x^5 + 15 x + 12 の厳密解 with *Mathematica* 13.3

part2. Galois群がF_{20} の方程式　　2025 年2月 by mixedmoss

§0. [準備] 原始元, 分解方程式, ガロア群

part1 より，輸入

In[2175]:=

```
ClearAll["`*"]; f[x_] = x^5 + 15 x + 12;
```

f(x)=0 の解を x1, x2, x3, x4, x5 (part2 では, α,β... などの代わりに x1,x2,...を利用する). f(x) の原始元をv = x1+ 4 x2 + 3 x3 + 2 x4 + 5 x5 , vの最小多項式をV[x] とすると

In[2176]:=

```
{x1, x2, x3, x4, x5} =
  {(-861 938 718 370 242 204 295 608 211 266 295 749 515 640 000 000 - 684 433 253 827 819 307 591 593 725 116 638 734 918 408 000 000 v +
      56 453 863 409 949 377 565 172 037 271 904 795 583 245 800 000 v^2 + 19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 -
      7 978 466 780 980 478 967 648 684 319 768 154 297 604 375 000 v^4 - 1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 +
      454 647 992 046 551 629 938 068 763 322 137 557 640 847 500 v^6 + 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 -
      13 776 327 979 571 728 133 852 521 864 693 297 147 931 250 v^8 + 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 -
      82 512 570 458 629 569 770 475 904 931 084 945 494 875 v^10 - 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 +
      4 797 148 900 075 425 726 389 295 085 994 209 777 500 v^12 - 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 +
      101 218 323 101 025 844 900 848 255 798 867 235 650 v^14 + 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 -
      733 123 275 960 863 452 231 815 446 003 913 250 v^16 + 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 -
      24 177 861 079 325 177 445 822 443 717 163 795 v^18 + 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
    2 041 681 628 667 118 655 087 624 863 780 198 236 925 920 000 000,
   (288 962 986 598 211 429 293 764 452 721 718 394 637 080 000 000 - 174 012 846 661 039 643 819 687 509 171 589 175 686 928 000 000 v -
      60 001 378 726 542 522 459 935 163 913 547 847 315 185 400 000 v^2 + 19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 +
      6 580 063 880 550 445 698 229 626 882 944 152 376 275 125 000 v^4 - 1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 -
      316 671 295 975 123 912 024 987 067 169 784 443 651 517 500 v^6 + 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 +
      6 067 999 698 672 491 109 590 008 894 958 502 641 868 750 v^8 + 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 +
      96 204 031 481 264 240 681 635 473 494 882 788 795 875 v^10 - 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 -
      1 239 924 706 348 598 058 510 108 525 628 473 142 500 v^12 - 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 -
      55 503 894 727 181 654 479 874 499 299 363 568 450 v^14 + 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 +
      49 098 725 383 619 996 457 776 558 599 182 750 v^16 + 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 +
      10 156 737 918 838 949 953 161 614 612 963 835 v^18 + 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
    1 020 840 814 333 559 327 543 812 431 890 099 118 462 960 000 000,
   (17 682 965 821 657 195 956 640 032 738 346 434 240 000 + 3 956 628 498 066 676 567 522 910 744 266 347 000 000 v^2 -
      322 616 275 388 652 119 062 693 539 383 779 437 000 v^4 + 11 125 734 870 376 676 599 102 217 027 958 772 500 v^6 +
      102 128 776 784 474 922 892 498 560 974 779 050 v^8 - 6 842 221 945 748 661 717 492 745 300 989 525 v^10 -
      144 277 777 424 300 821 652 509 703 231 340 v^12 + 609 503 629 255 743 300 863 141 717 310 v^14 + 39 531 224 767 096 432 236 733 301 402 v^16 +
      240 601 146 642 007 769 540 230 179 v^18) / 63 558 743 528 095 155 461 086 764 482 499 108 480 000,
   (288 962 986 598 211 429 293 764 452 721 718 394 637 080 000 000 + 174 012 846 661 039 643 819 687 509 171 589 175 686 928 000 000 v -
      60 001 378 726 542 522 459 935 163 913 547 847 315 185 400 000 v^2 - 19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 +
      6 580 063 880 550 445 698 229 626 882 944 152 376 275 125 000 v^4 + 1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 -
      316 671 295 975 123 912 024 987 067 169 784 443 651 517 500 v^6 - 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 +
      6 067 999 698 672 491 109 590 008 894 958 502 641 868 750 v^8 - 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 +
      96 204 031 481 264 240 681 635 473 494 882 788 795 875 v^10 + 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 -
      1 239 924 706 348 598 058 510 108 525 628 473 142 500 v^12 + 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 -
      55 503 894 727 181 654 479 874 499 299 363 568 450 v^14 - 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 +
      49 098 725 383 619 996 457 776 558 599 182 750 v^16 - 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 +
      10 156 737 918 838 949 953 161 614 612 963 835 v^18 - 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
    1 020 840 814 333 559 327 543 812 431 890 099 118 462 960 000 000,
   (-861 938 718 370 242 204 295 608 211 266 295 749 515 640 000 000 + 684 433 253 827 819 307 591 593 725 116 638 734 918 408 000 000 v +
      56 453 863 409 949 377 565 172 037 271 904 795 583 245 800 000 v^2 - 19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 -
      7 978 466 780 980 478 967 648 684 319 768 154 297 604 375 000 v^4 + 1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 +
      454 647 992 046 551 629 938 068 763 322 137 557 640 847 500 v^6 - 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 -
      13 776 327 979 571 728 133 852 521 864 693 297 147 931 250 v^8 - 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 -
      82 512 570 458 629 569 770 475 904 931 084 945 494 875 v^10 + 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 +
      4 797 148 900 075 425 726 389 295 085 994 209 777 500 v^12 + 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 +
      101 218 323 101 025 844 900 848 255 798 867 235 650 v^14 - 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 -
      733 123 275 960 863 452 231 815 446 003 913 250 v^16 - 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 -
      24 177 861 079 325 177 445 822 443 717 163 795 v^18 - 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
    2 041 681 628 667 118 655 087 624 863 780 198 236 925 920 000 000};
```

In[2177]:=

```
V[x_] = 2 371 842 000 000 000 + 79 290 090 000 000 x^2 - 10 682 052 390 000 x^4 +
   850 670 100 000 x^6 - 34 046 433 000 x^8 + 523 980 000 x^10 + 9 587 025 x^12 - 90 000 x^14 - 5370 x^16 + x^20;
```

f(x) のガロア群を Gal とすると，現代の表記では

Gal={*Id*, (2,4,5,3), (2,3,5,4), (2,5)(3,4), (1,2)(3,5), (1,5,4,3,2),
(1,3,4,2), (1,4,5,2), (1,2,4,3), (1,3)(4,5), (1,4,2,5,3), (1,5,2,3), (1,2,5,4),
(1,5,3,4), (1,4)(2,3), (1,3,5,2,4), (1,2,3,4,5), (1,4,3,5), (1,3,2,5), (1,5)(2,4)}

ここで$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\tau = (2, 3, 4, 5)$ とおくと

gal={Id, τ^3, τ, τ^2, $\tau^2 \sigma^4$, σ^4,$\tau^3 \sigma^4$,$\tau \sigma^4$,$\tau^2 \sigma^3$, σ^3, $\tau^3 \sigma^3$,$\tau^3 \sigma^2$,$\tau \sigma^2$, $\tau^2 \sigma^2$, σ^2, σ, $\tau^3 \sigma$,$\tau \sigma$,τ^2
σ}=$<\tau,\sigma> \simeq C_4 C_5$

このように $C_4\,C_5$ の形で書ける群を F_{20}（Frobenius group）というらしい.
分解列は　$F_{20} \triangleright D_5 \triangleright C_5 \triangleright \{Id\}$
ただし C_n は巡回群，D_n は2面体群で
$C_5 = <\sigma>$, $D_5 = C_5 + \tau^2\,C_5$
$F_{20} = D_5 + \tau\,D_5 = C_5 + \tau\,C_5 + \tau^2\,C_5 + \tau^3\,C_5 \simeq C_4\,C_5$

§ 1 .Lagrange分解式 s1,s2,s3,s4 の5乗の値を求める

1-1. Lagrange分解式

$C_5 \triangleright$\{Id\}の部分に注目し，ラグランジュの5次分解式をつくる .(ζは1の原始 5 乗根のひとつ.)
このとき，V(v)と円分方程式 $v^4+v^3+v^2+v+1$ で割った余りを考える.（PolynomialMod)

In[2178]:=
```
s0 = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 // PolynomialMod[#, V[v]] &;
s1 =
  x1 + ξ x2 + ξ^2 x3 + ξ^3 x4 + ξ^4 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
s2 = x1 + ξ^2 x2 + ξ^4 x3 + ξ x4 + ξ^3 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
s3 = x1 + ξ^3 x2 + ξ x3 + ξ^4 x4 + ξ^2 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
s4 = x1 + ξ^4 x2 + ξ^3 x3 + ξ^2 x4 + ξ x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
```

解と係数の関係より s0 = 0.　また以下の性質が成り立つ.

(#) $\begin{cases} \text{s1を}\sigma\text{で移すと s1} \to \zeta^4\,\text{s1}, & \tau\text{で移すと s1} \to \text{s3}, \tau^2\text{ で移すと s1} \to \text{s4}, \\ \text{s2を}\sigma\text{で移すと s2} \to \zeta^3\,\text{s2}, & \tau\text{で移すと s2} \to \text{s1}, \tau^2\text{ で移すと s2} \to \text{s3}, \\ \text{s3を}\sigma\text{で移すと s3} \to \zeta^2\,\text{s3}, & \tau\text{で移すと s3} \to \text{s4}, \tau^2\text{ で移すと s3} \to \text{s2}, \\ \text{s4を}\sigma\text{で移すと s4} \to \zeta\,\text{s4}, & \tau\text{で移すと s4} \to \text{s2}, \tau^2\text{ で移すと s4} \to \text{s1}, \end{cases}$

τは 分解式を「s1→s3→s4→s2→s1」のように移し，σは「s1 → ξ^4 s1→ → ξ^3 s1→ → ξ^2 s1 → ξ s1 → s1」のように移す.
さらに 同型写像 μ: $\zeta \to \zeta^3$ とすると，分解式は次のように移る. μはτと同じように分解式を移す.
(by μ) s1→s3→s4→s2 →s1⋯　　(by μ^2) s1↔s4,　s2↔s3

1-2. t1=s1^5 + s4^5, t2=s2^5 + s3^5, t3 = s1^5 s4^5, t4 = s2^5 s3^5 の値を求める

t1=s1^5 + s4^5, t2=s2^5 + s3^5,t3=s1s4, t4=s2s3 とおく.（#)より t1,t2,t3,t4は σとτ^2で不変. 故に t1,t2,t3,t4は D_5で不変. さらに τ により t1↔t2 かつ t3↔t4 であるから，(t1 + t2),（t1 – t2)^2, (t1-t2)(t3-t4), (t3+t4), (t3*t4) はτで不変で，$F_{20} = D_5+\tau D_5$ だから, これらは F_{20} で不変. 故に Q(ζ)に入る. 「単純計算」すると,

In[2183]:=

```
t1 = s1^5 + s4^5; t2 = s2^5 + s3^5; t3 = s1 * s4; t4 = s2 * s3;

t1 + t2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
(t1 - t2)^2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
(t1 - t2) (t3 - t4) // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
t3 + t4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
t3 * t4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
```

Out[2184]=
7500

Out[2185]=
225 000 000

Out[2186]=
-450 000

Out[2187]=
0

Out[2188]=
-225

$\sqrt{225\,000\,000} = 15\,000$ だから，　上の計算より

$$\begin{cases} t1 - t2 & = \pm 15\,000 \\ t1 + t2 & = 7500 \\ (t3,\ t4) & = (\pm 15,\ \mp 15)\ \text{(複号同順)} \\ (t1 - t2)(t3 - t4) & < 0 \end{cases}$$

故に $(t1,\ t2,\ t3^5,\ t4^5) =$

$(s1^5 + s4^5,\ s2^5 + s3^5,\ s1^5\,s4^5,\ s2^5\,s3^5) = (11\,250,\ -3750,\ -759\,375,\ 759\,375)$

または $(-3750,\ 11\,250,\ 759\,375,\ -759\,375)$ − (1)

【ひとりごと】Galois群がC_5のときは「単純計算」で $s_1{}^5$,$s_2{}^5$,$s_3{}^5$,$s_4{}^5$が求まった.(Q(ζ)に入っていた).
D_5のときは「単純計算」で $(s_1{}^5+s_4{}^5)$,$(s_2{}^5+s_3{}^5)$,s_1s_4,s_2s_3が求まった.(Q(ζ)に入っていた). これから２次方程式を作ることにより $s_1{}^5$,$s_2{}^5$,$s_3{}^5$,$s_4{}^5$が $Q(\zeta)+\sqrt{Q(\zeta)}$ の形で求まった.
（正式な書き方では無いです. さらに5乗根を取ると s_1,s_2,s_3,s_4と x_1,x_2,x_3,x_4が求まる)
この F_{20}の例では$s_1{}^5$,$s_2{}^5$,$s_3{}^5$,$s_4{}^5$がたまたま有理数となっていますが，これは偶然だと思います. 一般には t_1= $s_1{}^5$+$s_4{}^5$, t_2= $s_2{}^5$+$s_3{}^5$ は「単純計算」では求まりません.
「単純計算」で求まるのは $(t_1-t_2)^2$と (t_1+t_2) だから，t_1とt_2 が既に $Q(\zeta)+\sqrt{Q(\zeta)}$ の形になっています．そこから更に２次方程式を解くので $s_1{}^5$,$s_2{}^5$,$s_3{}^5$,$s_4{}^5$は　$Q(\zeta)+\sqrt{Q(\zeta)}+\sqrt{Q(\zeta)+\sqrt{Q(\zeta)}}$ の形になっているはずです.

1-3. $s1^5$, $s2^5$, $s3^5$, $s4^5$ の値を求める

$p = s1^5,\ q = s2^5,\ r = s3^5,\ s = s4^5$ とおくと (1) より，（ア）または（イ）のいずれか

(ア) $\begin{cases} p+s & =11\,250 \\ ps & =-759\,375 \end{cases}$ かつ $\begin{cases} q+r & =-3750 \\ qr & =759\,375 \end{cases}$ (イ) $\begin{cases} p+s & =-3750 \\ ps & =759\,375 \end{cases}$ かつ $\begin{cases} q+r & =11\,250 \\ qr & =-759\,375 \end{cases}$

pとs, qとrを解に持つ2次方程式を作って解けば, p,q,r,sが求まる．ここではSolve で一度に求め[pqrs]に入

れる.

In[2189]:=

```
pqrs =
 {p, q, r, s} /. Solve[(p + s == 11 250 && p s == -759 375 && q + r == -3750 && q r == 759 375) ||
     (p + s == -3750 && p s == 759 375 && q + r == 11 250 && q r == -759 375), {p,
    q, r, s}] // Simplify
```

Out[2189]=

$$\{\{225(25-8\sqrt{10}), -75(25+7\sqrt{10}), 75(-25+7\sqrt{10}), 225(25+8\sqrt{10})\},$$
$$\{225(25-8\sqrt{10}), 75(-25+7\sqrt{10}), -75(25+7\sqrt{10}), 225(25+8\sqrt{10})\},$$
$$\{-75(25+7\sqrt{10}), 225(25-8\sqrt{10}), 225(25+8\sqrt{10}), 75(-25+7\sqrt{10})\},$$
$$\{-75(25+7\sqrt{10}), 225(25+8\sqrt{10}), 225(25-8\sqrt{10}), 75(-25+7\sqrt{10})\},$$
$$\{75(-25+7\sqrt{10}), 225(25-8\sqrt{10}), 225(25+8\sqrt{10}), -75(25+7\sqrt{10})\},$$
$$\{75(-25+7\sqrt{10}), 225(25+8\sqrt{10}), 225(25-8\sqrt{10}), -75(25+7\sqrt{10})\},$$
$$\{225(25+8\sqrt{10}), -75(25+7\sqrt{10}), 75(-25+7\sqrt{10}), 225(25-8\sqrt{10})\},$$
$$\{225(25+8\sqrt{10}), 75(-25+7\sqrt{10}), -75(25+7\sqrt{10}), 225(25-8\sqrt{10})\}\}$$

---

§2. ($s1\, s2^2+s3^2\, s4$)と($s1^2\, s3+s2\, s4^2$) の値を考慮し s1,s2,s3,s4 の値を求める

($s1^5$, $s2^5$, $s3^5$, $s4^5$) の値は 8組あるがこれらは順序が異なっているだけで, 先頭の順序を(p,q,r,s)と改めておいた時, (p,q,r,s),(p,r,q,s),(s,q,r,p),(s,r,q,p)と(q,p,s,r),(q,s,p,r),(r,p,s,q),(r,s,p,q)の8通りとなる. ここで s0,s1,s2,s3,s4の定義とs0=0から

$$(\#\#)\begin{cases} x1 & = 1/5\,(s1+s2+s3+s4) \\ x2 & = 1/5\left(\zeta^4\, s1+\zeta^3\, s2+\zeta^2\, s3+\zeta\, s4\right) \\ x3 & = 1/5\left(\zeta^3\, s1+\zeta\, s2+\zeta^4\, s3+\zeta^2\, s4\right) \\ x4 & = 1/5\left(\zeta^2\, s1+\zeta^4\, s2+\zeta\, s3+\zeta^3\, s4\right) \\ x5 & = 1/5\left(\zeta\, s1+\zeta^2\, s2+\zeta^3\, s3+\zeta^4\, s4\right) \end{cases}$$

$w1=s1\, s2^2+s3^2\, s4$, $w2=s1^2\, s3+s2\, s4^2$とおく. w1とw2 は σとτ^2 で変わらないので, D_5 の固定体に入る. さらに w1 と w2は τ によって, それぞれ w2 と w1 に入れ替わる. 故に w1+w2 と $(w1 - w2)^2$ は F_{20} の固定体Q(ζ) に入る. 「単純計算」して

In[2190]:=

```
w1 = s1 s2^2 + s3^2 s4; w2 = s1^2 s3 + s2 s4^2;
w1 + w2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
(w1 - w2)^2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
```

Out[2191]=

0

Out[2192]=

90 000

上の計算より $w1 + w2 = 0$ かつ $(w1 - w2)^2 = 900$ だから,

$$(w1,\ w2) = \left(s1\, s2^2 + s3^2\, s4,\ \ s1^2\, s3 + s2\, s4^2\right) = (\pm 150,\ \mp 150)\ \left(\text{複号同順}\right)\ \text{--}(2)$$

「$s_1{}^5$, $s_2{}^5$, $s_3{}^5$, $s_4{}^5$ が全て実数のときは，s_1，
s_2, s_3, s_4 が全て実数と仮定しても一般性を失わない」（補足3）故に
$\left(s1^5,\ s2^5,\ s3^5,\ s4^5\right)$ の値の 8 組から（s_1, s_2, s_3, s_4）の組が8組求まり，
そのうち（2）を満たすものを見つけると次の 4 組となる.

In[2193]:=

```
realRoot[p_] := Sign[p] Abs[p]^(1/5) (*実数に対し5乗根を求めるコマンドを作成*)
realRoot /@ pqrs;
s1s2s3s4 = Select[%, (FullSimplify[#[[1]] * #[[2]]^2 + #[[3]]^2 * #[[4]]] == 150 &&
      FullSimplify[#[[1]]^2 * #[[3]] + #[[2]] * #[[4]]^2] == -150) ||
    FullSimplify[#[[1]] * #[[2]]^2 + #[[3]]^2 * #[[4]]] == -150 &&
     FullSimplify[#[[1]]^2 * #[[3]] + #[[2]] * #[[4]]^2] == 150 &]
```

Out[2195]=

$$\left\{\left\{-15^{2/5}\left(-25+8\sqrt{10}\right)^{1/5},\ -5^{2/5}\left(3\left(25-7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5},\ -5^{2/5}\left(3\left(25+7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5},\ 15^{2/5}\left(25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}\right\},\ \left\{-5^{2/5}\left(3\left(25+7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5},\ -15^{2/5}\left(-25+8\sqrt{10}\right)^{1/5},\ 15^{2/5}\left(25+8\sqrt{10}\right)^{1/5},\ -5^{2/5}\left(3\left(25-7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5}\right\},\ \left\{-5^{2/5}\left(3\left(25-7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5},\ 15^{2/5}\left(25+8\sqrt{10}\right)^{1/5},\ -15^{2/5}\left(-25+8\sqrt{10}\right)^{1/5},\ -5^{2/5}\left(3\left(25+7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5}\right\},\ \left\{15^{2/5}\left(25+8\sqrt{10}\right)^{1/5},\ -5^{2/5}\left(3\left(25+7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5},\ -5^{2/5}\left(3\left(25-7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5},\ -15^{2/5}\left(-25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}\right\}\right\}$$

§3.　x1,x2,x3,x4,x5 の値を求める

これらの 4 組の先頭の解を {s1, s2,s3,s4}とおくと，　置換 τ により s1→s3→s4→s2 と移るので{s1, s2,s3,s4}, {s3,s1,s4,s2}, {s4,s3,s2,s1} ,{s2,s4,s1,s3}, は{x2,x3,x4,x5}の順序を変えるだけ．　従って上の 4 つの{s1, s2,s3,s4}の値は同じ解集合を与える．（このことから §1の(p,q,r,s)の8組の解は実質2種類で，§2でその内の一つを選んだだけということも分かる．）　故に{s1, s2,s3,s4}として先頭の解を選んでよい．これから方程式の解 x1’,x2’..は次の様に求まる.

(このセルはとてもバグりやすいです．その場合は「評価を放棄」し「このセルのみ評価」して下さい)

In[2196]:=

```
{s1', s2', s3', s4'} = s1s2s3s4[[1]];
ξ = Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5]; (*偏角は2π/5に設定*)

x1' = 1 / 5 (s1' + s2' + s3' + s4') // Simplify
x2' = 1 / 5 (ξ^4 s1' + ξ^3 s2' + ξ ^2 s3' + ξ s4') // Simplify
x3' = 1 / 5 (ξ^3 s1' + ξ s2' + ξ^4 s3' + ξ^2 s4') // Simplify
x4' = 1 / 5 (ξ^2 s1' + ξ^4 s2' + ξ s3' + ξ^3 s4') // Simplify
x5' = 1 / 5 (ξ s1' + ξ^2 s2' + ξ ^3 s3' + ξ^4 s4') // Simplify
```

Out[2198]=

$$-\frac{3^{1/5}\left(\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}+\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}+\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}-\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\right)}{5^{3/5}}$$

Out[2199]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\\ \left(8\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}-2\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\right.\\ \left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2+2\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\\ \left.\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2+2\sqrt{5}-i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

Out[2200]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\\ \left(-8i\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}-2\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\right.\\ \left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\\ \left.\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

Out[2201]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\\ \left(-8\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}-2\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\right.\\ \left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2+2\sqrt{5}-i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\\ \left.i\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

Out[2202]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\\ \left(-8i\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}+2\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\right.\\ \left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\\ \left.\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

近似値を使い $f(x)=0$ の解と比較する．まず 上で求めた解の近似値は

In[2203]:=

```
{Dynamic[N[x1']], Dynamic[N[x2']], Dynamic[N[x3']], Dynamic[N[x4']]}
```

Out[2203]=

{-0.780669, 1.55919 + 1.41298 i, -1.16886 + 1.45104 i, -1.16886 - 1.45104 i}

次に $f(x)=0$ の解の近似値を求めると

In[2204]:=

```
x /. NSolve[f[x] == 0, x]
```

Out[2204]=

```
{-1.16886 - 1.45104 i, -1.16886 + 1.45104 i,
 -0.780669, 1.55919 - 1.41298 i, 1.55919 + 1.41298 i}
```

ご覧のように少なくとも小数点以下5桁までは一致する．また少し時間は掛るが，厳密に計算してもf(x1)=0 が確かめられる. (興味のある方はコメントを外して実行してみてください)

In[2205]:=

```
(*f[FullSimplify[x1']]//FullSimplify*)
```

虚数根の方は「とても」時間がかかるので省略する．なお実数根x1と虚数根x2を 累乗根を使って表すと，

In[2206]:=

```
Dynamic[x1'] // TraditionalForm // Print
```

$$-\frac{\sqrt[5]{3}\left(\sqrt[5]{25-7\sqrt{10}}+\sqrt[5]{25+7\sqrt{10}}+\sqrt[5]{24\sqrt{10}-75}-\sqrt[5]{75+24\sqrt{10}}\right)}{5^{3/5}}$$

In[2207]:=

```
Dynamic[x2'] // TraditionalForm // Print
```

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}\sqrt[5]{3}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\Bigg(8\sqrt[5]{75+24\sqrt{10}}-2\sqrt[5]{25+7\sqrt{10}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\sqrt[5]{25-7\sqrt{10}}\left(2+2\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\sqrt[5]{24\sqrt{10}-75}\left(2+2\sqrt{5}-i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\Bigg)$$

§4.　まとめ

Gal = D_5 の有理数係数 5 次方程式(4次の係数は0)に対する解法のまとめです.

[Step1] 5次のLagrangeの分解式 s_0,s_1,s_2,s_3,s_4 を作る (ζは 1 の原始 5 乗根の一つ)

$$\begin{cases} s_0 &= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\ (=0)\\ s_1 &= x_1+\zeta\,x_2+\zeta^2\,x_3+\zeta^3\,x_4+\zeta^4\,x_5\\ s_2 &= x_1+\zeta^2\,x_2+\zeta^4\,x_3+\zeta\,x_4+\zeta^3\,x_5\\ s_3 &= x_1+\zeta^3\,x_2+\zeta\,x_3+\zeta^4\,x_4+\zeta^2\,x_5\\ s_4 &= x_1+\zeta^4\,x_2+\zeta^3\,x_3+\zeta^2\,x_4+\zeta\,x_5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1 &= s_1+s_2+s_3+s_4\\ x_2 &= \zeta^4\,s_1+\zeta^3\,s_2+\zeta^2\,s_3+\zeta\,s_4\\ x_3 &= \zeta^3\,s_1+\zeta\,s_2+\zeta^4\,s_3+\zeta^2\,s_4\\ x_4 &= \zeta^2\,s_1+\zeta^4\,s_2+\zeta\,s_3+\zeta^3\,s_4\\ x_5 &= \zeta\,s_1+\zeta^2\,s_2+\zeta^3\,s_3+\zeta^4\,s_4\end{cases}$$

ここで 次の関係が成り立つ.

$$(\#)\begin{cases} s_1\text{ を}\sigma\text{で移すと } s_1\to\zeta^4\,s_1,\quad \tau\text{で移すと } s_1\to s_3,\ \tau^2\text{ で移すと } s_1\to s_4,\\ s_2\text{ を}\sigma\text{で移すと } s_2\to\zeta^3\,s_2,\quad \tau\text{で移すと } s_2\to s_1,\ \tau^2\text{ で移すと } s_2\to s_3,\\ s_3\text{ を}\sigma\text{で移すと } s_3\to\zeta^2\,s_3,\quad \tau\text{で移すと } s_3\to s_4,\ \tau^2\text{ で移すと } s_3\to s_2,\\ s_4\text{ を}\sigma\text{で移すと } s_4\to\zeta\,s_4,\quad \tau\text{で移すと } s_4\to s_2,\ \tau^2\text{ で移すと } s_4\to s_1,\end{cases}$$

τ は 分解式を「$s_1 \to s_3 \to s_4 \to s_2 \to s_1$ 」のように移し，σは「 $s_1 \to \zeta^4\ s_1 \to \to \zeta^3\ s_1 \to \to \zeta^2 s_1 \to \zeta\ s_1 \to s_1$」のように移す.

$t_1 = s_1{}^5 + s_4{}^5$, $t_2 = s_2{}^5 + s_3{}^5$, $t_3 = s_1\,s_4$, $t_4 = s_2\,s_3$ とおく.

$t_1 + t_2$, $(t_1 - t_2)^2$, $(t_1 - t_2)(t_3 - t_4)$, $(t_3 + t_4)$, $(t_3 t_4)$ は , F_{20}の固定体 $Q(\zeta)$ に入り ,これらの値は「単純計算」で求ま

る．２個の２次方程式を解くことにより，t_1, t_2, t_3, t_4 の値が求まる．さらにもう一度，２個の２次方程式を解いて$(s_1^5, s_2^5, s_3^5, s_4^5)$ の値が 8組求まる．(実質２組)
ここでおそらく「$s_1^5, s_2^5, s_3^5, s_4^5$ は全て実数」（補足1）である．その場合「s_1, s_2, s_3, s_4 は全て実数」となるように s_1, s_2, s_3, s_4を選んでも一般性を失わない．（補足2）このとき(s_1, s_2, s_3, s_4)の値の組は簡単に求まる．

［Step2］ $(s_1 s_2^2 + s_3^2 s_4)$ と $(s_1^2 s_3 + s_2 s_4^2)$ の値を考慮し s_1，s_2，s_3，s_4 の値を求め，さらに x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 を求める．

$w_1 = s_1 s_2^2 + s_3^2 s_4$，$w_2 = s_1^2 s_3 + s_2 s_4^2$ とおくと，$(w_1 + w_2)$，$(w_1 - w_2)^2$ は F_{20} の不変体 $Q(\zeta)$ に入る．故に「単純計算」でこれらの値は求まる．
これから２次方程式を解くと w_1 とw_2 の値が求まる．
「Step1」で求めた (s_1, s_2, s_3, s_4) のうち，これらの条件を満たすものは，実質１組になる．

§5. 補足

［補足１］s_1^5，s_2^5，s_3^5，s_4^5 は 全て実数となる．（予想）

まだ証明できていない．しかし，Galois群が F_{20}となる有理数係数の方程式を20個ほど解いたが，ひとつ残らずs_1^5,s_2^5,s_3^5,s_4^5は実数だった．従ってかなり信憑性は高いが，まだ証明できてない．証明ができれば（または見つければ） 載せます. ちなみに係数の絶対値が10以下の範囲では，Galois群がF_{20}となる方程式は，Galois群がD_5となる方程式と比べると 1/3 以下しかない．C_5は一個もない．係数の絶対値の制限を外しても，可解群のほとんどは D_5なのだろうか？

［補足2］s_1^5，s_2^5，s_3^5，s_4^5 が 全て実数のとき，s_1，s_2，s_3，s_4 を実数としても一般性を失わない

ガロア群が D_5のときの，[補足3] の証明と同じ

［補足3］s_1^5，s_2^5，s_3^5，s_4^5 が 全て実数のとき，実数解は1個だけ

ガロア群が D_5 のときの，［補足4］の証明と同じ

【参考文献/サイト】次のサイトや文献を参考にさせて頂きました．ありがとうございます．

1. 可解な5次方程式について（大迎　規宏氏） □
2. 方程式のガロア群（松田修氏） □
3. ガロア理論を使って方程式を解いたことがありますか（scruta氏） □
4. ペンギンは空を飛ぶ－　5次方程式の解を巡る旅　（peng225氏） □
5. Period－Mathmatics　可解な5次方程式の代数的解法 □

（以下は書籍） □

6. ガロアの群論（中村亨氏） □
7. ガロワ理論最短コース（梶原　健氏） □
8. ガロア理論の頂きを踏む（石井俊全氏） □
9. ガロア理論「超」入門（小林吹代氏） □

[1] がなんといっても一番詳しいですが難しいです．まだ読了していません．読了したらまた別の方法で解いてみたいと思います．しかし[1] が難しいのは一般論（例えば Galois群の判別式）をしっかりやっているからで，「有理係数の方程式を解くだけ」なら Mathematica を使えば, 結構解けるものだなと感じました．数学的な知識は[6], [7], [8], [9] の入門レベルしか使っていません．なお，今回の f (x) の式は[1] から拝借しました．しかし途中の過程はかなり異なっていると思います．それは[1] が理論的な考察を中心としているのに対し，私は方程式を解くことだけを目的としたからです．初歩的な定理のみ使い泥臭く解きましたが，*Mathematica* を使えばかなり速く解けます．