可解な5次方程式の厳密解を求めるプログラム　with *Mathematica* 13.3

2025 年3月 by　`mixedmoss`

---

§0. Code(初期化セル)

以下のコードを評価してください．なお，コードの評価はすぐ終わりますが，notebook全体の評価には1分程度かかります．

In[ ]:=
```
ClearAll["`*"];
```

In[ ]:=
```
galoisBase[f_,selected0_:0]:=Module[{n,rx,allsets,coef,symm,base,contents,sols,oldselected,x1,
n=Exponent[f,x];
allsets=Subsets[Range[-5,5],{n}];
vars=Take[{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10},n];
coef=CoefficientList[f,x]//Reverse//Drop[#,1]&;
symm=Table[SymmetricPolynomial[i,vars],{i,1,n}];
(*[Step1&2]while文の実行*)
sols=Table[1/v,{i,1,n}];rx=V=v;(*whileの初期値*)
selected=If[SameQ[selected0,0],RandomChoice[allsets],selected0];(*whileの初期値*)
While[
!AllTrue[Append[sols,rx],PolynomialQ[#,v]&]||Discriminant[rx,v]==0,(*「R(x)が重解を持つ」∨「rx,sol
oldselected=selected;
vs=Permutations[vars].selected;
contents=Append[symm+coef*Table[(-1)^(k-1),{k,1,n}],v-vs[[1]]];
rx=GroebnerBasis[contents,Append[vars,v]][[1]];(*原始元vを解に持つ因数分解前の式*)
V=If[IrreduciblePolynomialQ[rx],rx,Last@(List@@Factor[rx])];(*VのGroebner基底*)
sols=Table[base=GroebnerBasis[contents,{vars[[i]],v},Drop[vars,{i}]]//PolynomialMod[Last[#],V]
            vars[[i]]/.Solve[base==0,vars[[i]]][[1]]//Collect[#,v]&,{i,1,n}];
selected=RandomChoice[allsets]
];
selected=oldselected;
{V,sols}]
```

In[◦]:=
```
galoisGroup[f_,selected0_:0]:=Module[
{n,m,vsols,vs0,vs1,pos,vset,perm1,permi,irQ},
{V,sols}=galoisBase[f,selected0];
n=Exponent[f,x];
m=Exponent[V,v];
irQ=SameQ[m,Factorial[n]];(*=irreducibleQ*)
(*[Step3]V(x)の解の集合vsを,その第１要素v(=v1)の式で表す．Galois群がSnの時はバイパスしています*)
If[!irQ,vsols=v/.NSolve[V==0,v];
vs0=vs/.AssociationThread[vars→sols]//Collect[#,v]&;
vs1=vs0/.{v→vsols⟦1⟧};
pos=Table[PositionSmallest[Abs[vs1-vsols⟦i⟧]],{i,1,m}]//Flatten;
vset=vs0⟦pos⟧];
(*[Step4]Galois群を求める．Galois群がSnの時はバイパスしています*)
galoisgroup=If[irQ,Permutations[Range[n]],
   perm1=sols/.{v→vsols⟦1⟧};
   Table[
    permi=sols/.{v→vsols⟦i⟧};
    Table[PositionSmallest[Abs[permi-perm1⟦k⟧]]⟦1⟧,{k,1,n}]//Flatten,{i,1,m}]];
MatrixForm[Sort[galoisgroup]]]
```

In[◦]:=
```
$c5=Table[RotateLeft[{1,2,3,4,5},i],{i,0,4}];(*名前の衝突を避けるため，$をつけている*)
$d5=Join[$c5,$c5/.{2→5,5→2,3→4,4→3}]//Sort;
$f20=Join[$d5,$d5/.{2→3,3→5,5→4,4→2}]//Sort;
```

In[◦]:=
```
replace[gline_List,rp_List]:=(gline/.AssociationThread[Range[5]→rp])⟦rp⟧;(*ガロア群の変換*)
realRoot[p_]:=Sign[p]Abs[p]^(1/5);(*実5乗根*)
(*(r1,r2,r3,r4)がある時，(r4,r3,r1,r1),(r3,r1,r4,r2),(r2,r4,r1,r3)がもしあれば消去*)
deleteRedundancy[rsets_]:=
  Nest[RotateLeft@DeleteElements[#,{#⟦1⟧⟦{4,3,2,1}⟧,#⟦1⟧⟦{3,1,4,2}⟧,#⟦1⟧⟦{2,4,1,3}⟧}]&,rsets
```

In[◦]:=
```
solveQuintic[f_]:=Module[
{coef,delta,g,order,gal,perm,i,r0,r1,r2,r3,r4,$w1,$w2,$$w1,$$w2,$r1,$r2,$r3,$r4,a1,a2,a3,a4,t1
coef=CoefficientList[f,x]//Reverse;
delta=coef⟦2⟧/coef⟦1⟧/5;
g=f/.{x→x-delta}//Collect[#,x]&;(*x^4の係数を0にする．本来は不要なはずだが「4次の係数が0でない時」にエラーが
galoisGroup[g];
order=Length[galoisgroup];
gal=If[MemberQ[{5,10,20},order],Switch[order,5,$c5,10,$d5,20,$f20],
       Print["可解な5次方程式ではありません(It's not a solvable quintic equation)"];Break[]];
perm=Permutations[{1,2,3,4,5}];
i=1; While[Sort[replace[#,perm⟦i⟧]&/@galoisgroup]≠gal&&i≤120,perm⟦i⟧;i++];
galoisbase={x1,x2,x3,x4,x5}=sols⟦perm⟦i⟧⟧;
(*part1(前半)[変数の準備]Lagrange分解式r0~r4, t1,t2,t3,t4,w1,w2を作る *)
Clear[ξ];
r0=x1+ x2+  x3 + x4 + x5//PolynomialMod[#,V]&;
r1=x1+ξ x2+ ξ^2 x3 +ξ^3 x4 +ξ^4 x5//PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
r2=x1+ξ^2 x2+ ξ^4 x3 +ξ x4 +ξ^3 x5//PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
r3=x1+ξ^3 x2+ ξ x3 +ξ^4 x4 +ξ^2 x5//PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
r4=x1+ξ^4 x2+ ξ^3 x3 +ξ^2 x4 +ξ x5//PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
t1=r1^5+r4^5;t2=r2^5+r3^5;t3=r1*r4;t4=r2*r3;
w1=r1 r2^2+r3^2 r4;
w2=r1^2 r3+r2 r4^2;
```

```
(*part1(後半)[単純計算] 以下のk1～k7は全てF20の固定体に含まれるので,Galois群がC5,D5であっても「単純計算」で値
k1=t1+t2//PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
k2=(t1-t2)^2 //PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
k3=(t1-t2)(t3-t4)//PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
k4=t3+t4//PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
k5=t3*t4//PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
k6=w1+w2//PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
k7=(w1-w2)^2//PolynomialMod[#,{V,Cyclotomic[5,ξ]}]&;
(*part2[2次拡大(1回目)]k1~k3からt1,t2が,k4,k5からt3,t4の値が求まる. 下のtset1には{t1,t2,t3,t4}の解の１
{tset1,tset2}={$t1,$t2,$t3,$t4}/.Solve[$t1+$t2==k1&&($t1-$t2)^2==k2&&($t1-$t2)($t3-$t4)==k3&&$
(*part3[2次拡大(2回目)]R1+R4=t1,R1R4=t3^5,R2+R3=t2,R2R3=t4^5.2次方程式を解くとR1~R4が求まる*)
Rset={R1,R2,R3,R4}/.Solve[(R1+R4==tset1[[1]]&&R1 R4==tset1[[3]]^5&&R2+R3==tset1[[2]]&&R2 R3==tset1[[4]]
||(R2+R3==tset2[[1]]&&R2 R3==tset2[[3]]^5&&R2+R3==tset2[[2]]&&R2 R3==tset2[[4]]^5),{R1,R2,R3,R4}]//Simp
(*part4[5次拡大]R1~R4の5乗根をとりr1~r4が求まる.このうちw1とw2の値を満足させる組を見つける.時間節約のため 有効
{$r1,$r2,$r3,$r4}=If[Element[Rset,Reals],
 (*Rsetが実数の時*)
   rsets=realRoot/@Rset;(*これは出力にもなるので, 有効数字にしない*)
   absTable=Table[{a1,a2,a3,a4}=rsets[[i]];
  ww1=N[a1 a2^2+a4 a3^2];ww2=N[a1^2 a3+ a2 a4^2];
    Total@Abs@N[{ww1+ww2-k6,(ww1-ww2)^2-k7}],{i,1,Length[rsets]}];
     j=PositionSmallest[absTable]//First;(*|w1+w2-k6|+|(w1-w2)^2-k7|が最小となる位置を求める. なぜ
   rsets[[j]],
 (*Rsetが虚数の時*)
  ξ=Cos[2Pi/5]+I Sin[2Pi/5];(*この様に決めても一般性を失わない*)
  absTable=Table[(*absTableは実数の時と名前は同じだが, 実行時は名前がぶつかることはない*)
    a1=Rset[[i,1]]^(1/5)//N;a4=Rset[[i,4]]^(1/5)//N;(*r1は5つの5乗根の内どれをとっても良い.r4とr1は複素共
    a2set=Table[Rset[[i,2]]^(1/5)*ξ^n,{n,0,4}]//N;(*r2は5通りの5乗根を考える必要がある*)
    a3set=Table[Rset[[i,3]]^(1/5)*ξ^(-n),{n,0,4}]//N;(*r2とr3は複素共役*)
    Table[$w1=a1 a2set[[k]]^2+a4 a3set[[k]]^2;$w2=a1^2 a3set[[k]]+a4^2 a2set[[k]];
    Total@Abs@N[{$w1+$w2-k6,($w1-$w2)^2-k7}],{k,1,5}](*|$w1+$w2-k6|+|($w1-$w2)^2-k7|のTable*
    ,{i,Length[Rset]}];
  pos=FirstPosition[absTable,Min@absTable];(*|$w1+$w2-k6|+|($w1-$w2)^2-k7|が最小となる位置を求め
   m=pos//Last;j=pos//First;(*posは {2,4}のように出力される. これは「Rsetの２番目∧a2set[[4]]」を表す*)
  (*pos=PositionSmallest[Flatten[absTable]];m=Mod[pos,5],n=Quotient[pos]でも大丈夫なはずだが分かり
   {Rset[[j,1]]^(1/5),Rset[[j,2]]^(1/5)*ξ^(m-1),Rset[[j,3]]^(1/5)*ξ^(-(m-1)),Rset[[j,4]]^(1/5)}//Si
  ];(*end of if*)
(*part5[代入] r0~r4の値を代入するとx1~x5が求まる*)
ξ=Cos[2Pi/5]+I Sin[2Pi/5];(*偏角は2π/5に*)
x1=1/5($r1+$r2+ $r3+ $r4)-delta//Simplify;(*x1~x5の定義を書き直し. また本来は()内にr0を入れれば delt
x2=1/5(ξ^4$r1+ξ^3 $r2+ξ ^2 $r3+ξ $r4)-delta//Simplify;
x3=1/5(ξ^3$r1+ξ $r2+ξ^4 $r3+ξ^2$r4)-delta//Simplify;
x4=1/5(ξ^2$r1+ξ^4 $r2+ξ $r3+ξ^3 $r4)-delta//Simplify;
x5=1/5(ξ$r1+ξ^2 $r2+ξ ^3 $r3+ξ^4 $r4)-delta//Simplify;
{x1,x2,x3,x4,x5}]//Quiet
```

§1. 使用例

私の知る限り，Mathematicaでは 5 次方程式の厳密解を求めるコマンドはありません．(3次,4次は有ります) 多分SageMathでも無いと思います．彼らなら簡単に作れると思いますが「余り意味がない」或いは「需要がない」或いは「実行時間がかかるのでかっこ悪い」或いは「複素数係数でないと意味がない」と思って実装していないのだと思います．確かにそうかも知れませんが，私の様に趣味で遊んでいる人間には，最高に面白い遊び場です．使い方は, 可解かつ既約な有理数係数5次方程式 f を **solveQuintic[f]** に代入して評価するだけです．(quintic equationは 5次方程式という意味．可解な方程式は SageMath を使えばすぐ見つかります．`https://mixedmoss.com/mathematica/Galois/solvableEquations.txt` を参照.)

fの解は x1,x2,x3,x4,x5 に，Galois群は galoisgroup(リスト) に，原始元vの最小多項式はVに，fの解のvによる表現は galoisbase(リスト) に, それぞれ Global に入っています．また，以下で $R_i= r_i^5$(1≤i≤4)というのは, Lagrange 分解式r_iの5乗の事です．無視して下さっても構いません.

例1. $x^5 - 5x + 12$

In[∘]:=
```
f1 = x^5 - 5 x + 12;
solveQuintic[f1] // TraditionalForm // Timing
```

Out[∘]=

$$\Bigg\{24.0781, \Bigg\{\frac{1}{5^{2/5}}\left(-\sqrt[5]{25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}+\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}-\frac{5^{3/10}}{\sqrt[5]{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}}-\sqrt[5]{5\left(10+4\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\right)}\right), \frac{1}{4\times 5^{2/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-\frac{1}{4}\sqrt[5]{25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\frac{1}{16}\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2-\frac{5^{3/10}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^3}{64\sqrt[5]{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}}-\sqrt[5]{5\left(10+4\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\right)}\right), \frac{1}{4\times 5^{2/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}-\frac{1}{64}\sqrt[5]{25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^3-\frac{5^{3/10}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2}{16\sqrt[5]{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}}-\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\sqrt[5]{5\left(10+4\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\right)}\right),$$

$$\frac{1}{4\times 5^{2/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-\sqrt[5]{25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}+\right.$$

$$\frac{1}{64}\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^3-$$

$$\frac{5^{3/10}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)}{4\sqrt[5]{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}}-$$

$$\left.\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2\sqrt[5]{5\left(10+4\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\right)}\right),\ \frac{1}{4\times 5^{2/5}}$$

$$\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt[5]{-25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)-\right.$$

$$\frac{1}{16}\sqrt[5]{25-10\sqrt{5}+3\sqrt{125-55\sqrt{5}}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2-$$

$$\frac{5^{3/10}}{\sqrt[5]{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}}-$$

$$\left.\frac{1}{64}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^3\sqrt[5]{5\left(10+4\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{25+10\sqrt{5}+3\sqrt{125+55\sqrt{5}}}\right)}\right)\}\}$$

長いです． 虚数の累乗はないので R_i が実数のケースです． f (x1)=0 を直接確かめる事も出来ますが (FullSimplifyを2回使います)， かなり時間がかかるので近似値を比べてみます． 最初が累乗根， 次が NSolveで求めた近似解です．

In[∘]:=
```
N[{x1, x2, x3, x4, x5}] // Sort
x /. NSolve[f1 == 0, x] // Sort
```

Out[∘]=
```
{-1.84209, -0.351854 - 1.70956 i,
 -0.351854 + 1.70956 i, 1.2729 - 0.719799 i, 1.2729 + 0.719799 i}
```

Out[∘]=
```
{-1.84209, -0.351854 - 1.70956 i,
 -0.351854 + 1.70956 i, 1.2729 - 0.719799 i, 1.2729 + 0.719799 i}
```

一致します． そして実数解は1個です． Galois群を見てみましょう． 変数 galoisgroup に入っています．

In[◦]:=
```
MatrixForm[Sort[galoisgroup]]
Length[galoisgroup]
```

Out[◦]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[◦]=

10

位数が10なので Galois群は D_5です．生成元vの 最小多項式はVに，fの解をvで表した式は galoisbase に入っています．

In[◦]:=
```
V
galoisbase〚1〛 // Style[#, Small] &
```

Out[◦]=

$$12\,006\,787\,264 - 425\,822\,240\, v + 208\,402\,340\, v^2 - 27\,985\,360\, v^3 + 1\,684\,900\, v^4 - 379\,216\, v^5 + 26\,005\, v^6 - 1280\, v^7 + 270\, v^8 + v^{10}$$

Out[◦]=

$$-\frac{6\,054\,273\,944\,400\,193\,041\,844\,643}{5\,578\,128\,573\,037\,769\,007\,071\,370} - \frac{18\,283\,210\,043\,537\,510\,172\,982\,556\, v}{450\,898\,726\,320\,552\,994\,738\,269\,075} - \frac{848\,741\,284\,056\,283\,693\,857\,990\,269\, v^2}{43\,286\,277\,726\,773\,087\,494\,873\,831\,200} + \frac{48\,990\,590\,210\,291\,066\,909\,789\, v^3}{16\,699\,952\,826\,687\,147\,953\,269\,225} - \frac{20\,298\,278\,273\,199\,799\,074\,739\,199\, v^4}{86\,572\,555\,453\,546\,174\,989\,747\,662\,400} + \frac{201\,135\,113\,171\,765\,712\,808\,543\, v^5}{8\,657\,255\,545\,354\,617\,498\,974\,766\,240} - \frac{3\,610\,975\,086\,580\,336\,739\,677\, v^6}{1\,803\,594\,905\,282\,211\,978\,953\,076\,300} + \frac{3\,024\,539\,482\,009\,844\,367\,259\, v^7}{21\,643\,138\,863\,386\,543\,747\,436\,915\,600} - \frac{7\,748\,248\,475\,891\,441\,971\, v^8}{892\,500\,571\,686\,043\,041\,131\,419\,200} + \frac{20\,177\,530\,786\,520\,629\,859\, v^9}{43\,286\,277\,726\,773\,087\,494\,873\,831\,200}$$

■ 例2. $x^5 - 3$

In[◦]:=
```
f2 = x^5 - 3;
solveQuintic[f2] // TraditionalForm // Timing
```

Out[◦]=

$$\left\{2.,\ \left\{\sqrt[5]{3},\ \frac{1}{16}\sqrt[5]{3}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2,\ \frac{1}{256}\sqrt[5]{3}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^4,\ \frac{1}{4}\sqrt[5]{3}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right),\ \frac{1}{64}\sqrt[5]{3}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^3\right\}\right\}$$

Gal = F_{20}の中では基本中の基本の方程式です．R_i が実数のケースです. 近似値を比較します.

In[◦]:=
```
N@{x1, x2, x3, x4, x5} // Sort
x /. NSolve[f2 == 0, x] // Sort
```

Out[◦]=

{-1.00782 - 0.732222 i, -1.00782 + 0.732222 i, 0.384952 - 1.18476 i, 0.384952 + 1.18476 i, 1.24573}

Out[◦]=

{-1.00782 - 0.732222 i, -1.00782 + 0.732222 i, 0.384952 - 1.18476 i, 0.384952 + 1.18476 i, 1.24573}

■ 例3. $x^5 - 11x^3 - 10x^2 + 11x + 10$

In[∘]:=
```
f3 = x^5 - 11 x^3 - 10 x^2 + 11 x + 10;
solveQuintic[f3] // TraditionalForm // Timing
```

Out[∘]=

$$
\Bigg\{29.,\ \Bigg\{\frac{1}{\sqrt[5]{2}\,5^{4/5}}\left(\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}+\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}+\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}+\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\right),
$$

$$
\frac{1}{4\sqrt[5]{2}\,5^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\Bigg(\frac{1}{4}\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\frac{1}{16}\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2+\frac{1}{64}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^3\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}+\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\Bigg),
$$

$$
\frac{1}{4\sqrt[5]{2}\,5^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\Bigg(\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}+\frac{1}{64}\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^3+\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\Bigg),
$$

$$
\frac{1}{4\sqrt[5]{2}\,5^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\Bigg(\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}+\frac{1}{64}\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^3+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}+\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\Bigg),
$$

$$
\frac{1}{4\sqrt[5]{2}\,5^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\Bigg(\frac{1}{4}\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\frac{1}{16}\sqrt[5]{-2275+1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525-682\sqrt{5}\right)}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2+\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}-2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}+\frac{1}{64}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^3\sqrt[5]{-2275-1055\sqrt{5}+2\,i\sqrt{1093\left(1525+682\sqrt{5}\right)}}\Bigg)\Bigg\}\Bigg\}
$$

Gal = D_5 かつ虚数の5乗根があるのでR_i が虚数の場合です． 虚数5乗根を使ってるためか, かなり時間がかかりました.

虚数5乗根の定義はMathematicaでは「$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$) のとき, $\sqrt[5]{z} = z^{1/5} = r^{1/5}(\cos(\theta/5) + i\sin(\theta/5))$」だと思います. 3 乗根の例では,

In[∘]:=
```
Abs@{(-1 - I) ^ (1 / 3), ∛(-1 - I)}
Arg@{(-1 - I) ^ (1 / 3), ∛(-1 - I)}
```

Out[∘]=

$\{2^{1/6}, 2^{1/6}\}$

Out[∘]=

$\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\}$

となります. 次に, 近似値を比較します.

In[∘]:=
```
N[{x1, x2, x3, x4, x5}] // Sort
x /. NSolve[f3 == 0, x] // Sort
```

Out[∘]=

$\{-2.3504 + 1.06681 \times 10^{-16}\, i, -1.42891 + 1.60022 \times 10^{-16}\, i, -0.813416 + 2.66703 \times 10^{-17}\, i, 1.0264 + 0.\, i, 3.56632 + 0.\, i\}$

Out[∘]=

{-2.3504, -1.42891, -0.813416, 1.0264, 3.56632}

小さな虚部が邪魔なので消します.

In[∘]:=
```
trim[x_] := If[Abs[Im[N[x]]] < 10^(-15), Re[N[x]], N[x]]
(trim /@ {x1, x2, x3, x4, x5}) // Sort
```

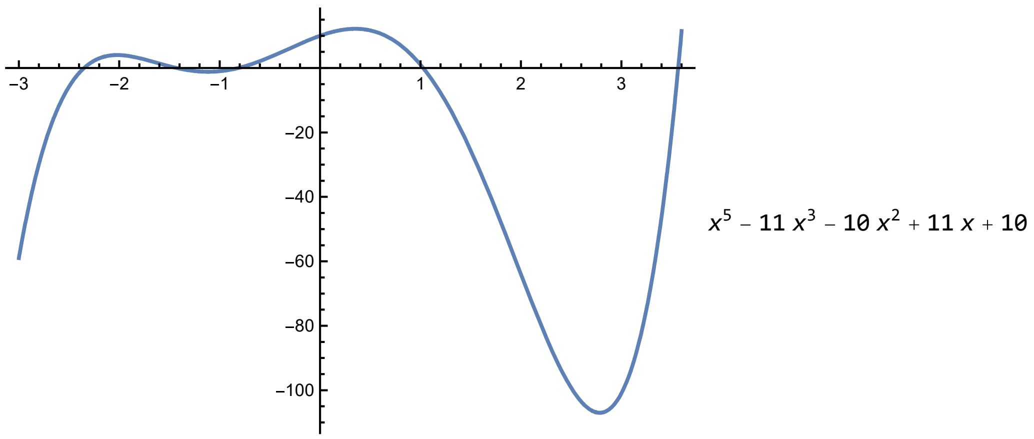
Out[∘]=

{-2.3504, -1.42891, -0.813416, 1.0264, 3.56632}

実数解5個です. 一般にR_iが虚数なら実数解は5個, R_iが実数なら実数解は1個となります. 念の為, グラフも描いてみると,

In[∘]:=
```
Plot[f3, {x, -3, 3.6}, PlotLegends → f3]
```

Out[∘]=



§2.　プログラムの解説

2 - 1. プログラムの構造

Galois群が F_{20}, D_5, C_5 のいずれにも対応するように作りましたが，3種類のプログラムを一緒にしたわけではなく，F_{20} に対するプログラムが元になっています．下の様な構造になります．

$$\text{入力} \xrightarrow{\text{[コマンド] galoisGroup}} \text{Galois群}$$
$$\xrightarrow{\text{[Step0] 解の置換}} \text{整形されたGalois群}$$
$$\xrightarrow{\text{[Step1] 単純計算}} F_{20}\ \text{の固定体に属する変数}\ k_1 \sim k_7$$
$$\xrightarrow{\text{[Step2] 2 次方程式を解く}} D_5\ \text{の固定体に属する変数}\ t_1 \sim t_4$$
$$\xrightarrow{\text{[Step3] 2 次方程式を解く}} C_5\ \text{の固定体に属する変数}\ R_1 \sim R_4$$
$$\xrightarrow{\text{[Step4] 5 乗根を求める}} r_1 \sim r_4$$
$$\xrightarrow{\text{[Step5] 単純代入}} x_1 \sim x_5$$

2 - 2.簡単な説明

$R_1 = r_1{}^5, R_2 = r_2{}^5, R_3 = r_3{}^5, R_4 = r_4{}^5$ (r_iはLagrange の分解式)
と置いています．また「単純計算」というのは「単純に$x_i = x_i(v)$(vは原始元) を代入し，円分多項式と最小多項式VのMod を考えるだけの計算」の意味です．この計算はMathematicaでは PolynomialMod というコマンドを使い，非常に速く実行できます．

「F_{20} に対するプログラムが元になっている」というのは，例えば Galois群がC_5の方程式の場合，R_1~R_4なら「単純計算」で求まります．Galois群がD_5の方程式の場合は t_1~ t_4 なら「単純計算」で求まります．(t_1~ t_4 の定義は「solveQuintic」の コード part1 を御覧ください．) そして R_1~R_4は「t_1~ t_4の値を使った2次方程式を１回解く」で求まります．一方 Galois群が F_{20}の方程式の場合は，t_1~ t_4を求めるのにも2次方程式が必要で，R_1~R_4を求めるのに更にもう一度必要です．しかしMathematicaにとって「2次方程式を2回解くこと」は朝飯前です．　したがって C_5や D_5 の場合でも F_{20}の場合と同様に解くほうが，プログラムが一つにまとまって楽です．

しかしその場合でも「[Step4] R_iの5乗根 r_i を求める」に於いて，

(ア)R_1~R_4 が実数　　　(イ)R_1とR_4，R_2とR_3 が複素共役 (r_1とr_4，r_2とr_3が複素共役)

の2つの場合分けが必要になります．そして(ア)の場合は「r_1~r_4が全て実数としても一般性を失わない事」(D5_solutions.nb「補足」)，(イ)の場合は「r_1 を R_1の任意の5乗根にとっても一般性を失わない事」(参考文献「可解な5次方程式について」) が非常に役立ちました．

さらに Galois群の変換を最初に行っています．仮にGalois群がF_{20}であったとしても，それは同型という意味で，それでは不十分です．$F_{20} = <(1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 5, 4)>$ に「完全に」一致させたいわけです．うまいことにGalois群は 解x1,x2,x3,x4,x5の変換によって変えることができ，それを使って F_{20}に完全に一致させることが出来ます．　例えば (x^5-3)のGalois群Galを求めてみましょう．コマンド「galoisGroup」を使います．(毎回評

価するたびにGalois群が変わっては困るので，vの係数を指定しています.)

In[∘]:=
```
galoisGroup[x^5 - 3, {1, 2, 3, 4, 5}] // Style[#, Small] &
```

Out[∘]=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

これは F_{20} と同型ですが，完全に一致している訳ではありません．ここで解の置換を行います．

例えば2行目 [1 3 2 5 4] で表される変換 $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ は，

「x3 → x5, x5 → x3」という置換λ によって，次のように変わります．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \overset{\lambda}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3, 5, 4)^2$$

[1 3 2 5 4] が F_{20} の要素 [1 5 4 3 2] に移りました．この変換は次のコードで実行できます．

In[∘]:=
```
replace[gline_List,rp_List]:=(gline/.AssociationThread[Range[5]→rp])⟦rp⟧;
```

たとえば上の変換はこの様になります．

In[∘]:=
```
λ = {1, 2, 5, 4, 3};  replace[{1, 3, 2, 5, 4}, λ]
```

Out[∘]=
```
{1, 5, 4, 3, 2}
```

これを使いGalois群が F_{20} と一致するまで，解を片っ端から置換しています．
実は，この例では λでGalを移すと F_{20} と一致します．

In[∘]:=
```
(replace[#, λ] & /@ galoisgroup) // Sort
% == $f20
```

Out[∘]=
```
{{1, 2, 3, 4, 5}, {1, 3, 5, 2, 4}, {1, 4, 2, 5, 3}, {1, 5, 4, 3, 2}, {2, 1, 5, 4, 3},
 {2, 3, 4, 5, 1}, {2, 4, 1, 3, 5}, {2, 5, 3, 1, 4}, {3, 1, 4, 2, 5}, {3, 2, 1, 5, 4},
 {3, 4, 5, 1, 2}, {3, 5, 2, 4, 1}, {4, 1, 3, 5, 2}, {4, 2, 5, 3, 1}, {4, 3, 2, 1, 5},
 {4, 5, 1, 2, 3}, {5, 1, 2, 3, 4}, {5, 2, 4, 1, 3}, {5, 3, 1, 4, 2}, {5, 4, 3, 2, 1}}
```

Out[∘]=
```
True
```

galoisbase にはこの様に置換された解のリストが入っています．（元の解の方は solsです．）

§3. 補足

3-1. 使用上の注意

申し訳ないですが，まだまだ完全ではないと恐れています．予測しないエラーが時々出ます．

原因の一つは「有効数字の取り扱い」です．例えば

list={12.7279, 18.1817, 14.1421, 5.45378, 20.6312, 9.31749, 13.7632, 17.1464, 16.2127, 4.89898, 18.5606, 1.03528, 16.5916, 3.00429, 17.6269, 6.31319, 4.41851, 3.8637, 22.0454, 10.7317, 21.0101, 1.41421, 8.28221, 1.02141×10^{-14}}

の中から最も0に近いPositionを得るのに PositionSmallest と Position&Min(リストのリストのとき）を使っていますが，まれに「内部精度限界$MaxExtraPrecision = 50.` に達しました」というエラーが出て困ります．

もう１つの問題は「名前の衝突」です．私自身も動作確認時に f20,c5,d5などの変数をうっかり使用してしまい，半日ぐらいハマってしまいました．ご注意下さい．できる限り Module の内部変数に入れてGlobal変数を減らすようにしていますが，入れすぎるとプログラムが読みづらくなるので難しいです．

今回solveQuintic を使って800問以上の5次方程式を解きましたが，全て, 近似値は「NSolve」を使って得た結果と一致しました．「ある程度は」信用してくださって良いと思います．(もし「NSolve」と近似が一致しない解が出力された場合は，こちらまでお知らせ頂けると有り難いです．）また最初に平行移動して「x^4の係数を0」としていますが，数学的にはこれは全く不要です．しかしなぜか「x^4の係数が0でない時」にエラーが多かったので，その様にプログラムしました．しかしこれは GaloisGroupProgram.nb を修正する前だったので，今は問題ないかも知れません．実行時間には影響ないので直していません.

3 - 2. 他のコード

このノートブックのコードを評価すると，solveQuintic 以外に galoisBase，galoisGroup などのコードも評価されます．これらのコードについては `gettingIntoTheProgram.nb` をご覧ください.

3 - 3. 数学的な性質

Q係数の既約可解5次方程式について，次の性質が成り立ちます．

[1]「R_1, R_2, R_3, R_4 は全て実数」または
「R_1 とR_4, R_2 とR_3 は複素共役 」（証明は D5_solution.nb「補足」と同様)

[2] Gal = C_5 のときはfは実数解を5個持つ.Gal = D_5 または F_{20} のときは実数解は1個または5個.
即ち，実数解は1個か5個となる．３ 個の実数解を持つことはない．（[1] からすぐ言えます)

なお，参考文献[1] によると「Q係数の既約可解5次方程式 x^5+ax+b=0 は実数解をただ一つ持つ」(定理5.4)が言えます．

具体例や，
より詳しい説明については https://mixedmoss.com/mathematica/Galois にお越しください