$x^5 - 5x + 12$ の厳密解 with *Mathematica* 13.3

Galois群がD_5の方程式　　　　2025 年2月 by mixedmoss

§0. [準備] 原始元，分解方程式，ガロア群

以下は GaloisGroupProgram.nb を使って求めた結果です．

```
In[∘]:= ClearAll["`*"]
f = x^5 - 5 x + 12;
```

f(x)=0の解を x1, x2, x3, x4, x5 . f(x)=0 の原始元の一つをv = 5 x1+2 x2 + 3 x3 + 4 x4 + 1 x5． vの最小多項式をV[x] とすると

In[∘]:= $V[x\_] = 148\,996\,000 - 1\,521\,500\,x^2 - 12\,500\,x^4 + 3325\,x^6 - 110\,x^8 + x^{10};$

また x1, x2, x3, x4, x5 を原始元vで表すと

In[∘]:= $\{x1, x2, x3, x4, x5\} =$

$$\Big\{\frac{1}{9\,239\,628\,268\,800}\big(5\,117\,531\,026\,400 + 2\,122\,210\,541\,600\,v - 92\,467\,168\,500\,v^2 - 16\,386\,746\,700\,v^3 - 6\,336\,236\,320\,v^4 + 421\,422\,680\,v^5 + 183\,059\,535\,v^6 - 991\,635\,v^7 - 1\,592\,443\,v^8 - 78\,265\,v^9\big),$$

$$\frac{1}{923\,962\,826\,880}\big(-201\,405\,134\,560 - 37\,539\,305\,120\,v - 7\,761\,390\,780\,v^2 - 3\,277\,349\,340\,v^3 + 993\,991\,688\,v^4 + 84\,284\,536\,v^5 - 12\,606\,567\,v^6 - 198\,327\,v^7 - 7141\,v^8 - 15\,653\,v^9\big), \frac{-16\,080\,205\,600 + 881\,249\,100\,v^2 - 18\,671\,920\,v^4 - 295\,305\,v^6 + 8621\,v^8}{23\,936\,860\,800},$$

$$\frac{1}{923\,962\,826\,880}\big(-201\,405\,134\,560 + 37\,539\,305\,120\,v - 7\,761\,390\,780\,v^2 + 3\,277\,349\,340\,v^3 + 993\,991\,688\,v^4 - 84\,284\,536\,v^5 - 12\,606\,567\,v^6 + 198\,327\,v^7 - 7141\,v^8 + 15\,653\,v^9\big),$$

$$\frac{1}{9\,239\,628\,268\,800}\big(5\,117\,531\,026\,400 - 2\,122\,210\,541\,600\,v - 92\,467\,168\,500\,v^2 + 16\,386\,746\,700\,v^3 - 6\,336\,236\,320\,v^4 - 421\,422\,680\,v^5 + 183\,059\,535\,v^6 + 991\,635\,v^7 - 1\,592\,443\,v^8 + 78\,265\,v^9\big)\Big\};$$

f(x) のGalois群を Gal , σ=(1,2,3,4,5), τ=(2,3,5,4) とすると, τ^2=(2,5)(3,4)

$\mathrm{Gal} = \{Id, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \tau^2\sigma, \tau^2\sigma^2, \tau^2\sigma^3, \tau^2\sigma^4\} = D_5 = C_5 + \tau^2 C_5$

ただし， C_5 は5次巡回群， D_5 は10次の2面体群で， 分解列は　$\mathrm{Gal} = D_5 \triangleright C_5 \triangleright \{Id\}$

§1． Lagrange分解式 r1,r2,r3,r4 の5乗の値を求める

$C_5 \triangleright${Id}の部分に注目し，ラグランジュの5次分解式をつくる .(ζは1の原始 5 乗根のひとつ．)
このとき，V(v)と円分方程式 $v^4+v^3+v^2+v+1$ で割った余りを考える．(PolynomialMod)

In[∘]:=
```
r0 = x1 + x2 +  x3 + x4 + x5 // PolynomialMod[#, V[v]] &;
r1 =
  x1 + ζ x2 + ζ^2 x3 + ζ^3 x4 + ζ^4 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &;
r2 = x1 + ζ^2 x2 + ζ^4 x3 + ζ x4 + ζ^3 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &;
r3 = x1 + ζ^3 x2 + ζ x3 + ζ^4 x4 + ζ^2 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &;
r4 = x1 + ζ^4 x2 + ζ^3 x3 + ζ^2 x4 + ζ x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &;
```

解と係数の関係より r0 = 0. また

$$(\#)\begin{cases} \text{r1を}\sigma\text{で移すと r1} \to \zeta^4\,\text{r1}, & \tau^2 \text{ で移すと r1} \to \text{r4} \\ \text{r2を}\sigma\text{で移すと r2} \to \zeta^3\,\text{r2}, & \tau^2 \text{ で移すと r2} \to \text{r3} \\ \text{r3を}\sigma\text{で移すと r3} \to \zeta^2\,\text{r3}, & \tau^2 \text{ で移すと r3} \to \text{r2} \\ \text{r4を}\sigma\text{で移すと r4} \to \zeta\,\text{r4}, & \tau^2 \text{ で移すと r4} \to \text{r1} \end{cases}$$

即ち, τ^2 は 分解式を「r1↔r4，r2↔r3」のように移し，σは「r1 → ζ^4 r1→ → ζ^3 r1→ → ζ^2 r1 → ζ r1 → r1」のように移す．
さらに 同型写像 ω: $\zeta \to \zeta^3$ とすると，分解式は次のように移る．

(by ω) r1→r3→r4→r2 →r1⋯　　(by ω^2) r1↔r4，r2↔r3

以下，R1=r1^5, R2 = r2^5,R3=r3^5, R4 = r4^{5}とおく．(#)よりR1,R2,R3,R4はσで不変．t1=R1+R4, t2=R2+R3, t3=r1r4，t4 = r2r3 はτ^2 で不変
故に t1,t2,t3,t4 はD_5 で不変なので, D_5の固定体 Q(ζ)に入るはず．「単純計算」で

In[∘]:=
```
t1 = r1^5 + r4^5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &
t2 = r2^5 + r3^5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &
t3 = r1 * r4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &
t4 = r2 * r3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &
```

Out[∘]=
$-8750 - 5000\,\zeta^2 - 5000\,\zeta^3$

Out[∘]=
$-3750 + 5000\,\zeta^2 + 5000\,\zeta^3$

Out[∘]=
$5 + 10\,\zeta^2 + 10\,\zeta^3$

Out[∘]=
$-5 - 10\,\zeta^2 - 10\,\zeta^3$

【参考】ω^3: $\zeta \to \zeta^2$ で t1 を移すと，t2=-8750-5000($\zeta^4 + \zeta$)=-3750+ $5000\,\zeta^2 + 5000\,\zeta^3$
同様にして t3 の式から　計算なしに t4 の式が得られる．

ここで ζの偏角を（$\pm 2\pi/5$）に取っても一般性を失わない．
(偏角を $\pm 4\pi/5$ に取ることは ω^3 で移すことと同じなので,

下の式で$r1 \to r2 \to r4 \to r3$と移すだけ.よって解のセットは変わらない.)

このとき「$\zeta^2 + \zeta^3 = 1/2\left(-1 - \sqrt{5}\right)$」だから

$r1^5 + r4^5 = -6250 + 2500\sqrt{5}$, $r2^5 + r3^5 = -6250 - 2500\sqrt{5}$,

$r1r4 = -5\sqrt{5}$, $r2r3 = 5\sqrt{5}$ -- (1)

故に

$R1+R4=-6250+2500\sqrt{5}$, $R1\,R4=-\left(5\sqrt{5}\right)^5$, $R2+R3=-6250-2500\sqrt{5}$, $R2\,R3=\left(5\sqrt{5}\right)^5$

「R1,R4を2解とする2次方程式」と「R2, R3を2解とする2次方程式」を作ることができるので R1,R2,R3,R4の値が求まる. 理論的に解けることが分かったのでSolveを使って求め 変数 Rset に入れる.

In[ ]:=

```
Rset = {R1, R2, R3, R4} /.
   Solve[{R1 + R4 == -6250 + 2500 Sqrt[5], R1 R4 == - (5 Sqrt[5]) ^5, R2 + R3 ==
      -6250 - 2500 Sqrt[5], R2 R3 == (5 Sqrt[5]) ^5}, {R1, R2, R3, R4}] // FullSimplify
```

Out[ ]=

$$\left\{\left\{-125\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right),\ 125\left(-25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right),\right.\right.$$
$$\left.625\left(-5-2\sqrt{5}-3\sqrt{5+\frac{11}{\sqrt{5}}}\right),\ 125\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)\right\},$$
$$\left\{125\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right),\ 125\left(-25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right),\right.$$
$$\left.625\left(-5-2\sqrt{5}-3\sqrt{5+\frac{11}{\sqrt{5}}}\right),\ -125\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)\right\},$$
$$\left\{-125\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right),\ -125\left(25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right),\right.$$
$$\left.125\left(-25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right),\ 125\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)\right\},$$
$$\left\{125\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right),\ -125\left(25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right),\right.$$
$$\left.\left.125\left(-25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right),\ -125\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)\right\}\right\}$$

ここで

In[ ]:=

$$625\left(-5-2\sqrt{5}-3\sqrt{5+\frac{11}{\sqrt{5}}}\right) == -125\left(25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)$$

Out[ ]=

True

であるから, (R1,R2,R3,R4)の組は

4組あるが, これらは順序が異なっているだけで, 最初の組を(1,2,3,4)と改めておくと, 全ての解は (1,2,3,4),(4,2,3,1),(1,3,2,4),(4,3,2,1)の4通り.

【注】実は§2(##)より, x1,x2,x3,x4の値は (r1,r2,r3,r4)を(r4,r3,r2,r1),(r3, r1,r4,r2), (r2,r4,r1,r3)に変えても変わらないので実質は2通り. またGalois群が C_5 の時は「単純計算」で R1~R4が求まったが, D_5のときは, 「単純計算」で求まるのは t1~t4であり, R1~R4は, 2次方程式を解かないと求まらない.

§2.($r1\ r2^2+r3^2\ r4$) と ($r1^2\ r3+r2\ r4^2$) の値を考慮し r1,r2,r3,r4 の値を求める

ここで r0,r1,r2,r3,r4の定義とr0=0から

$$(\#\#)\begin{cases} x1 &= 1/5\,(r1+r2+r3+r4) \\ x2 &= 1/5\left(\zeta^4\, r1+\zeta^3\, r2+\zeta^2\, r3+\zeta\, r4\right) \\ x3 &= 1/5\left(\zeta^3\, r1+\zeta\, r2+\zeta^4\, r3+\zeta^2\, r4\right) \\ x4 &= 1/5\left(\zeta^2\, r1+\zeta^4\, r2+\zeta\, r3+\zeta^3\, r4\right) \\ x5 &= 1/5\left(\zeta\, r1+\zeta^2\, r2+\zeta^3\, r3+\zeta^4\, r4\right) \end{cases}$$

$w1=r1\,r2^2+r2\,r4^2$ と $w2 = r1^2\, r3+r2\, r4^2$ は σとτ で変わらないので, D_5 の不変体Q(ζ)に入る. 「単純計算」して

```
In[◦]:= r1 r2^2 + r3^2 r4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
        r1^2 r3 + r2 r4^2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
```

Out[◦]=

$-50-100\,\xi^2-100\,\xi^3$

Out[◦]=

$50+100\,\xi^2+100\,\xi^3$

【参考】ω^3 : $\xi\to\xi^2$ で w1の式 を移すと

$r2\,r4^2+r1^2\,r3 = -50-100\,\xi^4-100\,\xi = -50-100\left(-1-\xi^2-\xi^3\right) = 50+100\,\xi^2+100\,\xi^3$

「$\xi^2+\xi^3 = 1/2\left(-1-\sqrt{5}\right)$」だから,

$\left(r1\,r2^2+r3^2\,r4,\ r1^2\,r3+r2\,r4^2\right) = \left(50\sqrt{5},\ -50\sqrt{5}\right)$ -- (2)

ここで R1, R2, R3, R4は実数だから,

r1, r2, r3, r4は実数としても一般性を失わない（補足参照）.

このとき（2）を満たす（r1, r2, r3, r4）は次の2組となる.

```
In[◦]:= realRoot[p_] := Sign[p] Abs[p]^(1/5) (*実数に対し実5乗根を求めるコマンド*)
        realRoot /@ Rset;
        rset = Select[%, (a1 = #[[1]]; a2 = #[[2]]; a3 = #[[3]]; a4 = #[[4]];
             $w1 = a1 a2^2 + a3^2 a4;
             $w2 = a1^2 a3 + a2 a4^2;
             FullSimplify[ $w1] == 50 Sqrt[5] && FullSimplify[$w2] == -50 Sqrt[5]) &]
```

Out[◦]=

$$\left\{\left\{-5^{3/5}\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5},\ -5^{3/5}\left(25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5},\ -5^{4/5}\left(5+2\sqrt{5}+3\sqrt{5+\frac{11}{\sqrt{5}}}\right)^{1/5},\ 5^{3/5}\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{5^{3/5}\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5},\ -5^{3/5}\left(25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5},\ -5^{3/5}\left(25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5},\ -5^{3/5}\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\right\}\right\}$$

§3.　x1,x2,x3,x4,x5 の値を求める

§2(##)より， x1,x2,x3,x4の値は (r1,r2,r3,r4)を(r4,r3,r2,r1),(r3, r1,r4,r2), (r2,r4,r1,r3)に変えても変わらないので， 先の2組の解は実質は同じ． 故に{x1,x2,x3,x4,x5} の値は, 次の {x1,x2,x3,x4,x5}となる.

```
{$r1, $r2, $r3, $r4} = rset⟦1⟧;
ξ = Cos[2 π / 5] + I Sin[2 π / 5];
x1 = 1 / 5 ($r1 + $r2 + $r3 + $r4) // Simplify
x2 = 1 / 5 (ξ^4 $r1 + ξ^3 $r2 + ξ ^2 $r3 + ξ $r4) // Simplify
x3 = 1 / 5 (ξ^3 $r1 + ξ $r2 + ξ^4 $r3 + ξ^2 $r4) // Simplify
x4 = 1 / 5 (ξ^2 $r1 + ξ^4 $r2 + ξ $r3 + ξ^3 $r4) // Simplify
x5 = 1 / 5 (ξ $r1 + ξ^2 $r2 + ξ ^3 $r3 + ξ^4 $r4) // Simplify
```

Out[∘]=

$$-\frac{1}{5^{2/5}}\left(\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}-\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}+\left(25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5}+\left(25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\right)$$

Out[∘]=

$$\frac{1}{4\times 5^{2/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}-\frac{1}{64}\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{3}-\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{2}\left(25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5}-\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\right)$$

Out[∘]=

$$\frac{1}{4\times 5^{2/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(\frac{1}{4}\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)-\frac{1}{16}\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{2}-\left(25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5}-\frac{1}{64}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{3}\left(25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\right)$$

Out[∘]=

$$\frac{1}{4\times 5^{2/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-\frac{1}{4}\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\frac{1}{16}\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{2}-\frac{1}{64}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{3}\left(25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5}-\left(25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\right)$$

Out[ ]=

$$\frac{1}{4\times 5^{2/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-\left(25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}+\right.$$
$$\frac{1}{64}\left(-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{3}-$$
$$\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5}-$$
$$\left.\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{2}\left(25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}\right)^{1/5}\right)$$

近似値を使い f (x) = 0 の解と比較する.

In[ ]:=
```
N[{x1, x2, x3, x4, x5}] // Sort
x /. NSolve[f == 0, x] // Sort // Quiet
```

Out[ ]=

{-1.84209, -0.351854 - 1.70956 i,
 -0.351854 + 1.70956 i, 1.2729 + 0.719799 i, 1.2729 - 0.719799 i}

Out[ ]=

{-1.84209, -0.351854 - 1.70956 i,
 -0.351854 + 1.70956 i, 1.2729 - 0.719799 i, 1.2729 + 0.719799 i}

見た目では一致している. また少し時間はかかるが f(x1)=0となることが確かめられる. (FullSimplifyを2回使う) なお実数解x1,虚数解x2を 累乗根を使って書くと,

In[ ]:=
```
x1 // TraditionalForm // Print
x2 // TraditionalForm // Print
```

$$-\frac{1}{5^{2/5}}\left(\sqrt[5]{25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}-\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}+\right.$$
$$\left.\sqrt[5]{25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}+\sqrt[5]{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\right)$$

$$\frac{1}{4\times 5^{2/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)$$
$$\left(\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}-\frac{1}{64}\sqrt[5]{25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{3}-\right.$$
$$\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{2}\sqrt[5]{25+10\sqrt{5}-3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}-$$
$$\left.\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\sqrt[5]{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\right)$$

§4. まとめ

[Step1] 5次のLagrangeの分解式 r_0,r_1,r_2,r_3,r_4 を作る (ζは 1 の原始 5 乗根の一つ)

$$\begin{cases} r_0 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\ (=0) \\ r_1 &= x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3 + \zeta^3 x_4 + \zeta^4 x_5 \\ r_2 &= x_1 + \zeta^2 x_2 + \zeta^4 x_3 + \zeta x_4 + \zeta^3 x_5 \\ r_3 &= x_1 + \zeta^3 x_2 + \zeta x_3 + \zeta^4 x_4 + \zeta^2 x_5 \\ r_4 &= x_1 + \zeta^4 x_2 + \zeta^3 x_3 + \zeta^2 x_4 + \zeta x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \\ x_2 &= \zeta^4 r_1 + \zeta^3 r_2 + \zeta^2 r_3 + \zeta r_4 \\ x_3 &= \zeta^3 r_1 + \zeta r_2 + \zeta^4 r_3 + \zeta^2 r_4 \\ x_4 &= \zeta^2 r_1 + \zeta^4 r_2 + \zeta r_3 + \zeta^3 r_4 \\ x_5 &= \zeta r_1 + \zeta^2 r_2 + \zeta^3 r_3 + \zeta^4 r_4 \end{cases}$$

ここで 次の関係が成り立つ.

$$(\#)\begin{cases} r_1 \text{をσで移すと } r_1 \to \zeta^4 r_1, & \tau^2 \text{ で移すと } r_1 \to r_4 \\ r_2 \text{をσで移すと } r_2 \to \zeta^3 r_2, & \tau^2 \text{ で移すと } r_2 \to r_3 \\ r_3 \text{をσで移すと } r_3 \to \zeta^2 r_3, & \tau^2 \text{ で移すと } r_3 \to r_2 \\ r_4 \text{をσで移すと } r_4 \to \zeta r_4, & \tau^2 \text{ で移すと } r_4 \to r_1 \end{cases}$$

τ^2 は 分解式を「r_1↔r_4, r_2↔r_3」のように移し, σは「$r_1 \to \xi^4 r_1 \to \to \xi^3 r_1 \to \to \xi^2 r_1 \to \xi r_1 \to r_1$」のように移す.

さらに 同型写像 $\omega: \zeta \to \zeta^3$ とすると, 分解式は次のように移る.

(##) (by ω) $r_1 \to r_3 \to r_4 \to r_2 \to r_1$ (by ω^2) $r_1 \leftrightarrow r_4$, $r_2 \leftrightarrow r_3$

$t_1=r_1^5 + r_4^5$, $t_2=r_2^5 + r_3^5$, $t_3=r_1 r_4$, $t_4 = r_2 r_3$ とおく.
t_1, t_2, t_3, t_4 は D_5 で不変なので, D_5の固定体 $Q(\zeta)$ に入り t_1 ,t_2,t_3,t_4
の値は「単純計算」で求まる. 2 次方程式を 1 回解くことにより(R_1, R_2, R_3, R_4) の値が求まる. ここで「(R_1, R_2, R_3, R_4) は全て実数」または「r_1と r_4, r_2と r_3が複素共役」(補足参照)

[Step2] $\left(r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4\right)$ と $\left(r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2\right)$ の値を考慮し r_1, r_2, r_3, r_4 の値を求め, さらに x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求める.

同様に考えると $w_1 = r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$, $w_2 = r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$ も D_5 の不変体 Q(ξ) に入る.
故に「単純計算」で w_1 と w_2 の値は求まる.

(ア) R_1, R_2, R_3, R_4 が実数の時, r_1, r_2, r_3,
r_4 が全て実数としても一般性を失わない.(補足3). 故に w_1, w_2 を満足させる (r_1, r_2, r_3, r_4) はすぐ求まる.

(イ) R_1 と R_4 , R_2 と R_3 が複素共役な虚数の時, r_1 とr_4,
r_2 とr_3 は複素共役なので, (r_1, r_2) の取り方の 5^2 通りをチェックすれば良いが,
参考文献「可解な5次方程式について」によると, w_1 とw_2 を満たす (r_1, r_2) が存在する時は,
R_1 の 任意の5乗根 r_1 について r_2 が1通りに決まるので,
実際には5通りをチェックすれば良い. このようにして
w_1, w_2 を満足させる (r_1, r_2, r_3, r_4) は比較的簡単に求まる.

【注】「単純計算」しないといけないのは「$t_1 = r_1^5 + r_4^5$, $t_3 = r_1 r_4$,
$w_1 = r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$」 の3個だけで, 後はこれを ωで移せば得られる.

§5. 補足

[補足1] $r_1 r_4$, $r_2 r_3$, $r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$, $r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$, $R_1 + R_4$, $R_2 + R_3$ は $Q(\sqrt{5})$ に入る

写像$\omega^2 : \zeta \to \zeta^4$ により「$r_1 \leftrightarrow r_4$, $r_2 \leftrightarrow r_3$」. 故に $r_1 r_4$, $r_2 r_3$,
$r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$, $r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$ は ω^2 で変わらない. 例えば $u = r_1 r_4$ とおくと,
§1より$u \in Q(\zeta)$ だから $u = a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3$ $(a, b, c, d \in Q)$ とおける.
ここで「ω^2 によって u は変わらない」ので $a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 =$
$a + b\zeta^4 + c\zeta^3 + d\zeta^2 \left(= (a - b) - b\zeta + (-b + d)\zeta^2 + (-b + c)\zeta^3\right)$
1, ζ, ζ^2, ζ^3 はQ上一次独立だから, $b = 0$,
$c = d$. 故に $u = a + c\left(\zeta^2 + \zeta^3\right) \in Q\left(\sqrt{5}\right)$. 他も同様.

[補足2] R_1, R_2, R_3, R_4 は 全て実数, または r_1 と r_4, r_2 と r_3 が複素共役

まず, $r_1^5 = 0$ とする.これを ωによって移すと,
$r_2^5 = r_4^5 = r_3^5 = 0$ となり矛盾. よって r_1^5, r_2^5, r_3^5, r_4^5 は, どれも 0 ではない.
[補足1] より, $\arg(r_1) = \theta_1$, $\arg(r_2) = \theta_2$ とおくと,
r1 r4, r2 r3 が実数となるから, $\arg(r_3) = -\theta_2$, $\arg(r_4) = -\theta_1$
このとき, $\arg\left(r_1 r_2^2\right) = \theta_1 + 2\theta_2$, $\arg\left(r_3^2 r_4\right) = -(\theta_1 + 2\theta_2)$,
$\arg\left(r_1^2 r_3\right) = 2\theta_1 - \theta_2$, $\arg\left(r_2 r_4^2\right) = -(2\theta_1 - \theta_2)$
故に $(r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4)$ と $(r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2)$ が実数より,

「$\left|r_1 r_2^2\right| = \left|r_3^2 r_4\right|$ または ($r_1 r_2^2$ と$r_3^2 r_4$ が実数)」
かつ「$\left|r_1^2 r_3\right| = \left|r_2 r_4^2\right|$ または ($r_1^2 r_3$ と $r_2 r_4^2$ が実数)」

ここで $\left|r_1 r_2^2\right| = \left|r_3^2 r_4\right|$ と $\left|r_2 r_4^2\right| = \left|r_1^2 r_3\right|$ は ω によって互いに移るので,
片方が成り立てば, もう一方も成り立ち, これから
$|r_2| = |r_3|$ かつ $|r_1| = |r_4|$ となる. このとき r_1 と r_4, r_2 とr_3 が複素共役

$r_1 r_2^2$, $r_3^2 r_4$, $r_1^2 r_3$, $r_2 r_4^2$ が実数のときは,
$$\theta_1 + 2\theta_2 \equiv 0 \text{ かつ } 2\theta_1 - \theta_2 \equiv 0 \to 5\theta_1 \equiv 5\theta_2 \equiv 0 \pmod{\pi}$$
従って R_1, R_2, R_3, R_4 は 実数となる.

[補足3] R_1, R_2, R_3, R_4 が全て実数のとき, r_1, r_2, r_3, r_4 を実数としても一般性を失わない

(R_1, R_2, R_3, R_4) の値の組を一つ固定する. この時 (r_1, r_2, r_3, r_4) の選び方は 5^4 通り.
これらを集めた集合$S = \left\{\left(\zeta^k r_1, \zeta^l r_2, \zeta^m r_3, \zeta^n r_4\right) (k, l, m, n = 0, 1, 2, 3, 4)\right\}$
の中の置換μ を次のように定める.
$$\mu : r_1 \to \zeta s_1,\ r_2 \to \zeta^2 r_2,\ r_3 \to \zeta^3 r_3,\ r_4 \to \zeta^4 r_4$$

μによって x_i は「$x_1 \to x_5 \to x_4 \to x_3 \to x_2 \to x_1$」と動く. これは$\tau^3$ によるものと同じ動き. (*)

一方μによって

$(r_1, r_2, r_3, r_4) \to (r_1 \zeta, r_2 \zeta^2, r_3 \zeta^3, r_4 \zeta^4) \to (r_1 \zeta^2, r_2 \zeta^4, r_3 \zeta^6, r_4 \zeta^8) \to$
$(r_1 \zeta^3, r_2 \zeta^6, r_3 \zeta^9, r_4 \zeta^{12}) \to (r_1 \zeta^4, r_2 \zeta^8, r_3 \zeta^{12}, r_4 \zeta^{16}) \to (r_1, r_2, r_3, r_4)$

と動く．即ち $m = 0, 1, 2, 3, 4$ に対し，
μ^m は (r_1, r_2, r_3, r_4) を $(r_1 \zeta^m, r_2 \zeta^{2m}, r_3 \zeta^{3m}, r_4 \zeta^{4m})$ に移す．

ここで $\arg\zeta = 2\pi / 5$ として良い．r_1^5 は実数だから $\arg r_1$ は $\pi / 5$ の整数倍．
故に $\{r_1, r_1 \zeta, r_1 \zeta^2, r_1 \zeta^3, r_1 \zeta^4\}$ の中に実数となるものが一つだけ存在する．
それを $r_1 \zeta^m$ とすると，$(r_1 \zeta^m)(r_4 \zeta^{4m}) = r_1 r_4$ が実数より，
$r_4 \zeta^{4m}$ も実数．次に $(r_2 \zeta^{2m})(r_4 \zeta^{4m})^2 = r_2 r_4^2$ が実数より$r_2 \zeta^{2m}$ も実数．
最後に $(r_2 \zeta^{2m})(r_3 \zeta^{3m}) = r_2 r_3$ が実数より $r_2 \zeta^{2m}$ も実数．
故に $(r_1 \zeta^m, r_2 \zeta^{2m}, r_3 \zeta^{3m}, r_4 \zeta^{4m})$ がすべて実数となる m が存在する．

$(r_1 \zeta^m, r_2 \zeta^{2m}, r_3 \zeta^{3m}, r_4 \zeta^{4m})$ を改めて (r_1, r_2, r_3, r_4) と置き直すことができる．
なぜなら，$(*)$ より，これは x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 の名前を付け替えることに対応するから．

[補足4] f が重解を持たない時， 実数解は1個か5個

（ア）R_1，R_2，R_3，R_4 が 全て実数のとき．
[補足3] より，r_1，r_2，s_3，s_4 が実数としても一般性を失わない．このとき x_1 は実数．

$\overline{x_2} = \overline{\zeta^4 r_1 + \zeta^3 r_2 + \zeta^2 r_3 + \zeta r_4} = \zeta r_1 + \zeta^2 r_2 + \zeta^3 r_3 + \zeta^4 r_4 = x_5$， 同様に $\overline{x_3} = x_4$
故に，実数解が1つと複素共役な虚数解が2組ある．

（イ）r_1 と r_4，r_2 と r_3 が複素共役のとき
Galois群が C_5 のときと同様にして，x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 は全て実数．

結局，$Gal = D_5$ のタイプは（ア），
（イ）の2タイプに分かれることになる．$Gal = C_5$ の時は（イ）だけだった．
$Gal = F_{20}$ のときも（ア）と（イ）に分かれる．

他の5次方程式については，https://mixedmoss/com/Mathematica/Galois にお越しください