x^5 + 15 x + 12 の厳密解 with *Mathematica* 13.3

Galois群がF_{20} の方程式　　　　2025 年2月 by　mixedmoss

§0. [準備] 原始元, 分解方程式, ガロア群

以下は GaloisGroupProgram.nb を使って求めた結果です.

```
In[∘]:= ClearAll["`*"];
f = x^5 + 15 x + 12;
```

f(x)=0 の解を x1, x2, x3, x4, x5 (α,β... などの代わりに x1,x2,...を利用する). f(x) の原始元をv = x1+ 4 x2 + 3 x3 + 2 x4 + 5 x5 , vの最小多項式をV[x] とすると

```
In[∘]:= V[x_] = 2 371 842 000 000 000 + 79 290 090 000 000 x^2 - 10 682 052 390 000 x^4 + 850 670 100 000 x^6 -
    34 046 433 000 x^8 + 523 980 000 x^10 + 9 587 025 x^12 - 90 000 x^14 - 5370 x^16 + x^20;
```

f のガロア群を Gal とすると,

$$\text{gal} = \{Id, \tau^3, \tau, \tau^2, \tau^2\sigma^4, \sigma^4, \tau^3\sigma^4, \tau\sigma^4, \tau^2\sigma^3, \sigma^3, \tau^3\sigma^3, \tau^3\sigma^2, \tau\sigma^2, \tau^2\sigma^2, \sigma^2, \sigma, \tau^3\sigma, \tau\sigma, \tau^2\sigma\} = <\tau, \sigma> \simeq C_4 C_5$$

ただし $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\tau = (2, 3, 4, 5)$

このように $C_4\, C_5$ の形で書ける群を F_{20}（Frobenius group）というらしい.
分解列は　$F_{20} \triangleright D_5 \triangleright C_5 \triangleright \{Id\}$
ただし C_n は巡回群, D_n は2面体群で
$$C_5 = <\sigma>, \quad D_5 = C_5 + \tau^2 C_5, \quad F_{20} = D_5 + \tau D_5 = C_5 + \tau C_5 + \tau^2 C_5 + \tau^3 C_5 \simeq C_4 C_5$$

また 解のvによる表現は次のようになる.

In[ ]:=

```
{x1, x2, x3, x4, x5} = {(-861 938 718 370 242 204 295 608 211 266 295 749 515 640 000 000 -
     684 433 253 827 819 307 591 593 725 116 638 734 918 408 000 000 v +
     56 453 863 409 949 377 565 172 037 271 904 795 583 245 800 000 v^2 +
     19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 -
     7 978 466 780 980 478 967 648 684 319 768 154 297 604 375 000 v^4 -
     1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 +
     454 647 992 046 551 629 938 068 763 322 137 557 640 847 500 v^6 + 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 -
     13 776 327 979 571 728 133 852 521 864 693 297 147 931 250 v^8 + 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 -
     82 512 570 458 629 569 770 475 904 931 084 945 494 875 v^10 - 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 +
     4 797 148 900 075 425 726 389 295 085 994 209 777 500 v^12 - 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 +
     101 218 323 101 025 844 900 848 255 798 867 235 650 v^14 + 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 -
     733 123 275 960 863 452 231 815 446 003 913 250 v^16 + 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 -
     24 177 861 079 325 177 445 822 443 717 163 795 v^18 + 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
   2 041 681 628 667 118 655 087 624 863 780 198 236 925 920 000 000,
  (288 962 986 598 211 429 293 764 452 721 718 394 637 080 000 000 - 174 012 846 661 039 643 819 687 509 171 589 175 686 928 000 000
      v - 60 001 378 726 542 522 459 935 163 913 547 847 315 185 400 000 v^2 +
     19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 +
     6 580 063 880 550 445 698 229 626 882 944 152 376 275 125 000 v^4 -
     1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 -
     316 671 295 975 123 912 024 987 067 169 784 443 651 517 500 v^6 + 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 +
     6 067 999 698 672 491 109 590 008 894 958 502 641 868 750 v^8 + 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 +
     96 204 031 481 264 240 681 635 473 494 882 788 795 875 v^10 - 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 -
     1 239 924 706 348 598 058 510 108 525 628 473 142 500 v^12 - 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 -
     55 503 894 727 181 654 479 874 499 299 363 568 450 v^14 + 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 +
     49 098 725 383 619 996 457 776 558 599 182 750 v^16 + 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 +
     10 156 737 918 838 949 953 161 614 612 963 835 v^18 + 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
   1 020 840 814 333 559 327 543 812 431 890 099 118 462 960 000 000,
  (17 682 965 821 657 195 956 640 032 738 346 434 240 000 + 3 956 628 498 066 676 567 522 910 744 266 347 000 000 v^2 -
     322 616 275 388 652 119 062 693 539 383 779 437 000 v^4 + 11 125 734 870 376 676 599 102 217 027 958 772 500 v^6 +
     102 128 776 784 474 922 892 498 560 974 779 050 v^8 - 6 842 221 945 748 661 717 492 745 300 989 525 v^10 -
     144 277 777 424 300 821 652 509 703 231 340 v^12 + 609 503 629 255 743 300 863 141 717 310 v^14 +
     39 531 224 767 096 432 236 733 301 402 v^16 + 240 601 146 642 007 769 540 230 179 v^18) /
   63 558 743 528 095 155 461 086 764 482 499 108 480 000,
  (288 962 986 598 211 429 293 764 452 721 718 394 637 080 000 000 + 174 012 846 661 039 643 819 687 509 171 589 175 686 928 000 000
      v - 60 001 378 726 542 522 459 935 163 913 547 847 315 185 400 000 v^2 -
     19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 +
     6 580 063 880 550 445 698 229 626 882 944 152 376 275 125 000 v^4 +
     1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 -
     316 671 295 975 123 912 024 987 067 169 784 443 651 517 500 v^6 - 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 +
     6 067 999 698 672 491 109 590 008 894 958 502 641 868 750 v^8 - 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 +
     96 204 031 481 264 240 681 635 473 494 882 788 795 875 v^10 + 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 -
     1 239 924 706 348 598 058 510 108 525 628 473 142 500 v^12 + 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 -
     55 503 894 727 181 654 479 874 499 299 363 568 450 v^14 - 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 +
     49 098 725 383 619 996 457 776 558 599 182 750 v^16 - 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 +
     10 156 737 918 838 949 953 161 614 612 963 835 v^18 - 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
   1 020 840 814 333 559 327 543 812 431 890 099 118 462 960 000 000,
  (-861 938 718 370 242 204 295 608 211 266 295 749 515 640 000 000 +
     684 433 253 827 819 307 591 593 725 116 638 734 918 408 000 000 v +
     56 453 863 409 949 377 565 172 037 271 904 795 583 245 800 000 v^2 -
     19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 -
     7 978 466 780 980 478 967 648 684 319 768 154 297 604 375 000 v^4 +
     1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 +
     454 647 992 046 551 629 938 068 763 322 137 557 640 847 500 v^6 - 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 -
     13 776 327 979 571 728 133 852 521 864 693 297 147 931 250 v^8 - 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 -
     82 512 570 458 629 569 770 475 904 931 084 945 494 875 v^10 + 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 +
     4 797 148 900 075 425 726 389 295 085 994 209 777 500 v^12 + 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 +
     101 218 323 101 025 844 900 848 255 798 867 235 650 v^14 - 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 -
     733 123 275 960 863 452 231 815 446 003 913 250 v^16 - 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 -
     24 177 861 079 325 177 445 822 443 717 163 795 v^18 - 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
   2 041 681 628 667 118 655 087 624 863 780 198 236 925 920 000 000};
```

§ 1 .Lagrange分解式 r1,r2,r3,r4 の5乗の値を求める

1-1. Lagrange分解式

$C_5 \triangleright \{\mathrm{Id}\}$の部分に注目し，ラグランジュの5次分解式をつくる .(ζは1の原始 5 乗根のひとつ．)
このとき，V(v)と円分方程式 $v^4+v^3+v^2+v+1$ で割った余りを考える．(PolynomialMod)

```
In[ ]:= r0 = x1 + x2 +  x3 + x4 + x5 // PolynomialMod[#, V[v]] &;
r1 =
  x1 + ξ x2 + ξ^2 x3 + ξ^3 x4 + ξ^4 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
r2 = x1 + ξ^2 x2 + ξ^4 x3 + ξ x4 + ξ^3 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
r3 = x1 + ξ^3 x2 + ξ x3 + ξ^4 x4 + ξ^2 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
r4 = x1 + ξ^4 x2 + ξ^3 x3 + ξ^2 x4 + ξ x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
```

解と係数の関係より r0 = 0.　また以下の性質が成り立つ.

(#) $\begin{cases} \text{r1を}\sigma\text{で移すと r1} \to \zeta^4\,\text{r1}, & \tau\text{で移すと r1}\to\text{r3}, \ \tau^2\text{ で移すと r1}\to\text{r4}, \\ \text{r2を}\sigma\text{で移すと r2} \to \zeta^3\,\text{r2}, & \tau\text{で移すと r2}\to\text{r1}, \ \tau^2\text{ で移すと r2}\to\text{r3}, \\ \text{r3を}\sigma\text{で移すと r3} \to \zeta^2\,\text{r3}, & \tau\text{で移すと r3}\to\text{r4}, \ \tau^2\text{ で移すと r3}\to\text{r2}, \\ \text{r4を}\sigma\text{で移すと r4} \to \zeta\,\text{r4}, & \tau\text{で移すと r4}\to\text{r2}, \ \tau^2\text{ で移すと r4}\to\text{r1}, \end{cases}$

τは 分解式を「r1→r3→r4→r2→r1」のように移し，σは「r1 → ξ^4 r1→ → ξ^3 r1→ → ξ^2 r1 → ξ r1 → r1」のように移す.
さらに 同型写像 $\omega: \zeta \to \zeta^3$ とすると，分解式は次のように移る．ωはτと同じように分解式を移す.

(by ω) r1→r3→r4→r2 →r1⋯　　(by ω^2) r1↔r4，r2↔r3

以下，R1 = $\mathrm{r1}^5$，R2 = $\mathrm{r2}^5$，R3 = $\mathrm{r3}^5$，R4 = $\mathrm{r4}^5$ とおく.

1-2. t1=R1+R4, t2=R2+R3, t3=r1r4, t4=r2r3 の値を求める

t1=R1+R4, t2=R2+R3, t3=r1r4, t4=r2r3 とおく． (#)より t1,t2,t3,t4は σとτ^2で不変． 故に t1,t2,t3,t4は D_5で不変． さらに τ により t1↔t2 かつ t3↔t4 であるから， (t1 + t2), (t1 − t2)^2, (t1-t2)(t3-t4), (t3+t4), (t3*t4) はτで不変で， $F_{20} = D_5+\tau D_5$ だから, これらは F_{20} で不変. 故に Q(ζ)に入る. 「単純計算」すると,

```
In[ ]:= t1 = r1^5 + r4^5; t2 = r2^5 + r3^5; t3 = r1 * r4; t4 = r2 * r3;

t1 + t2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
(t1 - t2)^2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
(t1 - t2) (t3 - t4) // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
t3 + t4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
t3 * t4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &

Out[ ]=
7500

Out[ ]=
225 000 000

Out[ ]=
-450 000

Out[ ]=
0

Out[ ]=
-225
```

$\sqrt{225} = 15$ だから， 上の計算より

$$\begin{cases} t1 - t2 & = \pm 15000 \\ t1 + t2 & = 7500 \\ (t3,\ t4) & = (\pm 15,\ \mp 15)\ (\text{複号同順}) \\ (t1 - t2)(t3 - t4) & < 0 \end{cases}$$

故に $(t1,\ t2,\ t3^5,\ t4^5) =$

$(R1 + R4,\ R2 + R3,\ R1\,R4,\ R2\,R3) = (11250,\ -3750,\ -759375,\ 759375)$
　　または $(-3750,\ 11250,\ 759375,\ -759375)$ − (1)

1-3. R_1,R_2,R_3,R_4の値を求める

（1）より，（ア）または（イ）のいずれか

$$(\text{ア})\begin{cases} R1+R4 & =11250 \\ R1\,R4 & =-759375 \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} R2+R3 & =-3750 \\ R2\,R3 & =759375 \end{cases}$$

$$(\text{イ})\begin{cases} R1+R4 & =-3750 \\ R1\,R4 & =759375 \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} R2+R3 & =11250 \\ R2\,R3 & =-759375 \end{cases}$$

R1とR4, R2とR3を解に持つ2次方程式を作って解けば, R1,R2,R3,R4が求まる．ここではSolve で一度に求め Rset に入れる.

In[∘]:=
```
Rset = {R1, R2, R3, R4} /.
   Solve[(R1 + R4 == 11 250 && R1 R4 == -759 375 && R2 + R3 == -3750 && R2 R3 == 759 375) ||
     (R1 + R4 == -3750 && R1 R4 == 759 375 && R2 + R3 == 11 250 && R2 R3 == -759 375),
    {R1, R2, R3, R4}] // Simplify
```

Out[∘]=

$$\{\{225\,(25-8\sqrt{10}),\ -75\,(25+7\sqrt{10}),\ 75\,(-25+7\sqrt{10}),\ 225\,(25+8\sqrt{10})\},$$
$$\{225\,(25-8\sqrt{10}),\ 75\,(-25+7\sqrt{10}),\ -75\,(25+7\sqrt{10}),\ 225\,(25+8\sqrt{10})\},$$
$$\{-75\,(25+7\sqrt{10}),\ 225\,(25-8\sqrt{10}),\ 225\,(25+8\sqrt{10}),\ 75\,(-25+7\sqrt{10})\},$$
$$\{-75\,(25+7\sqrt{10}),\ 225\,(25+8\sqrt{10}),\ 225\,(25-8\sqrt{10}),\ 75\,(-25+7\sqrt{10})\},$$
$$\{75\,(-25+7\sqrt{10}),\ 225\,(25-8\sqrt{10}),\ 225\,(25+8\sqrt{10}),\ -75\,(25+7\sqrt{10})\},$$
$$\{75\,(-25+7\sqrt{10}),\ 225\,(25+8\sqrt{10}),\ 225\,(25-8\sqrt{10}),\ -75\,(25+7\sqrt{10})\},$$
$$\{225\,(25+8\sqrt{10}),\ -75\,(25+7\sqrt{10}),\ 75\,(-25+7\sqrt{10}),\ 225\,(25-8\sqrt{10})\},$$
$$\{225\,(25+8\sqrt{10}),\ 75\,(-25+7\sqrt{10}),\ -75\,(25+7\sqrt{10}),\ 225\,(25-8\sqrt{10})\}\}$$

【ひとりごと】Galois群Galが C_5のときは「単純計算」で R1, R2, R3, R4が求まった．Gal = D_5のときは「単純計算」で t1=R1+R4, t2=R2+R3 が求まった．それから2次方程式を解いて R1,R2,R3,R4が求まった．Gal = F_{20}のときは，t1+t2=R1+R2+R3+R4, $(t1-t2)^2$=((R1 + R4) – (R2 + R3))^2 しか「単純計算」では求まらない．これから2次方程式を解いて t1,t2が求まる．（この例では平方根が有理数になったので，このステップは不要でした). さらにもう一回，2次方程式を解いてやっと R1,R2,R3,R4が求まる.

§2. (r1 r2^2+r3^2 r4)と(r1^2 r3+r2 r4^2) の値を考慮し r1,r2,r3,r4 の値を求める

(R_1, R_2, R_3, R_4) の値は 8組あるがこれらは順序が異なっているだけで，先頭の順序を(1,2,3,4)と改めておいた時, (1,2,3,4),(1,3,2,4),(4,2,3,1),(4,3,2,1)と(2,1,4,3),(2,4,1,3),(3,1,4,2),(3,4,1,2)の8通りとなる．ここで r0,r1,r2,r3,r4の定義とr0=0から

$$(\#\#)\begin{cases} x1 &= 1/5\,(r1 + r2 + r3 + r4) \\ x2 &= 1/5\left(\zeta^4\, r1 + \zeta^3\, r2 + \zeta^2\, r3 + \zeta\, r4\right) \\ x3 &= 1/5\left(\zeta^3\, r1 + \zeta\, r2 + \zeta^4\, r3 + \zeta^2\, r4\right) \\ x4 &= 1/5\left(\zeta^2\, r1 + \zeta^4\, r2 + \zeta\, r3 + \zeta^3\, r4\right) \\ x5 &= 1/5\left(\zeta\, r1 + \zeta^2\, r2 + \zeta^3\, r3 + \zeta^4\, r4\right) \end{cases}$$

w1=r1 r2^2+r3^2 r4，w2=r1^2 r3+r2 r4^{2}とおく．w1とw2 は σとτ^2 で変わらないので，D_5 の固定体に入る．さらに w1 と w2は τ によって, それぞれ w2 と w1 に入れ替わる．故に w1+w2 と (w1 − w2)^2 は F_{20} の固定体Q(ζ) に入る．「単純計算」して

```
In[ ]:= w1 = r1 r2^2 + r3^2 r4; w2 = r1^2 r3 + r2 r4^2;
w1 + w2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
(w1 - w2) ^2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
```

```
Out[ ]=
0
Out[ ]=
90 000
```

故に「$w_1 + w_2 = 0$ かつ $(w_1 - w_2)^2 = 90\,000$」-- (2)

「R_1 ～R_4 が全て実数の時は，r_1 ～r_4 が全て実数と仮定しても一般性を失わない」（補足3）故に (R_1, R_2, R_3, R_4) の候補の8組から (r_1, r_2, r_3, r_4) の候補が同じく8組定まり，

その内（2）を満たすものは次の 4 組となる．（時間節約のため有効数字計算を使用しています）

```
In[ ]:= realRoot[p_] := Sign[p] Abs[p]^(1 / 5) (*実数に対し5乗根を求めるコマンド*)
rset = Select[realRoot /@ Rset, (a1 = #[[1]]; a2 = #[[2]]; a3 = #[[3]]; a4 = #[[4]];
     $w1 = a1 a2^2 + a3^2 a4;
     $w2 = a1^2 a3 + a2 a4^2;
     N@Abs[$w1 + $w2] < 10^(-8) && N@Abs[($w1 - $w2)^2 - 90 000] < 10^(-8)) &] // Quiet
```

Out[ ]=

$$\left\{\left\{-15^{2/5}\left(-25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}, -5^{2/5}\left(3\left(25-7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5}, -5^{2/5}\left(3\left(25+7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5}, 15^{2/5}\left(25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}\right\}, \left\{-5^{2/5}\left(3\left(25+7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5}, -15^{2/5}\left(-25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}, 15^{2/5}\left(25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}, -5^{2/5}\left(3\left(25-7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5}\right\}, \left\{-5^{2/5}\left(3\left(25-7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5}, 15^{2/5}\left(25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}, -15^{2/5}\left(-25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}, -5^{2/5}\left(3\left(25+7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5}\right\}, \left\{15^{2/5}\left(25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}, -5^{2/5}\left(3\left(25+7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5}, -5^{2/5}\left(3\left(25-7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5}, -15^{2/5}\left(-25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}\right\}\right\}$$

§3.　x1,x2,x3,x4,x5 の値を求める

これらの 4 組の先頭の解を {r1, r2,r3,r4}とおくと，　τにより r1→r3→r4→r2 と移るので{r1, r2,r3,r4}, {r3,r1,r4,r2}, {r4,r3,r2,r1} ,{r2,r4,r1,r3}, は{x2,x3,x4,x5}の順序を変えるだけ．　従って上の 4 つの{r1, r2,r3,r4}の値は同じ解集合を与える．（このことから§1の(R1,R2,R3,R4)の8組の解は実質2種類で，§2でその内の一つを選んだだけということも分かる．）　故に{r1, r2,r3,r4}として先頭の解を選んでよい．これから方程式の解 x1,x2..は次の様に求まる．

In[∘]:=
```
{$r1, $r2, $r3, $r4} = rset[[1]];
ξ = Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5];
x1 = 1 / 5 ($r1 + $r2 + $r3 + $r4) // Simplify (*定義の塗替えをしている*)
x2 = 1 / 5 (ξ^4 $r1 + ξ^3 $r2 + ξ ^2 $r3 + ξ $r4) // Simplify
x3 = 1 / 5 (ξ^3 $r1 + ξ $r2 + ξ^4 $r3 + ξ^2 $r4) // Simplify
x4 = 1 / 5 (ξ^2 $r1 + ξ^4 $r2 + ξ $r3 + ξ^3 $r4) // Simplify
x5 = 1 / 5 (ξ $r1 + ξ^2 $r2 + ξ ^3 $r3 + ξ^4 $r4) // Simplify
```

Out[∘]=

$$-\frac{3^{1/5}\left(\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}+\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}+\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}-\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\right)}{5^{3/5}}$$

Out[∘]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(8\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}-2\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2+2\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2+2\sqrt{5}-i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

Out[∘]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-8i\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}-2\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

Out[∘]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-8\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}-2\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2+2\sqrt{5}-i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+i\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

Out[∘]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-8i\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}+2\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

x1~x5の近似値とNsolveで解いた解を比べる

In[∘]:=

```
N@{x1, x2, x3, x4, x5} // Sort
x /. NSolve[f == 0, x] // Sort
```

Out[∘]=

$$\{-1.16886-1.45104\,i,\ -1.16886+1.45104\,i,\ -0.780669,\ 1.55919-1.41298\,i,\ 1.55919+1.41298\,i\}$$

Out[∘]=

$$\{-1.16886-1.45104\,i,\ -1.16886+1.45104\,i,\ -0.780669,\ 1.55919-1.41298\,i,\ 1.55919+1.41298\,i\}$$

見た限りは一致している. また少し時間は掛るが, 厳密に計算してもf (x1)=0 が確かめられる. (Simplifyを2回使う) 実数解x1と虚数解x2を累乗根を使って表してみる.

In[∘]:=

```
x1 // TraditionalForm // Print
x2 // TraditionalForm // Print
```

$$-\frac{\sqrt[5]{3}\left(\sqrt[5]{25-7\sqrt{10}}+\sqrt[5]{25+7\sqrt{10}}+\sqrt[5]{24\sqrt{10}-75}-\sqrt[5]{75+24\sqrt{10}}\right)}{5^{3/5}}$$

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}\sqrt[5]{3}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(8\sqrt[5]{75+24\sqrt{10}}-2\sqrt[5]{25+7\sqrt{10}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\sqrt[5]{25-7\sqrt{10}}\left(2+2\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\sqrt[5]{24\sqrt{10}-75}\left(2+2\sqrt{5}-i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

§4. まとめ

Gal = D_5 の有理数係数 5 次方程式(4次の係数は0)に対する解法のまとめ.

[Step1] 5次のLagrangeの分解式 s_0,s_1,r_2,r_3,s_4 を作る (ζは 1 の原始 5 乗根の一つ)

$$\begin{cases} r_0 &= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\ (=0) \\ r_1 &= x_1+\zeta\, x_2+\zeta^2\, x_3+\zeta^3\, x_4+\zeta^4\, x_5 \\ r_2 &= x_1+\zeta^2\, x_2+\zeta^4\, x_3+\zeta\, x_4+\zeta^3\, x_5 \\ r_3 &= x_1+\zeta^3\, x_2+\zeta\, x_3+\zeta^4\, x_4+\zeta^2\, x_5 \\ r_4 &= x_1+\zeta^4\, x_2+\zeta^3\, x_3+\zeta^2\, x_4+\zeta\, x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= r_1+r_2+r_3+r_4 \\ x_2 &= \zeta^4\, r_1+\zeta^3\, r_2+\zeta^2\, r_3+\zeta\, r_4 \\ x_3 &= \zeta^3\, r_1+\zeta\, r_2+\zeta^4\, r_3+\zeta^2\, r_4 \\ x_4 &= \zeta^2\, r_1+\zeta^4\, r_2+\zeta\, r_3+\zeta^3\, r_4 \\ x_5 &= \zeta\, r_1+\zeta^2\, r_2+\zeta^3\, r_3+\zeta^4\, r_4 \end{cases}$$

ここで 次の関係が成り立つ.

$$(\#)\begin{cases} r_1\text{ を}\sigma\text{で移すと } r_1\to\zeta^4\, r_1, & \tau\text{で移すと } r_1\to r_3,\ \tau^2\text{ で移すと } r_1\to r_4, \\ r_2\text{ を}\sigma\text{で移すと } r_2\to\zeta^3\, r_2, & \tau\text{で移すと } r_2\to r_1,\ \tau^2\text{ で移すと } r_2\to r_3, \\ r_3\text{ を}\sigma\text{で移すと } r_3\to\zeta^2\, r_3, & \tau\text{で移すと } r_3\to r_4,\ \tau^2\text{ で移すと } r_3\to r_2, \\ r_4\text{ を}\sigma\text{で移すと } r_4\to\zeta\, r_4, & \tau\text{で移すと } r_4\to r_2,\ \tau^2\text{ で移すと } r_4\to r_1, \end{cases}$$

τ は 分解式を「$r_1\to r_3\to r_4\to r_2\to r_1$」のように移し, σは「$r_1\to\zeta^4\, r_1\to\to\zeta^3\, r_1\to\to\zeta^2 r_1\to\zeta\, r_1\to r_1$」のように移す.

$t_1=r_1{}^5+r_4{}^5$, $t_2=r_2{}^5+r_3{}^5$, $t_3=r_1\, r_4$, $t_4=r_2\, r_3$ とおく.
t_1+t_2, $(t_1-t_2)^2$, $(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_4)$, (t_3+t_4), (t_3t_4) は , F_{20}の固定体 $Q(\zeta)$ に入り ,これらの値は「単純計算」で求まる. 2 次方程式を解くことにより, t_1, t_2, t_3, t_4 の値が求まる. さらにもう一度, 2 次方程式を解いて (R_1,R_2,R_3,R_4) の値が何組か求まる.
ここでおそらく「R_1,R_2,R_3,R_4 は全て実数」（補足1）である. その場合「r_1, r_2, r_3, r_4 は全て実数」となるように r_1, r_2, r_3, r_4を選んでも一般性を失わない.（補足2）故に実 5 乗根を取るだけで(r_1, r_2, r_3, r_4)の候補が何組か求まる

[Step2] $\left(r_1\, r_2{}^2+r_3{}^2\, r_4\right)$ と $\left(r_1{}^2\, r_3+r_2\, r_4{}^2\right)$ の値を考慮し r_1, r_2, r_3, r_4 の値を求め, さらに x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求める.

$w_1=r_1\, r_2{}^2+r_3{}^2\, s_4$, $w_2=r_1{}^2\, r_3+r_2\, r_4{}^2$ とおくと, (w_1+w_2) ,
$(w_1-w_2)^2$ は F_{20} の不変体 Q（ζ）に入る. 故に「単純計算」でこれらの値は求まる.
「Step1」で求めた (r_1, r_2, r_3, r_4) のうち, これらの条件を満たす実質 1 組を求めると良い.

【注】結局「単純計算」した式は「t_1+t_2, $(t_1-t_2)^2$, $(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_4)$, (t_3+t_4), t_3t_4 , w_1+w_2, (w_1-w_2)^2」の7個. 今回はωで互いに移る式はなく, 全て計算しないといけない. また, 最後は w_1と w_2の値を求める必要はなく, r_1~ r_4の値を代入してw_1+w_2と $(w_1-w_2)^2$を満たす r_1~ r_4を求めれば良い. 即ち2次方程式は2回解けば良い.

§5. 補足

[補足 1]「Gal = F_{20} のとき R_1, R_2, R_3 , R_4 は全て実数となる」と予想していたのだが，これは誤りと分かった.

Gal= F_{20}のとき，圧倒的多数は R_1~ R_4 は実数で，f=0は実数解を一個しか持たないが，f1 = x^5-10 x^4-10x^3+10x^2+10x+2 と f2= x^5-10 x^4+10x^3+10x^2-10x+2 は Gal= F_{20}で実数解を 5 個持つ．これは非常に珍しいので，余り確認もせずに予想していた．実際 f= x^5 +a x^4+ b x^3 +c x^2 + dx +e (a,b,c,d整数，-10≦a,b,c≦10, 1≦d≦10) で既約かつ Gal=F_{20} となるのは 238個あるが，このうち 234個は実数解を1個持ち，残り4個だけが実数解を5個持つ.

[補足2] R_1, R_2, R_3 , R_4 が 全て実数のとき, r_1 , r_2, r_3, r_4 を実数としても一般性を失わない

ガロア群が D_5のときの，[補足3] の証明と殆ど同じにできる.

[補足3] R_1, R_2, R_3 , R_4 が 全て実数のとき，実数解は1個だけ

ガロア群が D_5 のときの，[補足4] の証明と同じ

他の5次方程式については **`https://mixedmoss.com/Mathematica/Galois`** にお越しください.