

Galois 分解式を使った5次方程式の解法例 with *Mathematica* 14

2025 年7月 by mixedmoss

「 $f = x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x + 4$ 」を例にとり、
ガロア分解式を使って解いてみます。 f は可解で既約で、
そのガロア群は「 $F_{20} = \langle \sigma, \tau \rangle$, $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\tau = (2, 3, 5, 4)$ 」です。

今回は一般論から始めます。 そのために可解で既約な5次方程式を

「 $f = x^5 - a_1 x^4 + a_2 x^3 - a_3 x^2 + a_4 x - a_5$ ($a_1 \sim a_5$ は有理数)」,

「 $f = 0$ 」の解を x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 と置きます。 f のガロア群 Gal は F_{20} としますが、
後出の $\theta a \sim \theta d$ の性質は、 F_{20} の部分群の時でも成り立ちます。

なおノートブックの評価には 15 秒ほど掛かります。

§ 1 .Lagrange分解式, $l_0 \sim l_4$ の定義

1-1. Lagrange分解式と $R_1 \sim R_4$ の定義

「 $C_5 \triangleright \{Id\}$ 」の部分に注目し、 ラグランジュの5次分解式を作ります。 (ζ は1の原始 5 乗根の1つ。) この時
 x_k ($1 \leq k \leq 5$) を自由変数、 即ち「 $f = 0$ 」の解となっている事は忘れるものとします。

```
In[*]:= ClearAll["`*"];  
r0 = x1 + x2 + x3 + x4 + x5;  
r1 = x1 +  $\zeta$  x2 +  $\zeta^2$  x3 +  $\zeta^3$  x4 +  $\zeta^4$  x5;  
r2 = x1 +  $\zeta^2$  x2 +  $\zeta^4$  x3 +  $\zeta$  x4 +  $\zeta^3$  x5;  
r3 = x1 +  $\zeta^3$  x2 +  $\zeta$  x3 +  $\zeta^4$  x4 +  $\zeta^2$  x5;  
r4 = x1 +  $\zeta^4$  x2 +  $\zeta^3$  x3 +  $\zeta^2$  x4 +  $\zeta$  x5;
```

解と係数の関係より「 $r_0 = a_1$ 」。 また以下の性質が成り立ちます。

$$(\#1) \begin{cases} r_1 \text{ を } \sigma \text{ で移すと } r_1 \rightarrow \zeta^4 r_1, & \tau \text{ で移すと } r_1 \rightarrow r_3, \\ r_2 \text{ を } \sigma \text{ で移すと } r_2 \rightarrow \zeta^3 r_2, & \tau \text{ で移すと } r_2 \rightarrow r_1, \\ r_3 \text{ を } \sigma \text{ で移すと } r_3 \rightarrow \zeta^2 r_3, & \tau \text{ で移すと } r_3 \rightarrow r_4, \\ r_4 \text{ を } \sigma \text{ で移すと } r_4 \rightarrow \zeta r_4, & \tau \text{ で移すと } r_4 \rightarrow r_2, \end{cases}$$

結局, τ は 分解式を「 $r_1 \rightarrow r_3 \rightarrow r_4 \rightarrow r_2 \rightarrow r_1$ 」の様に移し, σ は「 $r_1 \rightarrow \zeta^4 r_1 \rightarrow \zeta^3 r_1 \rightarrow \zeta^2 r_1 \rightarrow \zeta r_1 \rightarrow r_1$ 」の様に移します。

さらに f の最小分解体に ζ を付加した体を K , K 内の同型写像「 $\omega: \zeta \rightarrow \zeta^3$ 」とすると、 分解式は次の様に移ります。 ω は τ と同じ様に分解式を移します。

(by ω) $r_1 \rightarrow r_3 \rightarrow r_4 \rightarrow r_2 \rightarrow r_1 \cdots$

以上より, $\theta_a = r_1 r_3 + r_2 r_4$ と $\theta_b = (r_1 r_3 - r_2 r_4)^2$ は σ と τ で変わらないので $Q(\zeta)$ に入ります.
 また $R_1 = r_1^5$, $R_2 = r_2^5$, $R_3 = r_3^5$, $R_4 = r_4^5$ とおくと,
 σ は $R_1 \sim R_4$ を動かさず, τ は $[R_1 \xrightarrow{\tau} R_3 \xrightarrow{\tau} R_4 \xrightarrow{\tau} R_2 \xrightarrow{\tau} R_1]$ の様に移します.

1-2. $L_0 \sim L_4$ の定義 と $R_0 \sim R_4$ との関係

$R_1 = r_1^5$ を展開し「 $\zeta^5 = 1$ 」のみを使って次数を下げ, さらに ζ について整理した式を

$R_1 = r_1^5 = l_0 + l_1 \zeta + l_2 \zeta^2 + l_3 \zeta^3 + l_4 \zeta^4$ (l_i は ζ を含まない x_j のみの式) とおきます. これを ω で移すと次の式が得られます.

$$(\#2) \quad \begin{cases} R_1 = r_1^5 &= L_0 + L_1 \zeta + L_2 \zeta^2 + L_3 \zeta^3 + L_4 \zeta^4 \\ R_2 = r_2^5 &= L_0 + L_3 \zeta + L_1 \zeta^2 + L_4 \zeta^3 + L_2 \zeta^4 \\ R_3 = r_3^5 &= L_0 + L_2 \zeta + L_4 \zeta^2 + L_1 \zeta^3 + L_3 \zeta^4 \\ R_4 = r_4^5 &= L_0 + L_4 \zeta + L_3 \zeta^2 + L_2 \zeta^3 + L_1 \zeta^4 \end{cases}$$

$L_0 \sim L_4$ を実際に計算します.

```
In[*]:= R1 = r1^5 // PolynomialMod[#, z^5 - 1] & // Collect[#, z] &
{10, 11, 12, 13, 14} = CoefficientList[R1, z];

Out[*]=
x1^5 + x2^5 + 20 x1 x2^3 x3 + 30 x1^2 x2 x3^2 + x3^5 + 30 x1^2 x2^2 x4 + 20 x1^3 x3 x4 +
20 x2 x3^3 x4 + 30 x2^2 x3 x4^2 + 30 x1 x3^2 x4^2 + 20 x1 x2 x4^3 + x4^5 + 20 x1^3 x2 x5 + 30 x2^2 x3^2 x5 +
20 x1 x3^3 x5 + 20 x2^3 x4 x5 + 120 x1 x2 x3 x4 x5 + 30 x1^2 x4^2 x5 + 20 x3 x4^3 x5 + 30 x1 x2^2 x5^2 +
30 x1^2 x3 x5^2 + 30 x3^2 x4 x5^2 + 30 x2 x4^2 x5^2 + 20 x2 x3 x5^3 + 20 x1 x4 x5^3 + x5^5 +
(5 x1^4 x2 + 5 x2^4 x3 + 30 x1 x2^2 x3^2 + 10 x1^2 x3^3 + 20 x1 x2^3 x4 + 60 x1^2 x2 x3 x4 + 5 x3^4 x4 +
10 x1^3 x4^2 + 30 x2 x3^2 x4^2 + 10 x2^2 x4^3 + 20 x1 x3 x4^3 + 30 x1^2 x2^2 x5 + 20 x1^3 x3 x5 +
20 x2 x3^3 x5 + 60 x2^2 x3 x4 x5 + 60 x1 x3^2 x4 x5 + 60 x1 x2 x4^2 x5 + 5 x4^4 x5 + 10 x2^3 x5^2 +
60 x1 x2 x3 x5^2 + 30 x1^2 x4 x5^2 + 30 x3 x4^2 x5^2 + 10 x3^2 x5^3 + 20 x2 x4 x5^3 + 5 x1 x5^4) z +
(10 x1^3 x2^2 + 5 x1^4 x3 + 10 x2^3 x3^2 + 20 x1 x2 x3^3 + 5 x2^4 x4 + 60 x1 x2^2 x3 x4 + 30 x1^2 x3^2 x4 +
30 x1^2 x2 x4^2 + 10 x3^3 x4^2 + 20 x2 x3 x4^3 + 5 x1 x4^4 + 20 x1 x2^3 x5 + 60 x1^2 x2 x3 x5 +
5 x3^4 x5 + 20 x1^3 x4 x5 + 60 x2 x3^2 x4 x5 + 30 x2^2 x4^2 x5 + 60 x1 x3 x4^2 x5 + 30 x2^2 x3 x5^2 +
30 x1 x3^2 x5^2 + 60 x1 x2 x4 x5^2 + 10 x4^3 x5^2 + 10 x1^2 x5^3 + 20 x3 x4 x5^3 + 5 x2 x5^4) z^2 +
(10 x1^2 x2^3 + 20 x1^3 x2 x3 + 10 x2^2 x3^3 + 5 x1 x3^4 + 5 x1^4 x4 + 20 x2^3 x3 x4 + 60 x1 x2 x3^2 x4 +
30 x1 x2^2 x4^2 + 30 x1^2 x3 x4^2 + 10 x3^2 x4^3 + 5 x2 x4^4 + 5 x2^4 x5 + 60 x1 x2^2 x3 x5 +
30 x1^2 x3^2 x5 + 60 x1^2 x2 x4 x5 + 20 x3^3 x4 x5 + 60 x2 x3 x4^2 x5 + 20 x1 x4^3 x5 + 10 x1^3 x5^2 +
30 x2 x3^2 x5^2 + 30 x2^2 x4 x5^2 + 60 x1 x3 x4 x5^2 + 20 x1 x2 x5^3 + 10 x4^2 x5^3 + 5 x3 x5^4) z^3 +
(5 x1 x2^4 + 30 x1^2 x2^2 x3 + 10 x1^3 x3^2 + 5 x2 x3^4 + 20 x1^3 x2 x4 + 30 x2^2 x3^2 x4 + 20 x1 x3^3 x4 +
10 x2^3 x4^2 + 60 x1 x2 x3 x4^2 + 10 x1^2 x4^3 + 5 x3 x4^4 + 5 x1^4 x5 + 20 x2^3 x3 x5 + 60 x1 x2 x3^2 x5 +
60 x1 x2^2 x4 x5 + 60 x1^2 x3 x4 x5 + 30 x3^2 x4^2 x5 + 20 x2 x4^3 x5 + 30 x1^2 x2 x5^2 +
10 x3^3 x5^2 + 60 x2 x3 x4 x5^2 + 30 x1 x4^2 x5^2 + 10 x2^2 x5^3 + 20 x1 x3 x5^3 + 5 x4 x5^4) z^4
```

(#2) の式は「 $\zeta^5 = 1$ 」のみを使って整形した式だから「 $\zeta = 1$ 」と置くことができます. この時

$$(\#3) \quad L_0 + L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = (x1 + x2 + x3 + x4 + x5)^5 = (-a_1)^5$$

$$\text{さらに} \quad \begin{cases} (R_1 + R_4) + (R_2 + R_3) &= 4 l_0 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) \\ (R_1 + R_4) - (R_2 + R_3) &= (l_1 + l_4 - l_2 - l_3) (\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3) \end{cases}$$

故に (≡4)

$$\begin{cases} R_1 + R_4 &= \frac{1}{2} \left(4 l_0 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + (l_1 + l_4 - l_2 - l_3) (\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3) \right) \\ R_2 + R_3 &= \frac{1}{2} \left(4 l_0 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - (l_1 + l_4 - l_2 - l_3) (\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3) \right) \end{cases}$$

ここで (≡1) より, σ で $R_1 \sim R_4$ は動きません. よって σ で $l_0 \sim l_4$ も動きません.

次に τ によって $[R_1 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4 \rightarrow R_2 \rightarrow R_1]$ と動くから, $[l_1 \rightarrow l_2 \rightarrow l_4 \rightarrow l_3 \rightarrow l_1]$ と動く.

故に $[\theta_c = l_1 + l_2 + l_3 + l_4]$ と $[\theta_d = (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)^2]$ は F_{20} によって動かず,

かつ ζ を含んでないから 有理数となります.

同様に l_0 も σ と τ によって動かず ζ を含んでないから 有理数となります.

§2.Galois 分解式を利用して $R_1 R_4$, $R_2 R_3$ の値を求める

以下のコマンドを主に使います

`In[*]:= PolynomialMod[poly, m]`
 m を法として多項式 $poly$ を与える.

`In[*]:=` 【例】 `PolynomialMod[3 x^2 + 2 x + 1, x^2 + 1]` で 出力は $-2 + 2x$

`In[*]:= SymmetricReduction[f, {x1, ..., xn}, {s1, ..., sn}]`
 p における初等対称式を $s_1, \dots, s_n$ で置き換えたペア $\{p, q\}$ を与える.

【例】 `SymmetricReduction[x^2 + y^2, {x, y}]` で 出力は $\{-2xy + (x+y)^2, 0\}$

`In[*]:= SymmetricPolynomial[k, {x1, ..., xn}]`
 変数 $x_1, \dots, x_n$ における k 次初等対称多項式を与える.

【例】 `SymmetricPolynomial[3, {x1, x2, x3, x4}]` で 出力は $x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$

`In[*]:= expr /. rules` または `ReplaceAll[expr, rules]`
 式 $expr$ の下位区分のそれぞれを変換しようとするとき, 規則または規則のリストを適用する.

【例】 `{x, x^2, y, z} /. x -> 1` と入力すると, 出力は $\{1, 1, y, z\}$

`In[*]:= AssociationThread[{key1, key2, ...} -> {val1, val2, ...}]`
 連想 $\langle |key_1 \rightarrow val_1, key_2 \rightarrow val_2, \dots| \rangle$ を与える.

【例】 `AssociationThread[{1, 2, 3} -> {"one", "two", "three"}]` と入力すると, 出力は $\langle |1 \rightarrow "one", 2 \rightarrow "two", 3 \rightarrow "three"| \rangle$

2-1. $\theta_a = r_1 r_4 + r_2 r_3$ の値を求める

まず「 $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$ 」を使って θ_a を簡単にします.

$$(\text{Cyclotomic}[5, \zeta] = 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4)$$

`In[*]:=` `theta = PolynomialMod[r1 * r4 + r2 * r3, Cyclotomic[5, zeta]]`
`Out[*]=`

$$2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 - x_1x_4 - x_2x_4 - x_3x_4 + 2x_4^2 - x_1x_5 - x_2x_5 - x_3x_5 - x_4x_5 + 2x_5^2$$

ζ を含まない式に変形できました. 「 $\theta_a \in \mathbb{Q}(\zeta)$ 」だったので, θ_a は有理数.

さらによく見ると $x_1 \sim x_5$ の対称式となっているので簡単に $a_1 \sim a_5$ の式で表せます.

```
In[*]:= SymmetricReduction[θa, {x1, x2, x3, x4, x5}, {a1, a2, a3, a4, a5}]
Out[*]= {2 a1^2 - 5 a2, 0}
```

第2成分は基本対称式で表せない部分でありその値が0なので、
 θ_a が対称式であることが分かります。即ち

$$\theta_a = 2 a_1^2 - 5 a_2;$$

ここまでの議論は $\text{Gal} = F_{20}$ としていますが、
 上の式は $\text{Gal} \neq F_{20}$ の時でも成り立ちます。後出の θ_b , θ_c , θ_d についても同様です。

なお「 $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x + 4$ 」に対しては「 $\theta_a = 3$ 」となります。

2-2. $\theta_b = (r_1 r_3 - r_2 r_4)^2$ の値を求める(Galois分解式の利用)

まず $\theta_b = (r_1 * r_4 - r_2 * r_3)^2$ を「 $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$ 」を使って簡単にします。

```
In[*]:= θb = PolynomialMod[(r1 * r4 - r2 * r3)^2, Cyclotomic[5, ζ]]
Out[*]= 5 x1^2 x2^2 - 10 x1^2 x2 x3 + 10 x1 x2^2 x3 + 5 x1^2 x3^2 - 10 x1 x2 x3^2 + 5 x2^2 x3^2 -
10 x1^2 x2 x4 - 10 x1 x2^2 x4 + 10 x1^2 x3 x4 + 10 x1 x2 x3 x4 - 10 x2^2 x3 x4 - 10 x1 x3^2 x4 +
10 x2 x3^2 x4 + 5 x1^2 x4^2 + 10 x1 x2 x4^2 + 5 x2^2 x4^2 - 10 x1 x3 x4^2 - 10 x2 x3 x4^2 + 5 x3^2 x4^2 +
10 x1^2 x2 x5 - 10 x1 x2^2 x5 - 10 x1^2 x3 x5 + 10 x1 x2 x3 x5 - 10 x2^2 x3 x5 + 10 x1 x3^2 x5 -
10 x2 x3^2 x5 - 10 x1^2 x4 x5 + 10 x1 x2 x4 x5 + 10 x2^2 x4 x5 + 10 x1 x3 x4 x5 + 10 x2 x3 x4 x5 -
10 x3^2 x4 x5 - 10 x1 x4^2 x5 - 10 x2 x4^2 x5 + 10 x3 x4^2 x5 + 5 x1^2 x5^2 - 10 x1 x2 x5^2 + 5 x2^2 x5^2 -
10 x1 x3 x5^2 + 10 x2 x3 x5^2 + 5 x3^2 x5^2 + 10 x1 x4 x5^2 - 10 x2 x4 x5^2 - 10 x3 x4 x5^2 + 5 x4^2 x5^2
```

これも ζ を含まないので θ_a と同様に有理数となります。

残念ながら $x_1 \sim x_5$ の対称式ではありませんが、ガロア分解式を使ってその値を求めることができます。
 (ガロア分解式については「6次方程式について」

(<https://mixedmoss.com/mathematica/Galois/sextic/pdf/SexticEquation.pdf>) をご覧ください)

まず5次の対称群 S_5 は次のように6個の左剰余類に分けられます。

$$[S_5 = F_{20} + (1, 2, 3) F_{20} + (1, 3, 2) F_{20} + (1, 2) F_{20} + (2, 3) F_{20} + (1, 3) F_{20}]$$

その代表元の集合を Σ_6 とし、

$$\theta_b \text{ を } \Sigma_6 \text{ の全ての要素で置換して作った式を } [\theta_1 = \theta_c, \theta_2 = (1, 2, 3) \theta_1,$$

$$\theta_3 = (1, 3, 2) \theta_1, \theta_4 = (1, 2) \theta_1, \theta_5 = (2, 3) \theta_1, \theta_6 = (1, 3) \theta_1] \text{ とおくと,}$$

$$\theta_1 \text{ は } F_{20} \text{ によって動かず, } \theta_2 \text{ は } [\theta_2 \xrightarrow{\sigma} \theta_6 \xrightarrow{\sigma} \theta_3 \xrightarrow{\sigma} \theta_4 \xrightarrow{\sigma} \theta_5 \xrightarrow{\sigma} \theta_2] \text{ と動くので,}$$

$$\theta_2 \sim \theta_5 \text{ の } F_{20} \text{ による軌道は } \{\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} \text{ となります.}$$

$$\text{故に積 } pb(x) = \prod (x - \theta_k) = (x - \theta_1) (x - \theta_2) \cdots (x - \theta_6) \text{ は,}$$

$$x_1 \sim x_5 \text{ の対称式となり, } pb(x) \text{ は有理数係数の多項式となります.}$$

$$\text{そして } pb(x) = 0 \text{ の6個の解のうちちょうど一個が } \theta_1 \text{ となる訳ですが,}$$

$$\theta_1 \text{ は } F_{20} \text{ によって不変なので, 有理数です. 即ち } pb(x) \text{ は有理数解を少なくとも1つ持ちます.}$$

$$\text{さらに } \theta_2 \sim \theta_6 \text{ は } F_{20} \text{ によって可移なので}$$

$$A: [pb(x) = (x - \theta_1) q(x) \text{ (} \theta_1 \text{ は有理数, } q(x) \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上既約)}] \text{ 或いは } B:$$

$$[pb(x) = (x - \theta_1) (x - \theta_2)^5 \text{ (} \theta_1, \theta_2 \text{ は有理数)}]$$

となります。(可解な5次方程式の場合はAのケースしかないことが、
参考文献[1][2]から言えるはずなのですが、私には確信はありません。)
さてまずは Σ_6 ($\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ の置換として表現) を作ります。

```
In[*]:=  $\Sigma_6 = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_2, x_3, x_1, x_4, x_5\}, \{x_3, x_1, x_2, x_4, x_5\},$   
 $\{x_2, x_1, x_3, x_4, x_5\}, \{x_1, x_3, x_2, x_4, x_5\}, \{x_3, x_2, x_1, x_4, x_5\}\};$ 
```

次に「 $\theta_1 = \theta_b, \theta_2 = (1, 2, 3) \theta_b, \theta_3 = (1, 3, 2) \theta_b, \theta_4 = (1, 2) \theta_b, \theta_5 = (2, 3) \theta_b, \theta_6 = (1, 3) \theta_b$ 」を作ります。

```
In[*]:=  $\theta_1 = \theta_b;$   
 $\theta_2 = \theta_b /. AssociationThread[\Sigma_6[[1]] \rightarrow \Sigma_6[[2]]];$   
 $\theta_3 = \theta_b /. AssociationThread[\Sigma_6[[1]] \rightarrow \Sigma_6[[3]]];$   
 $\theta_4 = \theta_b /. AssociationThread[\Sigma_6[[1]] \rightarrow \Sigma_6[[4]]];$   
 $\theta_5 = \theta_b /. AssociationThread[\Sigma_6[[1]] \rightarrow \Sigma_6[[5]]];$   
 $\theta_6 = \theta_b /. AssociationThread[\Sigma_6[[1]] \rightarrow \Sigma_6[[6]]];$ 
```

$\theta_1 \sim \theta_6$ の1次対称式「 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6$ 」を基本対称式で表して k_1 と置きます。

```
In[*]:=  $k_1 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[1, \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}],$   
 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}][[1]]$ 
```

```
Out[*]:= 30 a22 - 80 a1 a3 + 200 a4
```

以下同様に $\theta_1 \sim \theta_6$ の i 次対称式を基本対称式で表して k_i ($i=1, 2, \dots, 6$) と置きます。

```
In[*]:=  $k_2 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[2, \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}],$   
 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}][[1]];$ 
```

```
In[*]:=  $k_3 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[3, \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}],$   
 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}][[1]];$ 
```

```
In[*]:=  $k_4 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[4, \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}],$   
 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}][[1]];$ 
```

```
In[*]:=  $k_5 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[5, \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}],$   
 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}][[1]];$ 
```

```
In[*]:=  $k_6 = SymmetricReduction[SymmetricPolynomial[6, \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}],$   
 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}][[1]];$ 
```

以上より

「 $p_b(x) = (x - \theta_1)(x - \theta_2) \cdots (x - \theta_6) = x^6 - k_1 x^5 + k_2 x^4 - k_3 x^3 + k_4 x^2 - k_5 x + k_6$ 」
は次の様になります。

```
In[*]:=  $p_b = x^6 - k_1 x^5 + k_2 x^4 - k_3 x^3 + k_4 x^2 - k_5 x + k_6$ 
```

```
Out[*]:= 15 625 a212 - 250 000 a1 a210 a3 + 1 500 000 a12 a28 a32 + 500 000 a29 a32 - 4 000 000 a13 a26 a33 +  
4 000 000 a14 a24 a34 + 24 000 000 a12 a25 a34 + 6 000 000 a26 a34 - 32 000 000 a13 a23 a35 - 48 000 000 a1 a24 a35 +  
96 000 000 a12 a22 a36 + 32 000 000 a23 a36 - 128 000 000 a1 a2 a37 + 64 000 000 a38 + 500 000 a12 a29 a4 - 875 000 a210 a4 -  
6 000 000 a13 a27 a3 a4 + 10 500 000 a1 a28 a3 a4 + 24 000 000 a14 a25 a32 a4 - 30 000 000 a12 a26 a32 a4 - 21 000 000 a27 a32 a4 -  
32 000 000 a15 a23 a33 a4 - 40 000 000 a13 a24 a33 a4 + 168 000 000 a1 a25 a33 a4 + 192 000 000 a14 a22 a34 a4 -  
240 000 000 a12 a23 a34 a4 - 168 000 000 a24 a34 a4 - 384 000 000 a13 a2 a35 a4 + 672 000 000 a1 a22 a35 a4 +  
256 000 000 a12 a36 a4 - 448 000 000 a2 a36 a4 + 6 000 000 a14 a26 a42 - 21 000 000 a12 a27 a42 + 17 750 000 a28 a42 -  
48 000 000 a15 a24 a3 a42 + 168 000 000 a13 a25 a3 a42 - 140 000 000 a1 a26 a3 a42 + 96 000 000 a16 a22 a32 a42 -  
240 000 000 a14 a23 a32 a42 - 68 000 000 a12 a24 a32 a42 + 284 000 000 a25 a32 a42 - 384 000 000 a15 a2 a33 a42 +  
1 376 000 000 a13 a22 a33 a42 - 1 104 000 000 a1 a23 a33 a42 + 384 000 000 a14 a34 a42 - 1 472 000 000 a12 a2 a34 a42 +
```

$$\begin{aligned}
& 1136000000 a^2 a^3 a^4 + 128000000 a^1 a^3 a^4 + 32000000 a^1 a^3 a^4 + 168000000 a^1 a^4 a^4 + 284000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - \\
& 164000000 a^2 a^3 a^4 - 128000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 672000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1104000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + \\
& 640000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 256000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1472000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 2336000000 a^1 a^2 a^2 a^3 a^4 - \\
& 1392000000 a^2 a^3 a^4 + 256000000 a^1 a^3 a^3 a^4 + 192000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 640000000 a^3 a^4 + 64000000 a^1 a^4 - \\
& 448000000 a^1 a^2 a^4 + 1136000000 a^1 a^2 a^4 - 1392000000 a^1 a^2 a^4 + 764000000 a^2 a^4 + 128000000 a^1 a^3 a^4 + \\
& 192000000 a^1 a^2 a^4 - 768000000 a^1 a^2 a^4 - 1216000000 a^1 a^2 a^4 + 224000000 a^2 a^3 a^4 - 640000000 a^1 a^4 a^5 + \\
& 224000000 a^1 a^2 a^4 - 176000000 a^2 a^4 - 640000000 a^1 a^3 a^4 + 160000000 a^4 - 1500000 a^1 a^2 a^5 + \\
& 1800000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 2500000 a^2 a^3 a^5 - 7200000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 64000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 96000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 392000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 40000000 a^2 a^3 a^5 - 704000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 576000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 1664000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 160000000 a^2 a^3 a^5 - 1280000000 a^1 a^3 a^5 - 36000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 62000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 288000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 456000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 200000000 a^2 a^3 a^5 - 576000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 128000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 1096000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 2816000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 3744000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 240000000 a^2 a^3 a^5 - 3328000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 2560000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 3200000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - \\
& 288000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 992000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 824000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 1152000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - \\
& 380800000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 344000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 960000000 a^2 a^3 a^5 - 281600000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 691200000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 2240000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 5120000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 11200000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - \\
& 768000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 3968000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 6592000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 4000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 2432000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 11840000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 8000000000 a^2 a^3 a^5 + 9600000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 3840000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 6400000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 16000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 86000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - \\
& 125000000 a^2 a^3 a^5 - 688000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 880000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 1376000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 240000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 1900000000 a^2 a^3 a^5 - 7040000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 6400000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 9600000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 8000000000 a^2 a^3 a^5 + 13760000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 4360000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 3500000000 a^2 a^3 a^5 - 5504000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 16480000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 14800000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 14080000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 30400000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 32000000000 a^2 a^3 a^5 - 32000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 5504000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 26880000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 43200000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 22000000000 a^2 a^3 a^5 - \\
& 16000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 24000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 40000000000 a^2 a^3 a^5 - 16000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 40000000000 a^2 a^3 a^5 - 24000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 60000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 9600000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - \\
& 20000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 10000000000 a^2 a^3 a^5 - 32000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 80000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - \\
& 19200000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 80000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 80000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 80000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - \\
& 200000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 40000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 200000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 250000000000 a^1 a^2 a^3 a^5 - \\
& (18750 a^2 a^3 - 250000 a^1 a^2 a^3 + 1200000 a^1 a^2 a^3 + 400000 a^2 a^3 - 2400000 a^1 a^2 a^3 - 3600000 a^1 a^2 a^3 + \\
& 1600000 a^1 a^2 a^3 + 9600000 a^1 a^2 a^3 + 2800000 a^2 a^3 - 6400000 a^1 a^2 a^3 - 12800000 a^1 a^2 a^3 + \\
& 6400000 a^1 a^2 a^3 + 6400000 a^2 a^3 + 4000000 a^1 a^2 a^3 - 575000 a^2 a^3 - 3600000 a^1 a^2 a^3 + 4600000 a^1 a^2 a^3 + \\
& 9600000 a^1 a^2 a^3 - 3600000 a^1 a^2 a^3 - 7800000 a^2 a^3 - 6400000 a^1 a^2 a^3 - 25600000 a^1 a^2 a^3 + \\
& 25600000 a^1 a^2 a^3 + 12800000 a^1 a^2 a^3 + 41600000 a^1 a^2 a^3 - 25600000 a^2 a^3 - 44800000 a^1 a^2 a^3 + \\
& 2800000 a^1 a^2 a^3 - 7800000 a^1 a^2 a^3 + 6200000 a^2 a^3 - 12800000 a^1 a^2 a^3 + 25600000 a^1 a^2 a^3 - \\
& 14400000 a^1 a^2 a^3 + 6400000 a^1 a^2 a^3 + 41600000 a^1 a^2 a^3 - 91200000 a^1 a^2 a^3 + \\
& 40000000 a^2 a^3 - 96000000 a^1 a^2 a^3 + 124800000 a^1 a^2 a^3 + 9600000 a^3 a^4 + 6400000 a^1 a^2 a^3 - \\
& 25600000 a^1 a^2 a^3 + 40000000 a^1 a^2 a^3 - 5600000 a^2 a^3 - 44800000 a^1 a^2 a^3 + 124800000 a^1 a^2 a^3 - \\
& 182400000 a^1 a^2 a^3 + 96000000 a^1 a^2 a^3 + 92800000 a^2 a^3 + 9600000 a^1 a^4 + 92800000 a^1 a^2 a^4 - \\
& 129600000 a^2 a^4 - 294400000 a^1 a^3 a^4 + 339200000 a^4 - 400000 a^1 a^2 a^5 + 600000 a^1 a^2 a^5 + \\
& 3200000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 3600000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 1000000 a^2 a^3 a^5 - 6400000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 6400000 a^1 a^2 a^3 a^5 + \\
& 19200000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 44800000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 57600000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 19200000 a^2 a^3 a^5 - \\
& 38400000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 38400000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 185600000 a^3 a^5 - 6400000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 23200000 a^1 a^2 a^3 a^5 - \\
& 27600000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 25600000 a^1 a^2 a^3 a^5 - 83200000 a^1 a^2 a^3 a^5 + 153600000 a^1 a^2 a^3 a^5 - \\
& 134400000 a^2 a^3 a^4 - 89600000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 128000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 403200000 a^1 a^2 a^3 a^4 + \\
& 364800000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1296000000 a^2 a^3 a^4 - 256000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 147200000 a^1 a^2 a^3 a^4 - \\
& 342400000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 236800000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 544000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1731200000 a^1 a^2 a^3 a^4 + \\
& 1392000000 a^2 a^3 a^4 + 1024000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 563200000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 992000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - \\
& 1920000000 a^3 a^4 + 192000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1284000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 270600000 a^2 a^3 a^4 - 76800000 a^1 a^2 a^3 a^4 + \\
& 556800000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1376000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 6400000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 112000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + \\
& 204000000 a^2 a^3 a^4 - 1280000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 153600000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1286400000 a^1 a^2 a^3 a^4 + \\
& 3744000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 2680000000 a^2 a^3 a^4 - 288000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 2960000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + \\
& 3200000000 a^2 a^3 a^4 + 2240000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 400000000 a^2 a^3 a^4 + 179200000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1120000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + \\
& 12000000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 2400000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 2000000000 a^2 a^3 a^4 - 8000000000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 10000000000 a^1 a^2 a^3 a^4) x + \\
& (9375 a^2 a^3 - 100000 a^1 a^2 a^3 + 360000 a^1 a^2 a^3 + 1200000 a^2 a^3 - 480000 a^1 a^2 a^3 - 720000 a^1 a^2 a^3 + \\
& 160000 a^1 a^2 a^3 + 960000 a^1 a^2 a^3 + 400000 a^2 a^3 - 640000 a^1 a^2 a^3 + 120000 a^1 a^2 a^3 - 110000 a^2 a^3 - \\
& 720000 a^1 a^2 a^3 + 240000 a^1 a^2 a^3 + 960000 a^1 a^2 a^3 + 2160000 a^1 a^2 a^3 - 600000 a^2 a^3 a^4 - \\
& 3520000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1600000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 1600000 a^2 a^3 a^4 + 400000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 600000 a^1 a^2 a^3 a^4 + \\
& 900000 a^2 a^3 a^4 - 640000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1600000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 2400000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 15200000 a^1 a^2 a^3 a^4 - \\
& 800000 a^2 a^3 a^4 + 1600000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 800000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 800000 a^2 a^3 a^4 - 28800000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 28000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - \\
& 240000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 720000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 1280000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 3600000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1200000 a^2 a^3 a^4 - \\
& 1280000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 1600000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 9600000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1600000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 8000000 a^2 a^3 a^4 - \\
& 1280000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 4000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 1200000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 12800000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 43200000 a^1 a^2 a^3 a^4 + \\
& 12000000 a^2 a^3 a^4 + 24000000 a^1 a^2 a^3 a^4 - 28800000 a^1 a^2 a^3 a^4 + 88000000 a^1 a^2 a^3 a^4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 80\,000\,000\,a_3\,a_4^2\,a_5 + 2\,560\,000\,a_1^6\,a_5^2 - 19\,200\,000\,a_1^4\,a_2\,a_5^2 + 42\,000\,000\,a_1^2\,a_2^2\,a_5^2 - 15\,000\,000\,a_2^3\,a_5^2 + \\
& 16\,000\,000\,a_1^3\,a_3\,a_5^2 - 80\,000\,000\,a_1\,a_2\,a_3\,a_5^2 + 100\,000\,000\,a_3^2\,a_5^2 + 40\,000\,000\,a_1^2\,a_4\,a_5^2 - 100\,000\,000\,a_2\,a_4\,a_5^2 \Big) x^2 - \\
& (2500\,a_2^6 - 20\,000\,a_1\,a_2^4\,a_3 + 48\,000\,a_1^2\,a_2^2\,a_3^2 + 16\,000\,a_2^3\,a_3^2 - 32\,000\,a_1^3\,a_3^3 - 48\,000\,a_1\,a_2\,a_3^3 + 16\,000\,a_3^4 + \\
& 16\,000\,a_1^2\,a_2^3\,a_4 + 2000\,a_2^4\,a_4 - 48\,000\,a_1^3\,a_2\,a_3\,a_4 - 120\,000\,a_1\,a_2^2\,a_3\,a_4 + 336\,000\,a_1^2\,a_3^2\,a_4 + 24\,000\,a_2\,a_3^2\,a_4 + \\
& 16\,000\,a_1^4\,a_4^2 + 24\,000\,a_1^2\,a_2\,a_4^2 + 184\,000\,a_2^2\,a_4^2 - 1\,024\,000\,a_1\,a_3\,a_4^2 + 1\,120\,000\,a_4^3 - 48\,000\,a_1^3\,a_2^2\,a_5 + \\
& 168\,000\,a_1\,a_2^3\,a_5 + 128\,000\,a_1^4\,a_3\,a_5 - 432\,000\,a_1^2\,a_2\,a_3\,a_5 - 280\,000\,a_2^2\,a_3\,a_5 + 640\,000\,a_1\,a_3^2\,a_5 - \\
& 416\,000\,a_1^3\,a_4\,a_5 + 1\,360\,000\,a_1\,a_2\,a_4\,a_5 - 1\,600\,000\,a_3\,a_4\,a_5 + 400\,000\,a_1^2\,a_5^2 - 1\,000\,000\,a_2\,a_5^2 \Big) x^3 + \\
& (375\,a_2^4 - 2000\,a_1\,a_2^2\,a_3 + 2400\,a_1^2\,a_3^2 + 800\,a_2\,a_3^2 + 800\,a_1^2\,a_2\,a_4 + 2600\,a_2^2\,a_4 - 13\,600\,a_1\,a_3\,a_4 + \\
& 22\,000\,a_4^2 - 3200\,a_1^3\,a_5 + 12\,000\,a_1\,a_2\,a_5 - 20\,000\,a_3\,a_5 \Big) x^4 - (30\,a_2^2 - 80\,a_1\,a_3 + 200\,a_4 \Big) x^5 + x^6
\end{aligned}$$

ご覧の様に非常に長い式です。「 $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x + 4$ 」
 に対して「 $\theta_b = (r_1 r_4 - r_2 r_3)^2$ 」の値を求めるには次の様にします。

まず、pbに $a_1 \sim a_5$ の値を代入して fbを作り、因数分解します。

```
In[*]:= fb := pb /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} -> {-2, 1, -8, 9, -4}];
Factor[fb]
```

```
Out[*]= (-225 + x) (-8757900390625 + 18215953125x - 77606250x^2 - 209750x^3 - 325x^4 + x^5)
```

「 $fb = 0$ 」の有理数解が「 $x = 225$ 」なので「 $\theta_b = (r_1 * r_4 - r_2 * r_3)^2 = 225$ 」です。
 故に 「 $r_1 * r_4 - r_2 * r_3 = \pm 15$ 」となります。

2-3 $R_1 R_4$, $R_2 R_3$ の値を求める

「 $r_1 r_4 + r_2 r_3 = 3$, $r_1 r_4 - r_2 r_3 = \pm 15$ 」だから 「 $(r_1 r_4, r_2 r_3) = (9, -6), (-6, 9)$ 」

「 $R_1 R_4 = r_1^5 r_4^5 = (r_1 r_4)^5$, $R_2 R_3 = r_2^5 r_3^5 = (r_2 r_3)^5$ 」だから、

$\{R_1 R_4, R_2 R_3\} = \{9^5, -6^5\}$ (集合として一致)

§3. R_1, R_2, R_3, R_4 の候補を求める

3-1. $R_1 + R_4, R_2 + R_3$ と θ_c, θ_d の関係

§1(#4) より

$$\begin{cases} R_1 + R_4 &= \frac{1}{2} \left(4 l_0 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + (l_1 + l_4 - l_2 - l_3) (\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3) \right) \\ R_2 + R_3 &= \frac{1}{2} \left(4 l_0 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - (l_1 + l_4 - l_2 - l_3) (\zeta + \zeta^4 - \zeta^2 - \zeta^3) \right) \end{cases}$$

であるから, $l_0, \theta_c = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$,

$\theta_d = (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)^2$ の値が求まれば, $R_1 + R_4, R_2 + R_3$ の値も求まります.

3-2. $\theta_c = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ と l_0 を求める

§1 (#3) より

「 $l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^5 = (-a_1)^5$ 」 だから $\theta_c = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ を求めると l_0 はすぐ求まります.

θ_c は F_{20} で動かないので ガロア分解式を使って値を求めることができます.

In[*]:= $\theta_c = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$

Out[*]=

$$\begin{aligned} &5 x_1^4 x_2 + 10 x_1^3 x_2^2 + 10 x_1^2 x_2^3 + 5 x_1 x_2^4 + 5 x_1^4 x_3 + 20 x_1^3 x_2 x_3 + 30 x_1^2 x_2^2 x_3 + 5 x_2^4 x_3 + 10 x_1^3 x_3^2 + \\ &30 x_1 x_2^2 x_3^2 + 10 x_2^3 x_3^2 + 10 x_1^2 x_3^3 + 20 x_1 x_2 x_3^3 + 10 x_2^2 x_3^3 + 5 x_1 x_3^4 + 5 x_2 x_3^4 + 5 x_1^4 x_4 + \\ &20 x_1^3 x_2 x_4 + 20 x_1 x_2^3 x_4 + 5 x_2^4 x_4 + 60 x_1^2 x_2 x_3 x_4 + 60 x_1 x_2^2 x_3 x_4 + 20 x_2^3 x_3 x_4 + 30 x_1^2 x_3^2 x_4 + \\ &60 x_1 x_2 x_3^2 x_4 + 30 x_2^2 x_3^2 x_4 + 20 x_1 x_3^3 x_4 + 5 x_3^4 x_4 + 10 x_1^3 x_4^2 + 30 x_1^2 x_2 x_4^2 + 30 x_1 x_2^2 x_4^2 + \\ &10 x_2^3 x_4^2 + 30 x_1^2 x_3 x_4^2 + 60 x_1 x_2 x_3 x_4^2 + 30 x_2 x_3^2 x_4^2 + 10 x_3^3 x_4^2 + 10 x_1^2 x_4^3 + 10 x_2^2 x_4^3 + \\ &20 x_1 x_3 x_4^3 + 20 x_2 x_3 x_4^3 + 10 x_3^2 x_4^3 + 5 x_1 x_4^4 + 5 x_2 x_4^4 + 5 x_3 x_4^4 + 5 x_1^4 x_5 + 30 x_1^2 x_2^2 x_5 + \\ &20 x_1 x_2^3 x_5 + 5 x_2^4 x_5 + 20 x_1^3 x_3 x_5 + 60 x_1^2 x_2 x_3 x_5 + 60 x_1 x_2^2 x_3 x_5 + 20 x_2^3 x_3 x_5 + 30 x_1^2 x_3^2 x_5 + \\ &60 x_1 x_2 x_3^2 x_5 + 20 x_2 x_3^3 x_5 + 5 x_3^4 x_5 + 20 x_1^3 x_4 x_5 + 60 x_1^2 x_2 x_4 x_5 + 60 x_1 x_2^2 x_4 x_5 + \\ &60 x_1^2 x_3 x_4 x_5 + 60 x_2^2 x_3 x_4 x_5 + 60 x_1 x_3^2 x_4 x_5 + 60 x_2 x_3^2 x_4 x_5 + 20 x_3^3 x_4 x_5 + 60 x_1 x_2 x_4^2 x_5 + \\ &30 x_2^2 x_4^2 x_5 + 60 x_1 x_3 x_4^2 x_5 + 60 x_2 x_3 x_4^2 x_5 + 30 x_3^2 x_4^2 x_5 + 20 x_1 x_4^3 x_5 + 20 x_2 x_4^3 x_5 + 5 x_4^4 x_5 + \\ &10 x_1^3 x_5^2 + 30 x_1^2 x_2 x_5^2 + 10 x_2^3 x_5^2 + 60 x_1 x_2 x_3 x_5^2 + 30 x_2^2 x_3 x_5^2 + 30 x_1 x_3^2 x_5^2 + 30 x_2 x_3^2 x_5^2 + \\ &10 x_3^3 x_5^2 + 30 x_1^2 x_4 x_5^2 + 60 x_1 x_2 x_4 x_5^2 + 30 x_2^2 x_4 x_5^2 + 60 x_1 x_3 x_4 x_5^2 + 60 x_2 x_3 x_4 x_5^2 + \\ &30 x_1 x_4^2 x_5^2 + 30 x_3 x_4^2 x_5^2 + 10 x_4^3 x_5^2 + 10 x_1^2 x_5^3 + 20 x_1 x_2 x_5^3 + 10 x_2^2 x_5^3 + 20 x_1 x_3 x_5^3 + \\ &10 x_3^2 x_5^3 + 20 x_2 x_4 x_5^3 + 20 x_3 x_4 x_5^3 + 10 x_4^2 x_5^3 + 5 x_1 x_5^4 + 5 x_2 x_5^4 + 5 x_3 x_5^4 + 5 x_4 x_5^4 \end{aligned}$$

θ_k を Σ_6 の k 番目の要素で移した式, $p(x) = \prod (x - \theta_k) = (x - \theta_1)(x - \theta_2) \cdots (x - \theta_6)$, さらに $p(x)$ を基本対称式で表した式を pc とすると, pc は pb と同様に求まりますが, この計算は 5 分程時間がかかるので, 結果のみ直下の closed cell に入れてあります. Mathematica では, 右側の小さい「コ」マークをクリックして「評価」して下さい. また結果の式を見るには「セル」→「セルのプロパティ」→「開く」を選択してください. Mathematica をお持ちでない方は「quinticFormulas.txt」をご覧ください. なお「quinticFormulas.txt」は約 3 千行になります. (↓ pc)

「 $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x + 4$ 」に対して「 $\theta_c = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ 」の値を求めるために, fc を作り因数分解し有理数解を求めます.

```
In[*]:= fc := pc /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → {-2, 1, -8, 9, -4}];
Factor[fc]
```

```
Out[*]=
(-2960 + x)
(-7636158917600000 - 1067069550000x - 1497880000x^2 + 4143000x^3 + 800x^4 + x^5)
```

故に $\theta_c = 11 + 12 + 13 + 14 = 2960$ と分かります.

$$\text{また } l_\theta = (-a_1)^5 - \theta_c = (-2)^5 - 2960 = -2992$$

3-3. $\theta_d = (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)^2$ を求める.

θ_b, θ_c と同様に Galois 分解式を使って求めます. 即ち θ_k を θ_d を Σ_6 の k 番目の要素で移した式, $p(x) = \prod (x - \theta_k) = (x - \theta_1)(x - \theta_2) \cdots (x - \theta_6)$, さらに $p(x)$ を基本対称式で表した式を pd とすると, pd は pb, pc と同様にして求められますが, この計算は14時間程かかりました. 従って結果のみを直下の closed cell に入れてあります. (↓ pd)

「 $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x + 4$ 」に対して「 $\theta_d = (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)^2$ 」の値を求めるために, fd を作り因数分解し有理数解を求めます.

```
In[*]:= fd = pd /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} → {-2, 1, -8, 9, -4}];
Factor[fd]
```

```
Out[*]=
4626296593579184066150400000000000000000000 -
553920732085061879772800000000000000000x - 356687519974110939750000000000x^2 -
4874029846143000000000x^3 - 260809898900000000x^4 - 29486000x^5 + x^6
```

```
Out[*]=
(-36992000 + x)
(-1250620835201985312000000000000000000 + 1463598950402903402500000000x +
1359881636609000000000x^2 + 168520531000000x^3 + 7506000x^4 + x^5)
```

上の因数分解から「 $\theta_d = (l_1 + l_4 - l_2 - l_3)^2 = 36992000$ 」と分かります.

3-4. $R_1 + R_4, R_2 + R_3$ を求める.

ここで「 $\xi = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$ 」としても一般性を失いません.

このとき「 $\xi + \xi^4 - \xi^2 - \xi^3 = \sqrt{5}$ 」となるから §1 (≠4) より,

$$\begin{aligned} R_1 + R_4 &= \frac{1}{2} \left(4l_\theta - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + (l_1 + l_4 - l_2 - l_3) (\xi + \xi^4 - \xi^2 - \xi^3) \right) = \\ &\begin{cases} \frac{1}{2} (4l_\theta - \theta_c + \sqrt{\theta_d} \sqrt{5}) \\ R_2 + R_3 = \frac{1}{2} (4l_\theta - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - (l_1 + l_4 - l_2 - l_3) (\xi + \xi^4 - \xi^2 - \xi^3)) = \\ \frac{1}{2} (4l_\theta - \theta_c - \sqrt{\theta_d} \sqrt{5}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$l_\theta = -2992, l_c = 2960, \sqrt{\theta_d} = \sqrt{36992000} = 2720\sqrt{5}$$

を代入すると「 $\{R_1 + R_4, R_2 + R_3\} = \{-664, -14264\}$ 」(集合として一致)

3-5. R_1, R_2, R_3, R_4 の候補を求める.

§2より「 $\{R_1 R_4, R_2 R_3\} = \{-6^5, 9^5\}$ 」だから, 次の何れかとなります.

- (A) $\{R_1, R_4\}$ は「 $t^2 + 664t - 6^5 = 0$ 」の解,
 かつ $\{R_2, R_3\}$ は「 $t^2 + 14264t + 9^5 = 0$ 」の解
- (A') $\{R_1, R_4\}$ は「 $t^2 + 14264t + 9^5 = 0$ 」の解,
 かつ $\{R_2, R_3\}$ は「 $t^2 + 664t - 6^5 = 0$ 」の解
- (B) $\{R_1, R_4\}$ は「 $t^2 + 664t + 9^5 = 0$ 」の解,
 かつ $\{R_2, R_3\}$ は「 $t^2 + 14264t - 6^5 = 0$ 」の解
- (B') $\{R_1, R_4\}$ は「 $t^2 + 14264t - 6^5 = 0$ 」の解,
 かつ $\{R_2, R_3\}$ は「 $t^2 + 664t + 9^5 = 0$ 」の解

(A) または (A') のとき,

「 $t^2 + 664t - 6^5 = 0$ 」の解を $\{t_{11}, t_{12}\}$,

「 $t^2 + 14264t + 9^5 = 0$ 」の解を $\{t_{21}, t_{22}\}$ とおき, $RA = (t_{11}, t_{21}, t_{22}, t_{12})$ と置くと,

```
In[*]:= RA =
  Flatten[{t /. Solve[t^2 + 664 t - 6^5 == 0], t /. Solve[t^2 + 14264 t + 9^5 == 0, t]}, 1] //
  {1, 3, 4, 2} // Simplify
```

```
Out[*]=
{-4 (83 + 5 Sqrt[295]), -7132 + 415 Sqrt[295], -7132 - 415 Sqrt[295], 4 (-83 + 5 Sqrt[295])}
```

$R_i = i$ と省略し, 順序も考えた $R_1 \sim R_4$ の値は,

$RA = (1, 2, 3, 4), (1, 3, 2, 4), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 2, 1),$
 $(2, 1, 4, 3), (2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2)$ の 8 通りのいずれか.

ここで「§1-1」より「 $(1, 2, 3, 4)$ と $(2, 4, 1, 3)$ と $(3, 1, 4, 2)$ と $(4, 3, 2, 1)$ 」,

「 $(1, 3, 2, 4)$ と $(2, 1, 4, 3)$ と $(3, 4, 1, 2)$ と $(4, 2, 3, 1)$ 」

は同じ f の解を与えます. (例えば $\{x_k\}$ の置換「 $\tau = (2, 3, 5, 4)$ 」

により「 $(R_1, R_2, R_3, R_4) \rightarrow (R_3, R_1, R_4, R_2)$ 」です)

故に (A) 或いは (A') のときは, 順列 (R_1, R_2, R_3, R_4) は次の a, b のいずれかです.

```
In[*]:= (*case a*) {R1, R2, R3, R4} = RA
```

```
Out[*]=
{-4 (83 + 5 Sqrt[295]), -7132 + 415 Sqrt[295], -7132 - 415 Sqrt[295], 4 (-83 + 5 Sqrt[295])}
```

```
In[*]:= (*case b*) {R1, R2, R3, R4} = RA[[{1, 3, 2, 4}]]
```

```
Out[*]=
{-4 (83 + 5 Sqrt[295]), -7132 - 415 Sqrt[295], -7132 + 415 Sqrt[295], 4 (-83 + 5 Sqrt[295])}
```

同様に (B) 或いは (B') のときは, (R_1, R_2, R_3, R_4) は次の c, d のいずれかです.

```
In[*]:= RB =
```

```
Flatten[{t /. Solve[t^2 + 664 t + 9^5 == 0], t /. Solve[t^2 + 14264 t - 6^5 == 0, t]}, 1] //
  {1, 3, 4, 2} // Simplify
```

```
Out[*]=
{-332 - 5 Sqrt[2047], -4 (1783 + 5 Sqrt[127183]), -7132 + 20 Sqrt[127183], -332 + 5 Sqrt[2047]}
```

In[*]:= (***case c***) {R1, R2, R3, R4} = RB

Out[*]=

$$\left\{-332-5\sqrt{2047}, -4\left(1783+5\sqrt{127183}\right), -7132+20\sqrt{127183}, -332+5\sqrt{2047}\right\}$$

In[*]:= (***case d***) {R1, R2, R3, R4} = RB[[{1, 3, 2, 4}]]

Out[*]=

$$\left\{-332-5\sqrt{2047}, -7132+20\sqrt{127183}, -4\left(1783+5\sqrt{127183}\right), -332+5\sqrt{2047}\right\}$$

以上より, (R_1, R_2, R_3, R_4) の値は上の a, b, c, d の何れかと分かりました.

§4. 数値解と比較して解を求める

4-1. 解の候補

「§1-1」の $r_0 \sim r_4$ の定義式の逆変換を求めると

$$(\#5) \quad \begin{cases} x_1 = 1/5 (r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \\ x_2 = 1/5 (r_0 + \zeta^4 r_1 + \zeta^3 r_2 + \zeta^2 r_3 + \zeta r_4) \\ x_3 = 1/5 (r_0 + \zeta^3 r_1 + \zeta r_2 + \zeta^4 r_3 + \zeta^2 r_4) \\ x_4 = 1/5 (r_0 + \zeta^2 r_1 + \zeta^4 r_2 + \zeta r_3 + \zeta^3 r_4) \\ x_5 = 1/5 (r_0 + \zeta r_1 + \zeta^2 r_2 + \zeta^3 r_3 + \zeta^4 r_4) \end{cases}$$

「 $R_1 \sim R_4$ が実数のときは $r_1 \sim r_4$ が全て実数としても一般性を失わない」(D5_Solutions.nb) から,

a, b, c, d 4組の (R_1, R_2, R_3, R_4) に対する r_i の値を求めて代入すると,

それぞれに対応する $x_1 \sim x_5$ の値が求まります. まず実5乗根を求めるコマンドを作っておきます.

さらに「 $\zeta = \text{Cos}(2/5 \pi) + i \text{Sin}(2/5 \pi)$ 」とします.

また「 $f = x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x + 4$ 」のとき「 $r_0 = -a_1 = -2$ 」です

```
In[*]:= realRoot[p_] := Sign[p] Abs[p]^(1/5) (*実5乗根を求めるコマンド*)
ζ = Cos[2/5 π] + I Sin[2/5 π];
r0 = -2;
```

(a) $\{R_1, R_2, R_3, R_4\} = \text{RA}$ のとき

```
In[*]:= {r1, r2, r3, r4} = realRoot /@ RA;
x1a = 1/5 (r0 + r1 + r2 + r3 + r4);
x2a = 1/5 (r0 + ζ^4 r1 + ζ^3 r2 + ζ^2 r3 + ζ r4);
x3a = 1/5 (r0 + ζ^3 r1 + ζ r2 + ζ^4 r3 + ζ^2 r4);
x4a = 1/5 (r0 + ζ^2 r1 + ζ^4 r2 + ζ r3 + ζ^3 r4);
x5a = 1/5 (r0 + ζ r1 + ζ^2 r2 + ζ^3 r3 + ζ^4 r4);
```

小数近似を求めると

```
In[*]:= N[{x1a, x2a, x3a, x4a, x5a}] // Sort
Out[*]:= {-2.43057, -0.568969 - 1.66002 i,
          -0.568969 + 1.66002 i, 0.784255 + 0.37008 i, 0.784255 - 0.37008 i}
```

(b) $\{R_1, R_2, R_3, R_4\} = \text{RA}[[\{1, 3, 2, 4\}]]$ のとき

```
In[*]:= {r1, r2, r3, r4} = realRoot /@ RA[[{1, 3, 2, 4}]];
x1b = 1/5 (r0 + r1 + r2 + r3 + r4);
x2b = 1/5 (r0 + ζ^4 r1 + ζ^3 r2 + ζ^2 r3 + ζ r4);
x3b = 1/5 (r0 + ζ^3 r1 + ζ r2 + ζ^4 r3 + ζ^2 r4);
x4b = 1/5 (r0 + ζ^2 r1 + ζ^4 r2 + ζ r3 + ζ^3 r4);
x5b = 1/5 (r0 + ζ r1 + ζ^2 r2 + ζ^3 r3 + ζ^4 r4);
```

小数近似を求めると

```
In[*]:= N[{x1b, x2b, x3b, x4b, x5b}] // Sort
Out[*]:=
{-2.43057, -0.568969 + 0.411374 i,
-0.568969 - 0.411374 i, 0.784255 - 1.65027 i, 0.784255 + 1.65027 i}
```

(c) $\{R1, R2, R3, R4\} = RB$ のとき

```
In[*]:= {r1, r2, r3, r4} = realRoot /@ RB;
x1c = 1 / 5 (r0 + r1 + r2 + r3 + r4);
x2c = 1 / 5 (r0 +  $\zeta^4$  r1 +  $\zeta^3$  r2 +  $\zeta^2$  r3 +  $\zeta$  r4);
x3c = 1 / 5 (r0 +  $\zeta^3$  r1 +  $\zeta$  r2 +  $\zeta^4$  r3 +  $\zeta^2$  r4);
x4c = 1 / 5 (r0 +  $\zeta^2$  r1 +  $\zeta^4$  r2 +  $\zeta$  r3 +  $\zeta^3$  r4);
x5c = 1 / 5 (r0 +  $\zeta$  r1 +  $\zeta^2$  r2 +  $\zeta^3$  r3 +  $\zeta^4$  r4);
```

小数近似を求めると

```
In[*]:= N[{x1c, x2c, x3c, x4c, x5c}] // Sort
Out[*]:=
{-2.79431, 0.176797 - 1.09118 i,
0.176797 + 1.09118 i, 0.22036 - 1.33912 i, 0.22036 + 1.33912 i}
```

(d) $\{R1, R2, R3, R4\} = RB[[\{1, 3, 2, 4\}]]$ のとき

```
In[*]:= {r1, r2, r3, r4} = realRoot /@ RB[[\{1, 3, 2, 4\}]];
x1d = 1 / 5 (r0 + r1 + r2 + r3 + r4);
x2d = 1 / 5 (r0 +  $\zeta^4$  r1 +  $\zeta^3$  r2 +  $\zeta^2$  r3 +  $\zeta$  r4);
x3d = 1 / 5 (r0 +  $\zeta^3$  r1 +  $\zeta$  r2 +  $\zeta^4$  r3 +  $\zeta^2$  r4);
x4d = 1 / 5 (r0 +  $\zeta^2$  r1 +  $\zeta^4$  r2 +  $\zeta$  r3 +  $\zeta^3$  r4);
x5d = 1 / 5 (r0 +  $\zeta$  r1 +  $\zeta^2$  r2 +  $\zeta^3$  r3 +  $\zeta^4$  r4);
```

小数近似を求めると

```
In[*]:= N[{x1d, x2d, x3d, x4d, x5d}] // Sort
Out[*]:=
{-2.79431, 0.176797 - 0.709754 i,
0.176797 + 0.709754 i, 0.22036 - 1.57485 i, 0.22036 + 1.57485 i}
```

4-2. 解の決定

以上で解の候補が出尽くしました。一方、NSolveを使って f の数値解を求めると、

```
In[*]:= x /. NSolve[x5 + 2 x4 + x3 + 8 x2 + 9 x + 4 == 0, x] // Sort
Out[*]:=
{-2.43057, -0.568969 - 0.411374 i,
-0.568969 + 0.411374 i, 0.784255 - 1.65027 i, 0.784255 + 1.65027 i}
```

上の (a) ~ (d) の数値解と比較すると (a) のケースが求める解と分かります。即ち「 $f=0$ 」の厳密解は $x1a \sim x5a$ となります。($x1a, x2a$ のみ表示します.)

```
In[*]:= TraditionalForm[x1a]
TraditionalForm[x2a]
```

```
Out[*]//TraditionalForm=
```

$$\frac{1}{5} \left(-2 - \sqrt[5]{7132 - 415 \sqrt{295}} + 2^{2/5} \sqrt[5]{5 \sqrt{295} - 83} - 2^{2/5} \sqrt[5]{83 + 5 \sqrt{295}} - \sqrt[5]{7132 + 415 \sqrt{295}} \right)$$

```
Out[*]//TraditionalForm=
```

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \left(-2 + 2^{2/5} \sqrt[5]{5 \sqrt{295} - 83} \left(\frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) + i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} \right) - \sqrt[5]{7132 + 415 \sqrt{295}} \left(\frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) + i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} \right)^2 - \right. \\ & \left. \sqrt[5]{7132 - 415 \sqrt{295}} \left(\frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) + i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} \right)^3 - 2^{2/5} \sqrt[5]{83 + 5 \sqrt{295}} \left(\frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) + i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} \right)^4 \right) \end{aligned}$$

§5. 補足

5-1. 束縛条件 $w_1 = r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$,
 $w_2 = r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$ から $r_1 \sim r_4$ を決める事はできないか？

「F20_Solutions.nb」などのノートブックでは 束縛条件

「 $w_1 = r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$, $w_2 = r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$ 」から $r_1 \sim r_4$ を決めました.

しかしそのためには そもそも w_1 , w_2 の値を求めないといけません.

この2式の値は $Q(\xi)$ に入りますが, 有理数ではありません.

そのためガロア分解式を用いても容易に値が求まらないので, w_1 , w_2 を利用することは断念しました.

5-2. 参考文献 [1] [2] の $f_{20}(x)$ と f_b , f_c , f_d の関係について

Dummit氏の論文では次の F_{20} 不変な式として次の θ を考え,

ガロア分解式 $f_{20}(x)$ を作ります. (ただし Dummit氏は ガロア分解式とは述べていません.)

```
In[*]:= ClearAll[x1, x2, x3, x4, x5]
 $\theta = x_1^2 (x_2 x_5 + x_3 x_4) + x_2^2 (x_1 x_3 + x_4 x_5) +$ 
 $x_3^2 (x_1 x_5 + x_2 x_4) + x_4^2 (x_1 x_2 + x_3 x_5) + x_5^2 (x_1 x_4 + x_2 x_3);$ 

In[*]:=  $\theta_1 = \theta;$ 
 $\theta_2 = \theta /. AssociationThread[\Sigma_6[1] \rightarrow \Sigma_6[2]];$ 
 $\theta_3 = \theta /. AssociationThread[\Sigma_6[1] \rightarrow \Sigma_6[3]];$ 
 $\theta_4 = \theta /. AssociationThread[\Sigma_6[1] \rightarrow \Sigma_6[4]];$ 
 $\theta_5 = \theta /. AssociationThread[\Sigma_6[1] \rightarrow \Sigma_6[5]];$ 
 $\theta_6 = \theta /. AssociationThread[\Sigma_6[1] \rightarrow \Sigma_6[6]];$ 

In[*]:= p20 = SymmetricReduction[(x -  $\theta_1$ ) (x -  $\theta_2$ ) (x -  $\theta_3$ ) (x -  $\theta_4$ ) (x -  $\theta_5$ ) (x -  $\theta_6$ ),
{ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ }, { $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ }] // Collect[#, x] & // First

Out[*]=
```

$$\begin{aligned}
& a_3^8 + a_1 a_2^2 a_3^5 a_4 - 13 a_2 a_3^6 a_4 + a_2^5 a_3^2 a_4^2 + 2 a_1^3 a_2^2 a_3^3 a_4^2 - 15 a_1 a_2^3 a_3^3 a_4^2 - 2 a_1^4 a_3^4 a_4^2 + \\
& 5 a_1^2 a_2 a_3^4 a_4^2 + 65 a_2^2 a_3^4 a_4^2 + 5 a_1 a_3^5 a_4^2 + a_1^2 a_2^5 a_4^3 - 4 a_2^6 a_4^3 + a_1^5 a_2^2 a_3 a_4^3 - \\
& 15 a_1^3 a_2^3 a_3 a_4^3 + 44 a_1 a_2^4 a_3 a_4^3 + 5 a_1^4 a_2 a_3^2 a_4^3 + 19 a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^3 - 128 a_2^3 a_3^2 a_4^3 + \\
& 6 a_1^3 a_3^3 a_4^3 - 118 a_1 a_2 a_3^3 a_4^3 + 17 a_3^4 a_4^3 + a_1^8 a_4^4 - 13 a_1^6 a_2 a_4^4 + 65 a_1^4 a_2^2 a_4^4 - \\
& 128 a_1^2 a_2^3 a_4^4 + 48 a_2^4 a_4^4 + 5 a_1^5 a_3 a_4^4 - 118 a_1^3 a_2 a_3 a_4^4 + 384 a_1 a_2^2 a_3 a_4^4 + \\
& 82 a_1^2 a_3^2 a_4^4 - 16 a_2 a_3^2 a_4^4 + 17 a_1^4 a_4^5 - 16 a_1^2 a_2 a_4^5 - 192 a_2^2 a_4^5 - 192 a_1 a_3 a_4^5 + 256 a_4^6 + \\
& a_1^2 a_2^4 a_3^3 a_5 - 4 a_2^5 a_3^3 a_5 - 6 a_1^3 a_2^2 a_3^4 a_5 + 25 a_1 a_2^3 a_3^4 a_5 + 8 a_1^4 a_3^5 a_5 - 36 a_1^2 a_2 a_3^5 a_5 - \\
& 12 a_2^2 a_3^5 a_5 + 38 a_1 a_3^6 a_5 + a_1^4 a_2^4 a_3 a_4 a_5 - 9 a_1^2 a_2^5 a_3 a_4 a_5 + 18 a_2^6 a_3 a_4 a_5 - \\
& 4 a_1^5 a_2^2 a_3^2 a_4 a_5 + 43 a_1^3 a_2^3 a_3^2 a_4 a_5 - 95 a_1 a_2^4 a_3^2 a_4 a_5 - 28 a_1^4 a_2 a_3^3 a_4 a_5 + \\
& 93 a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_4 a_5 + 12 a_2^3 a_3^3 a_4 a_5 - 12 a_1^3 a_3^4 a_4 a_5 - 29 a_1 a_2 a_3^4 a_4 a_5 - 124 a_3^5 a_4 a_5 + \\
& 2 a_1^7 a_2^2 a_4^2 a_5 - 22 a_1^5 a_2^3 a_4^2 a_5 + 76 a_1^3 a_2^4 a_4^2 a_5 - 78 a_1 a_2^5 a_4^2 a_5 - 8 a_1^8 a_3 a_4^2 a_5 + \\
& 88 a_1^6 a_2 a_3 a_4^2 a_5 - 287 a_1^4 a_2^2 a_3 a_4^2 a_5 + 168 a_1^2 a_2^3 a_3 a_4^2 a_5 + 196 a_2^4 a_3 a_4^2 a_5 - \\
& 54 a_1^5 a_3^2 a_4^2 a_5 + 447 a_1^3 a_2 a_3^2 a_4^2 a_5 - 528 a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5 - 172 a_1^2 a_3^3 a_4^2 a_5 + \\
& 590 a_2 a_3^3 a_4^2 a_5 + 12 a_1^7 a_4^3 a_5 - 148 a_1^5 a_2 a_4^3 a_5 + 514 a_1^3 a_2^2 a_4^3 a_5 - 384 a_1 a_2^3 a_4^3 a_5 + \\
& 180 a_1^4 a_3 a_4^3 a_5 - 1174 a_1^2 a_2 a_3 a_4^3 a_5 - 160 a_2^2 a_3 a_4^3 a_5 + 780 a_1 a_3^2 a_4^3 a_5 - 276 a_1^3 a_4^4 a_5 + \\
& 1760 a_1 a_2 a_4^4 a_5 - 1600 a_3 a_4^4 a_5 + a_1^6 a_2^4 a_5^2 - 9 a_1^4 a_2^5 a_5^2 + 27 a_1^2 a_2^6 a_5^2 - 27 a_2^7 a_5^2 - \\
& 8 a_1^7 a_2^2 a_3 a_5^2 + 72 a_1^5 a_2^3 a_3 a_5^2 - 210 a_1^3 a_2^4 a_3 a_5^2 + 198 a_1 a_2^5 a_3 a_5^2 + 16 a_1^8 a_3^2 a_5^2 - \\
& 144 a_1^6 a_2 a_3^2 a_5^2 + 370 a_1^4 a_2^2 a_3^2 a_5^2 - 185 a_1^2 a_2^3 a_3^2 a_5^2 - 150 a_2^4 a_3^2 a_5^2 + 152 a_1^5 a_3^3 a_5^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 700 a_1^3 a_2 a_3^3 a_5^2 + 525 a_1 a_2^2 a_3^3 a_5^2 + 375 a_1^2 a_3^4 a_5^2 - 125 a_2 a_3^4 a_5^2 + 12 a_1^6 a_2^2 a_4 a_5^2 - \\
& 76 a_1^4 a_2^3 a_4 a_5^2 + 141 a_1^2 a_2^4 a_4 a_5^2 - 99 a_2^5 a_4 a_5^2 - 48 a_1^7 a_3 a_4 a_5^2 + 304 a_1^5 a_2 a_3 a_4 a_5^2 - \\
& 397 a_1^3 a_2^2 a_3 a_4 a_5^2 + 15 a_1 a_2^3 a_3 a_4 a_5^2 - 676 a_1^4 a_3^2 a_4 a_5^2 + 1995 a_1^2 a_2 a_3^2 a_4 a_5^2 - \\
& 725 a_2^2 a_3^2 a_4 a_5^2 - 2050 a_1 a_3^3 a_4 a_5^2 + 86 a_1^6 a_4^2 a_5^2 - 294 a_1^4 a_2 a_4^2 a_5^2 - \\
& 610 a_1^2 a_2^2 a_4^2 a_5^2 + 1200 a_2^3 a_4^2 a_5^2 + 1470 a_1^3 a_3 a_4^2 a_5^2 - 850 a_1 a_2 a_3 a_4^2 a_5^2 + \\
& 3250 a_3^2 a_4^2 a_5^2 - 1450 a_1^2 a_4^3 a_5^2 - 2000 a_2 a_4^3 a_5^2 - 14 a_1^5 a_2^2 a_5^3 + 50 a_1^3 a_2^3 a_5^3 + \\
& 56 a_1^6 a_3 a_5^3 - 200 a_1^4 a_2 a_3 a_5^3 - 125 a_1^2 a_2^2 a_3 a_5^3 + 250 a_1^3 a_3^2 a_5^3 + 625 a_1 a_2 a_3^2 a_5^3 - \\
& 468 a_1^5 a_4 a_5^3 + 2300 a_1^3 a_2 a_4 a_5^3 - 1750 a_1 a_2^2 a_4 a_5^3 - 3500 a_1^2 a_3 a_4 a_5^3 - 1250 a_2 a_3 a_4 a_5^3 + \\
& 7500 a_1 a_4^2 a_5^3 + 625 a_1^4 a_5^4 - 3125 a_1^2 a_2 a_5^4 + 3125 a_2^2 a_5^4 + 3125 a_1 a_3 a_5^4 - 9375 a_4 a_5^4 + \\
& (-2 a_2 a_3^6 - a_1 a_2^3 a_3^3 a_4 - 2 a_1^2 a_2 a_3^4 a_4 + 19 a_2^2 a_3^4 a_4 + 6 a_1 a_3^5 a_4 - a_1^3 a_2^3 a_3 a_4^2 + \\
& \quad 3 a_1 a_2^4 a_3 a_4^2 - 2 a_1^4 a_2 a_3^2 a_4^2 + 28 a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 - 51 a_2^3 a_3^2 a_4^2 + 4 a_1^3 a_3^3 a_4^2 - \\
& \quad 89 a_1 a_2 a_3^3 a_4^2 + 3 a_3^4 a_4^2 - 2 a_1^6 a_2 a_4^3 + 19 a_1^4 a_2^2 a_4^3 - 51 a_1^2 a_2^3 a_4^3 + 32 a_2^4 a_4^3 + \\
& \quad 6 a_1^5 a_3 a_4^3 - 89 a_1^3 a_2 a_3 a_4^3 + 212 a_1 a_2^2 a_3 a_4^3 + 102 a_1^2 a_3^2 a_4^3 + 76 a_2 a_3^2 a_4^3 + \\
& \quad 3 a_1^4 a_4^4 + 76 a_1^2 a_2 a_4^4 - 256 a_2^2 a_4^4 - 384 a_1 a_3 a_4^4 + 512 a_4^5 - 2 a_1^3 a_2^3 a_3^2 a_5 + \\
& \quad 9 a_1 a_2^4 a_3^2 a_5 + 8 a_1^4 a_2 a_3^3 a_5 - 32 a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_5 - 31 a_2^3 a_3^3 a_5 - 8 a_1^3 a_3^4 a_5 + \\
& \quad 112 a_1 a_2 a_3^4 a_5 - 58 a_3^5 a_5 - 2 a_1^5 a_2^3 a_4 a_5 + 15 a_1^3 a_2^4 a_4 a_5 - 27 a_1 a_2^5 a_4 a_5 + \\
& \quad 8 a_1^6 a_2 a_3 a_4 a_5 - 50 a_1^4 a_2^2 a_3 a_4 a_5 + 33 a_1^2 a_2^3 a_3 a_4 a_5 + 117 a_2^4 a_3 a_4 a_5 - \\
& \quad 24 a_1^5 a_3^2 a_4 a_5 + 194 a_1^3 a_2 a_3^2 a_4 a_5 - 231 a_1 a_2^2 a_3^2 a_4 a_5 - 234 a_1^2 a_3^3 a_4 a_5 + \\
& \quad 105 a_2 a_3^3 a_4 a_5 + 8 a_1^7 a_4^2 a_5 - 94 a_1^5 a_2 a_4^2 a_5 + 347 a_1^3 a_2^2 a_4^2 a_5 - 366 a_1 a_2^3 a_4^2 a_5 + \\
& \quad 166 a_1^4 a_3 a_4^2 a_5 - 901 a_1^2 a_2 a_3 a_4^2 a_5 + 260 a_2^2 a_3 a_4^2 a_5 + 1220 a_1 a_3^2 a_4^2 a_5 - \\
& \quad 364 a_1^3 a_4^3 a_5 + 1640 a_1 a_2 a_4^3 a_5 - 2400 a_3 a_4^3 a_5 + 8 a_1^6 a_2^2 a_5^2 - 66 a_1^4 a_2^3 a_5^2 + \\
& \quad 162 a_1^2 a_2^4 a_5^2 - 108 a_2^5 a_5^2 - 32 a_1^7 a_3 a_5^2 + 264 a_1^5 a_2 a_3 a_5^2 - 574 a_1^3 a_2^2 a_3 a_5^2 + \\
& \quad 180 a_1 a_2^3 a_3 a_5^2 - 352 a_1^4 a_3^2 a_5^2 + 1340 a_1^2 a_2 a_3^2 a_5^2 - 325 a_2^2 a_3^2 a_5^2 - 850 a_1 a_3^3 a_5^2 + \\
& \quad 48 a_1^6 a_4 a_5^2 - 318 a_1^4 a_2 a_4 a_5^2 + 305 a_1^2 a_2^2 a_4 a_5^2 + 525 a_2^3 a_4 a_5^2 + 1090 a_1^3 a_3 a_4 a_5^2 - \\
& \quad 3075 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5^2 + 2750 a_3^2 a_4 a_5^2 - 550 a_1^2 a_4^2 a_5^2 - 500 a_2 a_4^2 a_5^2 - 56 a_1^5 a_5^3 + \\
& \quad 350 a_1^3 a_2 a_5^3 - 375 a_1 a_2^2 a_5^3 - 750 a_1^2 a_3 a_5^3 + 625 a_2 a_3 a_5^3 + 2500 a_1 a_4 a_5^3 - 3125 a_5^4) x + \\
& (a_2^2 a_3^4 + 2 a_1 a_3^5 + 3 a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4 - 6 a_2^3 a_3^2 a_4 - 19 a_1 a_2 a_3^3 a_4 - 8 a_3^4 a_4 + a_1^4 a_2^2 a_4^2 - \\
& \quad 6 a_1^2 a_2^3 a_4^2 + 9 a_2^4 a_4^2 + 2 a_1^5 a_3 a_4^2 - 19 a_1^3 a_2 a_3 a_4^2 + 30 a_1 a_2^2 a_3 a_4^2 + 41 a_1^2 a_3^2 a_4^2 + \\
& \quad 76 a_2 a_3^2 a_4^2 - 8 a_1^4 a_4^3 + 76 a_1^2 a_2 a_4^3 - 136 a_2^2 a_4^3 - 264 a_1 a_3 a_4^3 + 400 a_4^4 + \\
& \quad 2 a_1^4 a_2^2 a_3 a_5 - 9 a_1^2 a_2^3 a_3 a_5 - 8 a_1^5 a_3^2 a_5 + 28 a_1^3 a_2 a_3^2 a_5 + 45 a_1 a_2^2 a_3^2 a_5 - \\
& \quad 70 a_1^2 a_3^3 a_5 - 50 a_2 a_3^3 a_5 - 8 a_1^5 a_2 a_4 a_5 + 46 a_1^3 a_2^2 a_4 a_5 - 54 a_1 a_2^3 a_4 a_5 + \\
& \quad 68 a_1^4 a_3 a_4 a_5 - 354 a_1^2 a_2 a_3 a_4 a_5 + 90 a_2^2 a_3 a_4 a_5 + 630 a_1 a_3^2 a_4 a_5 - 144 a_1^3 a_4^2 a_5 + \\
& \quad 640 a_1 a_2 a_4^2 a_5 - 1400 a_3 a_4^2 a_5 + 16 a_1^6 a_5^2 - 120 a_1^4 a_2 a_5^2 + 225 a_1^2 a_2^2 a_5^2 + \\
& \quad 250 a_1^3 a_3 a_5^2 - 875 a_1 a_2 a_3 a_5^2 + 625 a_3^2 a_5^2 - 200 a_1^2 a_4 a_5^2 + 500 a_2 a_4 a_5^2) x^2 + \\
& (-2 a_1 a_2 a_3^3 - 2 a_3^4 - 2 a_1^3 a_2 a_3 a_4 + 5 a_1 a_2^2 a_3 a_4 + 6 a_1^2 a_3^2 a_4 + 21 a_2 a_3^2 a_4 - \\
& \quad 2 a_1^4 a_4^2 + 21 a_1^2 a_2 a_4^2 - 40 a_2^2 a_4^2 - 80 a_1 a_3 a_4^2 + 160 a_4^3 - 2 a_1^3 a_2^2 a_5 + \\
& \quad 9 a_1 a_2^3 a_5 + 16 a_1^4 a_3 a_5 - 66 a_1^2 a_2 a_3 a_5 - 15 a_2^2 a_3 a_5 + 120 a_1 a_3^2 a_5 - \\
& \quad 44 a_1^3 a_4 a_5 + 190 a_1 a_2 a_4 a_5 - 400 a_3 a_4 a_5 - 50 a_1^2 a_5^2 + 125 a_2 a_5^2) x^3 + \\
& (a_1^2 a_3^2 + 2 a_2 a_3^2 + 2 a_1^2 a_2 a_4 - 6 a_2^2 a_4 - 14 a_1 a_3 a_4 + 40 a_4^2 - 8 a_1^3 a_5 + 30 a_1 a_2 a_5 - 50 a_3 a_5) \\
& \quad x^4 + (-2 a_1 a_3 + 8 a_4) x^5 + x^6
\end{aligned}$$

上の式が $f_{20}(x)$ です。文献[1][2]によると、

f が既約な5次方程式の時に限り、 $f_{20}(x)$ は有理数解をただ一つ持ちます。

$\theta_b, \theta_c, \theta_d$ と θ は解の置換に関する性質は非常に似ています。しかし少なくとも θ_c, θ_d については上の性質は成り立たないようです。（ θ_b については不明です。）例えば、

「 $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = (1, 2, 3)$ $\theta_1, \theta_3 = (1, 3, 2)$ $\theta_1, \theta_4 = (1, 2)$ $\theta_1,$
 $\theta_5 = (2, 3)$ $\theta_1, \theta_6 = (1, 3)$ θ_1 」とおくと、 θ_1 は F_{20} によって動かず、

θ_2 は「 $\theta_2 \xrightarrow{\sigma} \theta_6 \xrightarrow{\sigma} \theta_3 \xrightarrow{\sigma} \theta_4 \xrightarrow{\sigma} \theta_5 \xrightarrow{\sigma} \theta_2$ 」, 「 $\theta_2 \xrightarrow{\tau} \theta_2$ 」, 「 $\theta_3 \xrightarrow{\sigma} \theta_5$ 」, 「 $\theta_5 \xrightarrow{\sigma} \theta_3$ 」,
「 $\theta_4 \xrightarrow{\sigma} \theta_6$ 」, 「 $\theta_6 \xrightarrow{\sigma} \theta_4$ 」と動きます. この動き方は θ_b , θ_c , θ_d も全く同じです.

そしてほとんどの可解で既約な5次方程式についてはA:

「 $f_c = (x - \theta_1) q(x)$ (θ_1 は有理数, $q(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約)」となりますが,

例外的にB: 「 $f_c = (x - \theta_1)(x - \theta_2)^5$ (θ_1, θ_2 は有理数)」となる事が有ります.

例えば「 $f = x^5 + 2$ 」は $\text{Gal} = F_{20}$ の既約5次方程式ですが,

f_{20} , f_b , f_c , f_d は次の様になります.

```
In[*]:= f20 := p20 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} -> {0, 0, 0, 0, -2}];
fb := pb /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} -> {0, 0, 0, 0, -2}];
fc := pc /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} -> {0, 0, 0, 0, -2}];
fd := pd /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5} -> {0, 0, 0, 0, -2}];
Factor[f20]
Factor[fb]
Factor[fc]
Factor[fd]

Out[*]=
x (-50000 + x^5)

Out[*]=
x (-160000000000 + x^5)

Out[*]=
(-1250 + x) (-250 + x)^5

Out[*]=
(-7812500 + x) (-312500 + x)^5
```

このようなことになる理由は, 私にはまだ良く分かりません.

5-3. 解の公式について

参考文献[7]の中で, Daniel Lazard氏は, 5次方程式の解の公式を挙げられています. ここでは Dummit氏の θ を少し変形した F_{20} 不変な式が沢山使われています. 具体的には

$$\begin{aligned}
 i_4 &= \theta = x_1^2 (x_2 x_5 + x_3 x_4) + x_2^2 (x_1 x_3 + x_4 x_5) + \\
 &\quad x_3^2 (x_1 x_5 + x_2 x_4) + x_4^2 (x_1 x_2 + x_3 x_5) + x_5^2 (x_1 x_4 + x_2 x_3) \\
 i_5 &= x_1^3 (x_2 x_5 + x_3 x_4) + x_2^3 (x_1 x_3 + x_4 x_5) + \\
 &\quad x_3^3 (x_1 x_5 + x_2 x_4) + x_4^3 (x_1 x_2 + x_3 x_5) + x_5^3 (x_1 x_4 + x_2 x_3) \\
 i_6 &= x_1^4 (x_2 x_5 + x_3 x_4) + x_2^4 (x_1 x_3 + x_4 x_5) + \\
 &\quad x_3^4 (x_1 x_5 + x_2 x_4) + x_4^4 (x_1 x_2 + x_3 x_5) + x_5^4 (x_1 x_4 + x_2 x_3) \\
 i_7 &= x_1^3 (x_2^2 x_5^2 + x_3^2 x_4^2) + x_2^3 (x_1^2 x_3^2 + x_4^2 x_5^2) + \\
 &\quad x_3^3 (x_1^2 x_5^2 + x_2^2 x_4^2) + x_4^3 (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_5^2) + x_5^3 (x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) \\
 i_8 &= x_1^4 (x_2^2 x_5^2 + x_3^2 x_4^2) + x_2^4 (x_1^2 x_3^2 + x_4^2 x_5^2) + \\
 &\quad x_3^4 (x_1^2 x_5^2 + x_2^2 x_4^2) + x_4^4 (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_5^2) + x_5^4 (x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2)
 \end{aligned}$$

です. (因みに i_3 は対称式なのですぐ値が求まります.) 氏はどうやらこれらの式を使って5次方程式の解の公式(i_4 と f の係数を使った式)を導かれている様なのですが, それは非常に複雑で長く, その過程もまだ理解できていません. なお Dummit氏も「 $x^5+ax+b=0$ 」の形の方程式に限って「解の公式 (アルゴリズム)」を発表されていますが, こちらはず〜と短いです.

5-4. Mathematica のバグ?

今回, $x_1 \sim x_5$ の値を計算している時に変な事に遭遇しました. 下の x_2, y_2 の式は「全く同じ」に見えますが, 小数近似の値は異なっています. エラーは出ていないので, 全角空白が入っていることはありません.

```
In[*]:= r0 = -2;
RA = {-7132 + 415 Sqrt[295], -4 (83 + 5 Sqrt[295]), 4 (-83 + 5 Sqrt[295]), -7132 - 415 Sqrt[295]};
{r1, r2, r3, r4} = realRoot /@ RA;
ξ = Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5];
x2 = 1 / 5 (r0 + ξ^4 r1 + ξ^3 r2 + ξ^2 r3 + ξ r4);
y2 = 1 / 5 (r0 + ξ^4 r1 + ξ^3 r2 + ξ^2 r3 + ξ r4);
N[x2]
N[y2]
```

Out[*]=

$$1.64675 + 2.67772 i$$

Out[*]=

$$-0.568969 - 0.411374 i$$

x_2, y_2 を表示すると式自体が違う事が解ります.

```
In[*]:= x2
y2
```

Out[*]=

$$\frac{1}{5} \left(- (7132 - 415 \sqrt{295})^{1/5} \left(-2 + i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} + \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \right)^4 - \right. \\ \left. (7132 + 415 \sqrt{295})^{1/5} \left(i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} + \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \right) + 2^{2/5} (-83 + 5 \sqrt{295})^{1/5} \right. \\ \left. \left(i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} + \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \right)^2 - 2^{2/5} (83 + 5 \sqrt{295})^{1/5} \left(i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} + \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \right)^3 \right)$$

Out[*]=

$$\frac{1}{5} \left(-2 - (7132 + 415 \sqrt{295})^{1/5} \left(i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} + \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \right) + \right. \\ \left. 2^{2/5} (-83 + 5 \sqrt{295})^{1/5} \left(i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} + \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \right)^2 - 2^{2/5} (83 + 5 \sqrt{295})^{1/5} \right. \\ \left. \left(i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} + \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \right)^3 - (7132 - 415 \sqrt{295})^{1/5} \left(i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} + \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \right)^4 \right)$$

次の場合も奇妙な事が起こっています.

```
In[*]:= a = 1;
b = 2;
x3 = a + b^2
y3 = a + b^2
```

```
Out[*]=
```

```
5
```

```
Out[*]=
```

```
9
```

a, bの値を消去すると理由が(少しだけ)分かります.

```
In[*]:= Clear[a, b]
x3 = a + b^2
y3 = a + b^2
```

```
Out[*]=
```

```
a + b2
```

```
Out[*]=
```

```
(a + b)2
```

y3を右端から1文字ずつ消去していくと、もっと根本の理由が分かります.

```
In[*]:= a + b^2(*start*)
a + b
a
□
```

```
Out[*]=
```

```
(a + b)2
```

```
Out[*]=
```

```
a + b
```

```
Out[*]=
```

```
a □
```

なんと, 全てを消去しても□が残っています. (□は Mathematica で添字や分数などを綺麗な形で入力するときに現れるフォームです.) y2についても同様です. これが原因ですが, 気づく事は非常に難しいです. 皆様もお気を付けください. 私は半日ほど, これに嵌りました. (^_^;)