ}) \\ f(x) = 0 & (\text{エ}) \\ f_1(s_1) = 0 & (\text{オ}) \\ f_2(s_2) = 0 & (\text{カ}) \end{cases}$$

「(#1) $\rightarrow$ (#2)」は明らかですが, 逆に (#2) が成り立てば (#1) が成り立ちそうです。
(以下は厳密な証明ではありません) というのも,

まず (オ) と (カ) から s_1 と s_2 は $x_i + x_j$ ($i \neq j$) の形です。

さらに (ア) (エ) より「 $f(-s_1 - s_2) = 0$ 」なので s_1 と s_2 は共通項 x_k を持ちません。

さらに (イ) (ウ) より $\{s_1, s_2, t_1, t_2\} =$

$$\{\sigma^i(x_1 + x_4), \sigma^i(x_2 + x_3), \sigma^i(r_1 + r_4), \sigma^i(r_2 + r_3)\} \text{ となります。}$$

まず (ア) (イ) (ウ) から x, s_1, s_2 を消去すると

$$\begin{cases} x = (t_1 + t_2) / 5 & \square \\ s_1 = -(t_1 + t_2) / 10 + \sqrt{5}(t_1 - t_2) / 10 & \square \\ s_2 = -(t_1 + t_2) / 10 - \sqrt{5}(t_1 - t_2) / 10 & \square \end{cases}$$

これらを (エ) ~ (カ) へ代入した後, t_1 の関係式 ($= G_1$) と t_2 の関係式 ($= G_2$)

を求めることができますが, 対称性より「 $f_1(s_1) \pm f_2(s_2)$ 」を用いた方が効率的です。

「 $f_1(s_1) = f_2(s_2) = 0$ 」 $\Leftrightarrow$ 「 $f_1(s_1) + f_2(s_2) = 0$ かつ $f_1(s_1) - f_2(s_2) = 0$ 」 ですから,
(エ) (オ) (カ) より

$$(\#3) \left[f\left(\frac{t_1 + t_2}{5}\right) = 0 \right] \wedge \\ \left[f_1(s_1) + f_2(s_2) = 0 \right] \wedge \left[f_1(s_1) - f_2(s_2) = 0 \right]$$

この連立方程式を満たす t_1 の条件式が G_1 で, t_2 の条件式が G_2 です。

よって, 終結式と最大公約因数 (GCD) を用いて求めます。

(#4) 終結式と最大公約因数 (GCD) を用いた求め方

$f\left(\frac{t_1 + t_2}{5}\right)$ と「 $f_1(s_1) + f_2(s_2)$ 」の t_2 に関する終結式を $R1(t_1)$,

$f\left(\frac{t_1+t_2}{5}\right)$ と「 $f_1(s_1) - f_2(s_2)$ 」の t_2 に関する終結式を $R_2(t_1)$

とすると、「 $G_1(t_1) = \text{DCG}(R_1(t_1), R_2(t_1))$ 」. G_2 は R_1 ,

R_2 を「 t_1 に関する終結式」として求め「 $G_2(t_2) = \text{DCG}(R_1(t_2), R_2(t_2))$ 」

■ 例. $f = 12 - 6x + 12x^2 - 9x^3 + x^5$

まずはコマンド findF12 を使って $f_1(x), f_2(x)$ を求めます.

```
In[40]:= Clear[f, f1, f2, g1, g2]
f[x_] = 12 - 6 x + 12 x^2 - 9 x^3 + x^5
f12 = findF12[f[x]];
f1[x_] = f12[[1]]
f2[x_] = f12[[2]]
```

```
Out[41]= 12 - 6 x + 12 x^2 - 9 x^3 + x^5
```

```
Out[43]= -93 - 15 \sqrt{41} + \frac{171 x}{2} + \frac{21 \sqrt{41} x}{2} + 6 x^2 - \frac{27 x^3}{2} - \frac{3 \sqrt{41} x^3}{2} + x^5
```

```
Out[44]= -93 + 15 \sqrt{41} + \frac{171 x}{2} - \frac{21 \sqrt{41} x}{2} + 6 x^2 - \frac{27 x^3}{2} + \frac{3 \sqrt{41} x^3}{2} + x^5
```

(#4) に従い、次の様に $g_1(x)$ が求まります。(最後の行は monic に直して、変数を $t_1 \rightarrow x$ に変えているだけです。)

```
In[45]:= R1 = Resultant[f[(t1 + t2) / 5], f1[-(t1 + t2) / 10 + Sqrt[5] (t1 - t2) / 10] +
f2[-(t1 + t2) / 10 - Sqrt[5] (t1 - t2) / 10], t2];
R2 = Resultant[f[(t1 + t2) / 5], f1[-(t1 + t2) / 10 + Sqrt[5] (t1 - t2) / 10] -
f2[-(t1 + t2) / 10 - Sqrt[5] (t1 - t2) / 10], t2];
gcd1 = PolynomialGCD[R1, R2, Extension -> Automatic]
g1[x_] = Expand[gcd1 / Coefficient[gcd1, t1, 5]] /. {t1 -> x} // Collect[#, x] &
```

```
Out[47]= 37500 - 2400 \sqrt{205} + 9675 t1 - 675 \sqrt{205} t1 - 225 t1^3 + 15 \sqrt{205} t1^3 + 2 t1^5
```

```
Out[48]= 18750 - 1200 \sqrt{205} + \left(\frac{9675}{2} - \frac{675 \sqrt{205}}{2}\right) x + \left(-\frac{225}{2} + \frac{15 \sqrt{205}}{2}\right) x^3 + x^5
```

同様に $g_2(x)$ が求まります.

```
In[49]:= Timing[R1 = Resultant[f[(t1 + t2) / 5], f1[-(t1 + t2) / 10 + Sqrt[5] (t1 - t2) / 10] +
f2[-(t1 + t2) / 10 - Sqrt[5] (t1 - t2) / 10], t1];
R2 = Resultant[f[(t1 + t2) / 5], f1[-(t1 + t2) / 10 + Sqrt[5] (t1 - t2) / 10] -
f2[-(t1 + t2) / 10 - Sqrt[5] (t1 - t2) / 10], t1];
gcd2 = PolynomialGCD[R1, R2, Extension -> Automatic];
g2[x_] = Expand[gcd2 / Coefficient[gcd2, t2, 5]] /. {t2 -> x} // Collect[#, x] &
```

```
Out[49]= {0.15625, 18750 + 1200 \sqrt{205} + \left(\frac{9675}{2} + \frac{675 \sqrt{205}}{2}\right) x + \left(-\frac{225}{2} - \frac{15 \sqrt{205}}{2}\right) x^3 + x^5}
```

g_1, g_2 を両方求めるには 約 0.3 秒 かかりましたが、次のグレブナー基底を使うとずっと速く求まります。

§4-3. グレブナー基底を使った求め方(原論文にはありません)

g_1 を求めるには(#3)の生成するイデアルのグレブナー基底を t_2 を消去するモードで実行します。

```
In[50]:= gb = GroebnerBasis[{f[(t1 + t2) / 5],
  f1[-(t1 + t2) / 10 + Sqrt[5] (t1 - t2) / 10] + f2[-(t1 + t2) / 10 - Sqrt[5] (t1 - t2) / 10],
  (f1[-(t1 + t2) / 10 + Sqrt[5] (t1 - t2) / 10] -
  f2[-(t1 + t2) / 10 - Sqrt[5] (t1 - t2) / 10])}, {t1}, {t2}]
Expand[# / Coefficient[#, t1, 5]] &[gb[[1]]] /. {t1 -> x} // Collect[#, x] &
```

```
Out[50]= {37500 - 2400 Sqrt[205] + (9675 - 675 Sqrt[205]) t1 + (-225 + 15 Sqrt[205]) t1^3 + 2 t1^5}
```

```
Out[51]= 18750 - 1200 Sqrt[205] + (9675 - 675 Sqrt[205]) x + (-225 + 15 Sqrt[205]) x^3 + x^5
```

g_2 を求めるには (#3) の生成するイデアルのグレブナー基底を t_1 を消去するモードで実行します。

```
In[52]:= Timing[gb = GroebnerBasis[{f[(t1 + t2) / 5],
  f1[-(t1 + t2) / 10 + Sqrt[5] (t1 - t2) / 10] + f2[-(t1 + t2) / 10 - Sqrt[5] (t1 - t2) / 10],
  (f1[-(t1 + t2) / 10 + Sqrt[5] (t1 - t2) / 10] -
  f2[-(t1 + t2) / 10 - Sqrt[5] (t1 - t2) / 10])}, {t2}, {t1}];
Expand[# / Coefficient[#, t2, 5]] &[gb[[1]]] /. {t2 -> x} // Collect[#, x] &
```

```
Out[52]= {0.03125, 18750 + 1200 Sqrt[205] + (9675 + 675 Sqrt[205]) x + (-225 - 15 Sqrt[205]) x^3 + x^5}
```

実行時間は合計で約0.03 秒です。この方が約10倍速いですが、グレブナー基底は時々予測不能の式を出してくるので、少し心配ではあります。実際、7次方程式ではうまくいかない例がありました。(g1={t1}またはg2={t2})となります。)

(#5) グレブナー基底を使った求め方

g_1 を求めるには、(#3)の生成するイデアルのグレブナー基底を t_2 を消去するモードで求める。 g_2 を求めるには、 t_1 を消去するモードで求める。しかし上手くいかないことも稀にある。

実行時間の差は0.5 秒もないので、

終結式を使って f_1, f_2, g_1, g_2 を求めるプログラムを書きました。

```

In[53]:= findF12G12[f_] := Module[{factors, pos, s1, s2, R1, R2, gcd1, gcd2, t1, t2},
Clear[a1, a2, a3, a4, a5, s1, s2];
$f10 = F10 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → Reverse@CoefficientList[f, x, 5]];
factors=FactorList[$f10, Extension→Sqrt[Discriminant[f, x]]];
pos=Position[Exponent[factors, x], 5][[All, 1]];
{$f1, $f2}=Expand[#[Coefficient[#, x, 5]]&/@factors][[All, 1]][[pos]];
s1=-(t1+t2)/10+Sqrt[5](t1-t2)/10;
s2=-(t1+t2)/10-Sqrt[5](t1-t2)/10;
R1=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/5}, ($f1/.{x→s1})+($f2/.{x→s2}), t2];
R2=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/5}, ($f1/.{x→s1})-($f2/.{x→s2}), t2];
gcd1=PolynomialGCD[R1, R2, Extension→Automatic];
$g1=Expand[gcd1/Coefficient[gcd1, t1, 5]]/.{t1→x} //Collect[#, x]&;
R1=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/5}, ($f1/.{x→s1})+($f2/.{x→s2}), t1];
R2=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/5}, ($f1/.{x→s1})-($f2/.{x→s2}), t1];
gcd2=PolynomialGCD[R1, R2, Extension→Automatic];
$g2=Expand[gcd2/Coefficient[gcd2, t2, 5]]/.{t2→x} //Collect[#, x]&;
Return[{$f1, $f2, $g1, $g2}]

```

例えば先の例の関数fについて $\{f_1, f_2, g_1, g_2\}$ は次の様に求まります。

```
In[54]:= findF12G12[f[x]]
```

```
Out[54]=
```

$$\left\{ \begin{aligned} & -93 - 15\sqrt{41} + \frac{171x}{2} + \frac{21\sqrt{41}x}{2} + 6x^2 - \frac{27x^3}{2} - \frac{3\sqrt{41}x^3}{2} + x^5, \\ & -93 + 15\sqrt{41} + \frac{171x}{2} - \frac{21\sqrt{41}x}{2} + 6x^2 - \frac{27x^3}{2} + \frac{3\sqrt{41}x^3}{2} + x^5, \\ & 18750 - 1200\sqrt{205} + \left(\frac{9675}{2} - \frac{675\sqrt{205}}{2}\right)x + \left(-\frac{225}{2} + \frac{15\sqrt{205}}{2}\right)x^3 + x^5, \\ & 18750 + 1200\sqrt{205} + \left(\frac{9675}{2} + \frac{675\sqrt{205}}{2}\right)x + \left(-\frac{225}{2} - \frac{15\sqrt{205}}{2}\right)x^3 + x^5 \end{aligned} \right\}$$

§5. fの解を求める

§4で次の式を導きました.

(*) G_1, G_2 の $(5-k)$ 次の係数をそれぞれ $b_k, c_k (1 \leq k \leq 5)$ とおくと, $b_1 = c_1 = b_3 = c_3 = 0$

$$\begin{cases} r_1^5 + r_4^5 = -b_5 & (1) \\ r_1 r_4 = -\frac{b_2}{5} & (2) \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} r_2^5 + r_3^5 = -c_5 & (3) \\ r_2 r_3 = -\frac{c_2}{5} & (4) \end{cases}$$

r_1^5 と r_4^5 を解とする方程式は次の「 $R = 0$ 」となります.

(r_2^5 と r_3^5 を解とする式は $\{b_2, b_5\} \rightarrow \{c_2, c_5\}$)

```
In[55]:= R[b2_, b5_] := x^2 + b5 x + (-b2/5)^5
```

fの解を求めるには 上のRの方程式と (2) より r_1 と r_4 を求めます.

次に 再び Rの方程式から $\{R_2 (r_2^5), R_3 (r_3^5)\}$ を求めます.

ただし Rの方程式の2解のうちどちらが R_2 なのか分からないので,

(3) (4) を満たす $\{r_2, r_3\}$ のセットは10通りできます.

これらの $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ の値から $x_0 \sim x_4$ の値を求め, fの数値解と比較します.

例で見てください.

■ 【例】 $f = 4 + 10x - 9x^2 - 14x^3 + x^5$

```
In[56]:= Clear[f]
```

```
f = 4 + 10 x - 9 x^2 - 14 x^3 + x^5;
```

(ア) g_1, g_2, b_k, c_k を求めます

```
In[58]:= {g1, g2} = findF12G12[f][{3, 4}]
```

```
Out[58]=
```

$$\left\{ \begin{aligned} &13500 - 1450\sqrt{5} + (6225 - 700\sqrt{5})x + (-175 + 10\sqrt{5})x^3 + x^5, \\ &13500 + 1450\sqrt{5} + (6225 + 700\sqrt{5})x + (-175 - 10\sqrt{5})x^3 + x^5 \end{aligned} \right\}$$

```
In[59]:= {b2, b3, b4, b5} = CoefficientList[g1, x, 4] // Reverse
```

```
{c2, c3, c4, c5} = CoefficientList[g2, x, 4] // Reverse
```

```
Out[59]=
```

$$\{-175 + 10\sqrt{5}, 0, 6225 - 700\sqrt{5}, 13500 - 1450\sqrt{5}\}$$

```
Out[60]=
```

$$\{-175 - 10\sqrt{5}, 0, 6225 + 700\sqrt{5}, 13500 + 1450\sqrt{5}\}$$

(イ) Rの式を使って, $R_1 = r_1^5$ を求め, $r_1 = R_1^{1/5}$, $r_1 r_2 = -b_2 / 5$ を使って r_1, r_4 を求めます.

```
In[61]:= R14 = R[b2, b5] // Simplify
```

```
Out[61]=
```

$$-(-35 + 2\sqrt{5})^5 - 50(-270 + 29\sqrt{5})x + x^2$$

```

In[62]:= {R1, R4} = x /. Solve[R14 == 0, x] // Simplify
Out[62]=

$$\left\{ -6750 + 725 \sqrt{5} - 5 i \sqrt{20762 (25 - 11 \sqrt{5})}, -6750 + 725 \sqrt{5} + 5 i \sqrt{20762 (25 - 11 \sqrt{5})} \right\}$$


In[63]:= r1 = R1^(1/5) // Simplify
r4 = -b2 / (5 r1) // FullSimplify
Out[63]=

$$\left( -6750 + 725 \sqrt{5} - 5 i \sqrt{20762 (25 - 11 \sqrt{5})} \right)^{1/5}$$

Out[64]=

$$\left( -6750 + 725 \sqrt{5} + 5 i \sqrt{20762 (25 - 11 \sqrt{5})} \right)^{1/5}$$


(ウ) Rの式を使って,  $\{R_2 (r_2^5), R_3 (r_3^5)\}$  を求め,
 $r_2 = R_2^{1/5}$ ,  $r_3 r_4 = -c_2 / 5$  を使って  $r_2$ ,  $r_3$  の候補 $r2, $r3 を求めます.

In[65]:= R23 = R[c2, c5] // Simplify
Out[65]=

$$(35 + 2 \sqrt{5})^5 + 50 (270 + 29 \sqrt{5}) x + x^2$$


In[66]:= {R2, R3} = x /. Solve[R23 == 0, x] // Simplify
Out[66]=

$$\left\{ -5 \left( 1350 + 145 \sqrt{5} + i \sqrt{20762 (25 + 11 \sqrt{5})} \right), -6750 - 725 \sqrt{5} + 5 i \sqrt{20762 (25 + 11 \sqrt{5})} \right\}$$


In[67]:= $r2 = R2^(1/5)
$r3 = -c2 / (5 $r2) // FullSimplify
Out[67]=

$$\left( 5 \left( -1350 - 145 \sqrt{5} - i \sqrt{20762 (25 + 11 \sqrt{5})} \right) \right)^{1/5}$$

Out[68]=

$$\left( -6750 - 725 \sqrt{5} + 5 i \sqrt{20762 (25 + 11 \sqrt{5})} \right)^{1/5}$$


(イ)  $\{r_2, r_3\}$  の正しい式は  $\{r_2, r_3\}$ ,  $\{\zeta r_2, \zeta^4 r_3\}$ ,
...,  $\{\zeta^4 r_2, \zeta r_3\}$  または  $\{r_3, r_2\}$ ,  $\{\zeta r_3, \zeta^4 r_2\}$ , ...,
 $\{\zeta^4 r_3, \zeta r_2\}$  の10組のいずれかです. (これら全てが (3) (4) を満たします)
この10組をLagrangeの逆変換に代入して fの解の候補の集合Xsを作ります.

In[69]:= Clear[ξ]
r2s = Join[$r2 ξ^{0, 1, 2, 3, 4}, $r3 ξ^{0, 1, 2, 3, 4}];
r3s = Join[$r3 ξ^{0, 4, 3, 2, 1}, $r2 ξ^{0, 4, 3, 2, 1}];
Xs = Table[1/5 {{1, 1, 1, 1, 1}, ξ^{0, 4, 3, 2, 1}, ξ^{0, 3, 1, 4, 2},
ξ^{0, 2, 4, 1, 3}, ξ^{0, 1, 2, 3, 4}}. {0, r1, r2s[[k]], r3s[[k]], r4}, {k, 1, 10}];

```

(オ) 「 $\zeta = \text{Cos}(2\pi/5) + i \text{sin}(2\pi/5)$ 」として、 Xs の近似値 $\$Xs$ と f の数値解 $\$sol$ を比較します。

```
In[73]:= $Xs = Column[Sort /@N[(Xs /. {ζ → Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5]})] // Chop]
$sol = x /. NSolve[f == 0, x] // Sort
```

Out[73]=

```
{-3.14361, -1.23227, -0.349332, 0.732669, 3.99254}
{-3.24166, -1.15747, -0.733569, 1.46148, 3.67122}
{-4.7079, 0.778895, 1.14016, 1.25257, 1.53627}
{-2.72175, -1.75217, -0.687343, 1.21495, 3.94632}
{-3.21841, -1.67737, -0.0280131, 1.2988, 3.625}
{-2.72175, -1.67737, -0.733569, 1.14016, 3.99254}
{-4.7079, 0.732669, 1.21495, 1.2988, 1.46148}
{-3.24166, -1.23227, -0.687343, 1.53627, 3.625}
{-3.21841, -1.15747, -0.349332, 0.778895, 3.94632}
{-3.14361, -1.75217, -0.0280131, 1.25257, 3.67122}
```

Out[74]=

```
{-3.21841, -1.15747, -0.349332, 0.778895, 3.94632}
```

二つを比べると $\$Xs[[9]]$ が最も $\$sol$ に近いことが分かります。(近いというより、全く一致しています) 故に f の厳密解は $Xs[[9]]$ (即ち $\{r2, r3\} = \{\$r3 \zeta^3, \$r2 \zeta^2\}$)と分かります。

なお、 ζ の偏角は $2\pi/5 * m$ ($1 \leq m \leq 4$)のいずれでも良いですが、違う偏角を選ぶと異なる Xs の要素が $\$sol$ と一致します。

```
In[75]:= X = {x0, x1, x2, x3, x4} = Xs[[9]];
```

x_0, x_1 のみ表示します。(ζ の偏角は $2\pi/5$)

```
In[76]:= TraditionalForm[x0]
TraditionalForm[x1]
```

Out[76]//TraditionalForm=

$$\frac{1}{5} \left(\sqrt[5]{-6750 - 725\sqrt{5} + 5i\sqrt{20762(25 + 11\sqrt{5})}} \zeta^3 + \sqrt[5]{5(-1350 - 145\sqrt{5} - i\sqrt{20762(25 + 11\sqrt{5})})} \zeta^2 + \sqrt[5]{-6750 + 725\sqrt{5} + 5i\sqrt{20762(25 - 11\sqrt{5})}} + \sqrt[5]{-6750 + 725\sqrt{5} - 5i\sqrt{20762(25 - 11\sqrt{5})}} \right)$$

Out[77]//TraditionalForm=

$$\frac{1}{5} \left(\sqrt[5]{-6750 - 725\sqrt{5} + 5i\sqrt{20762(25 + 11\sqrt{5})}} \zeta^6 + \sqrt[5]{5(-1350 - 145\sqrt{5} - i\sqrt{20762(25 + 11\sqrt{5})})} \zeta^4 + \sqrt[5]{-6750 + 725\sqrt{5} - 5i\sqrt{20762(25 - 11\sqrt{5})}} \zeta^4 + \sqrt[5]{-6750 + 725\sqrt{5} + 5i\sqrt{20762(25 - 11\sqrt{5})}} \zeta \right)$$

【コメント】このやり方は(1)~(4)の公式を導くまでは非常にすっきりしているのですが、 g_1, g_2 だけでは情報が足りず、最後で数値計算をしないといけないのが、玉に瑕です。一方、7次方程式では g_1, g_2 だけでほぼ十分な情報が得られて、もう少しちゃんとした解の公式を作ることができます。