$x^5 - 10x^3 + 5x^2 + 10x + 1$の厳密解

with *Mathematica* 13.3

Galois群がC_5のとき　　2025 年2月 by `mixedmoss`

§0. [準備] 原始元，分解方程式，ガロア群

以下はPart1 からの輸入です

```
In[∘]:= ClearAll["`*"];
f[x_] = x^5 - 10 x^3 + 5 x^2 + 10 x + 1;
```

f(x)=0の解を x1, x2, x3, x4, x5 . f(x)=0 の原始元の一つをv = x1+2 x2 + 3 x3 + 4 x4 + 5 x5 (part2 では, part1 と異なり α,β... などの代わりに x1,x2,...を利用する).　vの最小多項式をV[x] とすると

```
In[∘]:= V[x_] = -4375 + 2500 x - 125 x^3 + x^5;
```

また x1, x2, x3, x4, x5 を原始元vで表すと

$$\text{In[∘]:= } \{x1, x2, x3, x4, x5\} = \Big\{\frac{35250 - 5125 v - 2575 v^2 + 25 v^3 + 22 v^4}{5375}, \frac{-98500 + 16875 v + 7325 v^2 - 140 v^3 - 63 v^4}{5375}, \frac{41500 - 10875 v - 3550 v^2 + 95 v^3 + 32 v^4}{5375}, \frac{71500 - 13750 v - 4575 v^2 + 130 v^3 + 37 v^4}{5375}, \frac{-49750 + 12875 v + 3375 v^2 - 110 v^3 - 28 v^4}{5375}\Big\};$$

f(x) のGalois群を Gal , σ=(1,2,3,4,5) とすると

$$\text{Gal} = \{Id, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\} = C_5$$

ただし，C_5 は5次巡回群で，分解列は　Gal $= C_5 \triangleright \{Id\}$

§ 1．Lagrange分解式 s1,s2,s3,s4 の5乗の値を求める

$C_5 \triangleright$ {Id}の部分に注目し，ラグランジュの5次分解式をつくる .(ζは1の原始 5 乗根のひとつ．)
このとき，V(v)と円分方程式 $v^4+v^3+v^2+v+1$ で割った余りを考える．(PolynomialMod)

```
In[∘]:= s0 = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 // PolynomialMod[#, V[v]] &;
s1 =
  x1 + ξ x2 + ξ^2 x3 + ξ^3 x4 + ξ^4 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
s2 = x1 + ξ^2 x2 + ξ^4 x3 + ξ x4 + ξ^3 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
s3 = x1 + ξ^3 x2 + ξ x3 + ξ^4 x4 + ξ^2 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
s4 = x1 + ξ^4 x2 + ξ^3 x3 + ξ^2 x4 + ξ x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &;
```

解と係数の関係より s0 = 0. またσにより分解式は次の様に移る.

$$(\#)\begin{cases} s1 \to \zeta^4\, s1 \to \zeta^3\, s1 \to \zeta^2\, s1 \to \zeta\, s1 \to s1 & \square \\ s2 \to \zeta^3\, s2 \to \zeta\, s2 \to \zeta^4\, s2 \to \zeta^2\, s2 \to s2 \\ s3 \to \zeta^2\, s3 \to \zeta^4\, s3 \to \zeta\, s3 \to \zeta^3\, s3 \to s3 \\ s4 \to \zeta\, s4 \to \zeta^2\, s4 \to \zeta^3\, s4 \to \zeta^4\, s4 \to s4 \end{cases}$$

さらに 同型写像 $\mu: \zeta \to \zeta^3$ とすると，分解式は次のように移る.

(by μ) s1→s3→s4→s2

(#)より $s1^5$, $s2^5$,$s3^5$, $s4^5$は σで不変なのでC_5 で不変．故に Q(ζ)に入るはず．「単純計算」して

In[∘]:=
```
s1^5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
s2^5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
s3^5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
s4^5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
```

Out[∘]=

$3125\, \xi^3$

Out[∘]=

$3125\, \xi$

Out[∘]=

$-3125 - 3125\, \xi - 3125\, \xi^2 - 3125\, \xi^3$

Out[∘]=

$3125\, \xi^2$

Mathematica は何故か直してないが，$1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = 0$ だから，$(s3)^5 = 3125\, \xi^4 = 5^5\, \xi^4$
故に $\left(s1^5,\ s2^5,\ s3^5,\ s4^5\right) = \left(5^5\, \xi^3,\ 5^5\, \xi,\ 5^5\, \xi^4,\ 5^5\, \xi^2\right)$
あとは5乗根を取れば良いだけだが，偏角の取り方が 5 通りもあるから，これからが難しい.

(実は「$s1^5 = 5^5\, \xi^3$」を μで移せば，残りの 3 つもすぐ求まる．)

§2. s1 $s2^2$, s2 $s4^2$, $s1^2$s3, s2 $s4^2$ の値を考慮しs1,s2,s3,s4 の値を求める

2 - 1. s1 s4, s2 s3, $s1^2$s3, s1 $s2^2$ の値を求める

$$(\#\#)\begin{cases} x1 = 1/5\,(s1 + s2 + s3 + s4) \\ x2 = 1/5\left(\zeta^4\, s1 + \zeta^3\, s2 + \zeta^2\, s3 + \zeta\, s4\right) \\ x3 = 1/5\left(\zeta^3\, s1 + \zeta\, s2 + \zeta^4\, s3 + \zeta^2\, s4\right) \\ x4 = 1/5\left(\zeta^2\, s1 + \zeta^4\, s2 + \zeta\, s3 + \zeta^3\, s4\right) \\ x5 = 1/5\left(\zeta\, s1 + \zeta^2\, s2 + \zeta^3\, s3 + \zeta^4\, s4\right) \end{cases}$$

まず ζを ζ^2, ζ^3, ζ^4 に変えても 解集合{x1,x2,x3,x4,x5}は変わらない.
§1(#)より，s1s4, s2s3, s1 $s2^2$,$s1^2$s3は σによって不変なので , C_5の固定体Q(ζ)に入る．「単純計算」して,

In[∘]:=
```
s1 s4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
s2 s3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
s1 s2^2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
s1 ^2 s3 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
```

Out[∘]=

25

Out[∘]=

25

Out[∘]=

$-125-125\,\xi-125\,\xi^2-125\,\xi^3$

Out[∘]=

$125\,\xi^2$

「$1+\xi+\xi^2+\xi^3+\xi^4=0$」だから, 上の結果より,

$$\begin{cases} s1\ s4 = 25 & \cdots (1) \\ s2\ s3 = 25 & \cdots (2) \\ s1\ s2^2 = 125\,\xi^4 & \cdots (3) \\ s3\ s1^2 = 125\,\xi^2 & \cdots (4) \end{cases}$$

(実は「s1 s4 = 25 と　$s1\ s2^2 = 125\,\xi^4$」を μ で移せば, 残りの2つもすぐ求まる)

(A)三角関数を利用してs1,s2,s3,s4を求める

(1),(2) よりs1とs4, s2とs3は互いに複素共役と分かるから

s1= 5(cos θ_1+ i sin θ_1) , s2= 5(cos θ_2+ i sin θ_2), s3= 5(cos(- θ_2)+ i sin(-θ_2)), s4= 5(cos(- θ_1)+ i sin(-θ_1))

とおける. このとき(3) と(4)より

$\theta_1+2\theta_2=8/5\pi$ かつ $2\theta_1-\theta_2=4/5\pi$

$\therefore\ \theta_1=16\pi/25$ かつ $\theta_2=12\pi/25$

即ち (A) $\begin{cases} s1 = 5\,(\cos(16\pi/25) + i\sin(16\pi/25)) \\ s2 = 5\,(\cos(12\pi/25) + i\sin(12\pi/25)) \\ s3 = 5\,(\cos(-12\pi/25) + i\sin(-12\pi/25)) \\ s4 = 5\,(\cos(-16\pi/25) + i\sin(-16\pi/25)) \end{cases}$

(B)累乗根を利用して s1,s2,s3,s4を求める

複素数z= r(cos θ+ i sin θ) (r>0, -π<θ≤π) に対し, $z^{1/5}$= $r^{1/5}$(cos(θ/5)+ i cos(θ/5)) と定義する.

それに対し $\sqrt[5]{z}=r^{1/5}(\cos(\theta/5+2k\pi/5)+ i\cos(\theta/5+2k\pi/5))$ (kは適当な整数)と定義すると,

いずれも5 乗すればzであるが, $\sqrt[5]{z}$ の方は偏角が5通りある. (これらの定義はここだけの話です)

このとき (1) より (s1, s2, s3, s4) = $\left(5\sqrt[5]{\xi^3},\ 5\sqrt[5]{\xi},\ \sqrt[5]{\xi^4},\ 5\sqrt[5]{\xi^2}\right)$

以下 ζの偏角を 2π/5 としても一般性を失わない. $z^{1/5}$において zの偏角は (-π)から πで考えているので,

$$\arg((\xi^3)^{1/5})=1/5(-4\pi/5)=-4\pi/25$$

一方「arg(s_1)= θ_1=16π/25 」だから, $\sqrt[5]{\xi^3}=(\zeta^3)^{1/5}\times\zeta^2$

同様にして $\sqrt[5]{\zeta} = (\zeta)^{1/5} \times \zeta$, $\sqrt[5]{\zeta^4} = (\zeta^4)^{1/5} \times \zeta^4$, $\sqrt[5]{\zeta^2} = (\zeta^2)^{1/5} \times \zeta^3$

故に, (B) $\begin{cases} s1 = 5\sqrt[5]{\zeta^3} = 5\,(\zeta^3)^{1/5} \times \zeta^2 \\ s2 = 5\sqrt[5]{\zeta} = 5\,(\zeta)^{1/5} \times \zeta \\ s3 = 5\sqrt[5]{\zeta^4} = 5\,(\zeta^4)^{1/5} \times \zeta^4 \\ s4 = 5\sqrt[5]{\zeta^2} = 5\,(\zeta^2)^{1/5} \times \zeta^3 \end{cases}$

§3. x1,x2,x3,x4,x5 の値を求める

二通りの方法で求めて，それを比較する.

3-1. (A) を利用して， x1, x2, x3, x4, x5 を三角関数で求める

In[ ]:=
```
ζ = Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5] // Simplify; (*偏角は2π/5*)
```

s1,s2,..の値を ss1, ss2, .. とする. （三角の s)

In[ ]:=
```
θ1 = 16 Pi / 25; θ2 = 12 Pi / 25;
ss1 = 5 (Cos[θ1] + I Sin[θ1]) // Simplify;
ss2 = 5 (Cos[θ2] + I Sin[θ2]) // Simplify;
ss3 = 5 (Cos[-θ2] + I Sin[-θ2]) // Simplify;
ss4 = 5 (Cos[-θ1] + I Sin[-θ1]) // Simplify;
```

三角関数で表されたf (x) の解を xs1, xs2, ... とすると,

In[◦]:=
```
xs1 = 1 / 5 (ss1 + ss2 + ss3 + ss4) // Simplify
xs2 = 1 / 5 (ξ^4 ss1 + ξ^3 ss2 + ξ^2 ss3 + ξ ss4) // Simplify
xs3 = 1 / 5 (ξ^3 ss1 + ξ ss2 + ξ^4 ss3 + ξ^2 ss4) // Simplify
xs4 = 1 / 5 (ξ^2 ss1 + ξ^4 ss2 + ξ ss3 + ξ^3 ss4) // Simplify
xs5 = 1 / 5 (ξ ss1 + ξ^2 ss2 + ξ^3 ss3 + ξ^4 ss4) // Simplify
```

Out[◦]=

$$2\left(\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{50}\right]-\mathrm{Sin}\left[\frac{7\pi}{50}\right]\right)$$

Out[◦]=

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\ \mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{50}\right]+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\ \left(-\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{50}\right]+2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{50}\right]\right)-2\left(\left(1+\sqrt{5}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{50}\right]+\left(-1+\sqrt{5}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{7\pi}{50}\right]\right)\right)$$

Out[◦]=

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\ \mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{50}\right]-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\ \left(2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{50}\right]+\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{50}\right]\right)+2\left(-1+\sqrt{5}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{50}\right]+2\left(1+\sqrt{5}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{7\pi}{50}\right]\right)$$

Out[◦]=

$$\frac{1}{4}\left(-\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\ \mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{50}\right]+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\ \left(2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{50}\right]+\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{50}\right]\right)+2\left(-1+\sqrt{5}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{50}\right]+2\left(1+\sqrt{5}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{7\pi}{50}\right]\right)$$

Out[◦]=

$$\frac{1}{4}\left(-\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\ \mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{50}\right]+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\ \left(\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{50}\right]-2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi}{50}\right]\right)-2\left(\left(1+\sqrt{5}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{50}\right]+\left(-1+\sqrt{5}\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{7\pi}{50}\right]\right)\right)$$

3-2. (B) を利用して， x1, x2, x3, x4, x5 を累乗根で求める

s1, s2, .. の値を sr1, sr2, .. とする．　(累乗 の r)

In[◦]:=
```
sr1 = 5 (ξ^3) ^ (1 / 5) * ξ^2 // Simplify;
sr2 = 5 (ξ) ^ (1 / 5) * ξ // Simplify;
sr3 = 5 (ξ^4) ^ (1 / 5) * ξ^4 // Simplify;
sr4 = 5 (ξ^2) ^ (1 / 5) * ξ^3 // Simplify;
```

下のセルは計算バグがよく起こります．その場合は「評価を放棄」して「直下のセルのみ評価」してください

累乗根で表されたf (x) の解を xr1, xr2, ... とすると,

In[ ]:=
```
xr1 = 1 / 5 (sr1 + sr2 + sr3 + sr4) // Simplify
xr2 = 1 / 5 (ξ^4 sr1 + ξ^3 sr2 + ξ^2 sr3 + ξ sr4) // Simplify
xr3 = 1 / 5 (ξ^3 sr1 + ξ sr2 + ξ^4 sr3 + ξ^2 sr4) // Simplify
xr4 = 1 / 5 (ξ^2 sr1 + ξ^4 sr2 + ξ sr3 + ξ^3 sr4) // Simplify
xr5 = 1 / 5 (ξ sr1 + ξ^2 sr2 + ξ^3 sr3 + ξ^4 sr4) // Simplify
```

Out[ ]=

$$-\frac{1}{512\times 2^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{6/5}\left(-8+(-1)^{3/5}\,2^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{7/5}\right)\left(16\times 2^{2/5}+\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{11/5}\right)$$

Out[ ]=

$$-\frac{1}{8192\times 2^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{21/5}\left(2^{2/5}+\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{1/5}\right)\left(-32+(-1)^{3/5}\,2^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{12/5}\right)$$

Out[ ]=

$$-\frac{1}{131072\times 2^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{11/5}\left(64\times 2^{2/5}+\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{16/5}\right)\left(-128+(-1)^{3/5}\,2^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{17/5}\right)$$

Out[ ]=

$$\frac{1}{4096\times 2^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{23/5}\left(-2\,(-1)^{3/5}\,2^{1/5}+\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{3/5}\right)\left(4\times 2^{2/5}+\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{6/5}\right)$$

Out[ ]=

$$-\frac{1}{32768\times 2^{4/5}}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{16/5}\left(-2+(-1)^{3/5}\,2^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{2/5}\right)\left(256\times 2^{2/5}+\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^{21/5}\right)$$

3-3.「三角関数で表された解xs」と「累乗根で表された解xr」を比較する

厳密な比較は難しいので近似値を求めると

In[ ]:=
```
N@{xs1, xs2, xs3, xs4, xs5}
N@{xr1, xr2, xr3, xr4, xr5}
```

Out[ ]=

$\{-0.725978,\ 2.52959,\ -0.10694,\ 1.5624,\ -3.25908\}$

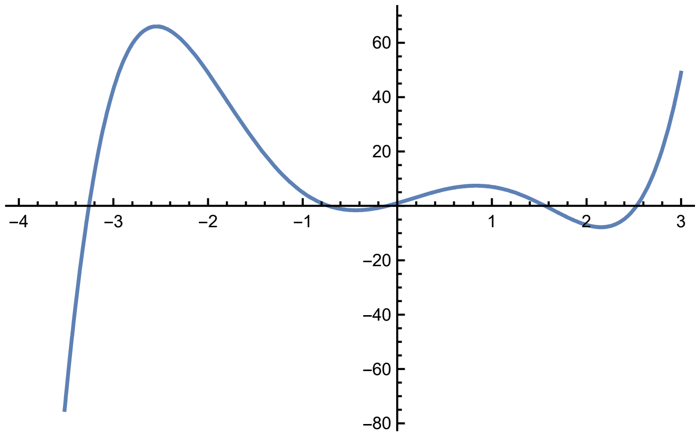
Out[ ]=

$\{-0.725978+2.42861\times 10^{-16}\,i,\ 2.52959+2.22045\times 10^{-16}\,i,\ -0.10694-4.16334\times 10^{-17}\,i,\ 1.5624-1.9984\times 10^{-15}\,i,\ -3.25908-1.11022\times 10^{-15}\,i\}$

2 つは非常に近く実部は完全に一致し，虚部も10^{-16}程度の大きさである．
2 つの解は一致し，f（x）の解は全て実数とみなして良いだろう．念の為グラフも描いてみる．

In[∘]:= `Plot[f[x], {x, -4, 3}, PlotLegends → Placed["y=f(x)=x^5-10x^3+5x^2+10x+1", {Bottom, Left}]]`

Out[∘]=



y=f(x)=x^5−10x^3+5x^2+10x+1

§4. まとめ

ガロア群が C_5 である f（x）の解の求め方

[Step1] 5次のLagrangeの分解式を作り s_1, s_2, s_3, s_4 の5乗の値を求める (ζ は 1 の原始 5 乗根の一つ)

$$\begin{cases} s_0 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\ (=0) \\ s_1 &= x_1 + \zeta\, x_2 + \zeta^2\, x_3 + \zeta^3\, x_4 + \zeta^4\, x_5 \\ s_2 &= x_1 + \zeta^2\, x_2 + \zeta^4\, x_3 + \zeta\, x_4 + \zeta^3\, x_5 \\ s_3 &= x_1 + \zeta^3\, x_2 + \zeta\, x_3 + \zeta^4\, x_4 + \zeta^2\, x_5 \\ s_4 &= x_1 + \zeta^4\, x_2 + \zeta^3\, x_3 + \zeta^2\, x_4 + \zeta\, x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \\ x_2 &= \zeta^4\, s_1 + \zeta^3\, s_2 + \zeta^2\, s_3 + \zeta\, s_4 \\ x_3 &= \zeta^3\, s_1 + \zeta\, s_2 + \zeta^4\, s_3 + \zeta^2\, s_4 \\ x_4 &= \zeta^2\, s_1 + \zeta^4\, s_2 + \zeta\, s_3 + \zeta^3\, s_4 \\ x_5 &= \zeta\, s_1 + \zeta^2\, s_2 + \zeta^3\, s_3 + \zeta^4\, s_4 \end{cases}$$

ここで 次の関係が成り立つ.

$$(\#)\begin{cases} s_1 \text{ を}\sigma\text{で移すと } s_1 \to \zeta^4\, s_1 & \square \\ s_2 \text{ を}\sigma\text{で移すと } s_2 \to \zeta^3\, s_2 \\ s_3 \text{ を}\sigma\text{で移すと } s_3 \to \zeta^2\, s_3 \\ s_4 \text{ を}\sigma\text{で移すと } s_4 \to \zeta\, s_4 \end{cases}$$

σは 分解式を｢s1 → ζ^4 s1→ → ζ^3 s1→ → ζ^2 s1 → ζ s1 → s1｣のように移す.

(#)から $s_1{}^5, s_2{}^5, s_3{}^5, s_4{}^5$ は C_5 で不変．故に $Q(\zeta)$ に入るので $s_1{}^5, s_2{}^5, s_3{}^5, s_4{}^5$ の値は｢単純計算｣で求まる．(方程式などは不要)

[Step2] 三角関数を使って s_k(k=1,2,3,4)を表し， $s1^2$ s3，s1 $s2^2$ の値から s_k を求める．それを代入すれば f(x)の解が求まる

Galois群が C_5 のとき， s_1 とs_4， s_2 とs_3 が複素共役が言える（補足参照）

故に $s_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,$s_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,$s_3=r_2(\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2))$,$s_4=r_1(\cos(-\theta_1)+i\sin(-\theta_1))$ とおける.

（♯）から$s_1\, s_4$，$s_2\, s_3$，$s1^2$ s3，s1 $s2^2$ は C_5 で不変． 故に $Q(\zeta)$ に入るので， $s_1\, s_4$，

$s_2\,s_3$, $s1^2\,s3$, $s1\,s2^2$ の値は「単純計算」で求まる.　 これから r_1, r_2, θ_1, θ_2 が求まる.
即ち　s_1, s_2, s_3, s_4 が求まる. また, 三角関数を累乗根に直すのも容易. ［以上］

§5.　補足

［補足1］ s_1 とs_4,　s_2 と s_3 は複素共役

${s_1}^5 \in \mathrm{Q}(\zeta)$ だから, ${s_1}^5 = a + b\,\zeta + c\,\zeta^2 + d\,\zeta^3$ $(a, b, c, d$ は有理数$)$ とおける. これを $\mu : \zeta \to \zeta^3$ で移すと

$$\begin{cases} {s_1}^5 = a + b\,\zeta^2 + c\,\zeta^4 + d\,\zeta & \square \\ {s_2}^5 = a + b\,\zeta^4 + c\,\zeta^3 + d\,\zeta^2 & \square \\ {s_4}^5 = a + b\,\zeta^3 + c\,\zeta + d\,\zeta^4 & \square \\ {s_3}^5 = a + b\,\zeta + c\,\zeta^2 + d\,\zeta^3 & \square \end{cases}$$

a, b, c, d は有理数だから s_1 とs_4, s_2 とs_3 は複素共役

［補足2］ $f(x) = 0$ の解は　全て実数

補足 1 より明らか

［補足3］ $|s_1| = |s_2| = |s_3| = |s_4|$ となると思うが, まだ証明できていない.

Galois群が C_5となる方程式は非常に数が少なく, この例以外では $f(x) = x^5 - 11\,x^3 - 11\,x^2 + 11\,x + 11$ しか見つけていない. この関数でも $|s_1|=|s_2|=|s_3|=|s_4|$が成り立つが, たった2つの例だけでは, まだ何とも言えない. しかし成り立つ気がする.

【参考文献&サイト】次のサイトや文献を参考にさせて頂きました．ありがとうございます．

1. 可解な5次方程式について (大迎　規宏氏) □
2. 方程式のガロア群 (松田修氏) □
3. ガロア理論を使って方程式を解いたことがありますか (scruta氏) □
4. ペンギンは空を飛ぶ‐　5次方程式の解を巡る旅　(peng225氏) □
5. Period−Mathmatics　可解な5次方程式の代数的解法 □

(以下は書籍) □

6. ガロアの群論 (中村亨氏) □
7. ガロワ理論最短コース (梶原　健氏) □
8. ガロア理論の頂きを踏む (石井俊全氏) □
9. ガロア理論「超」入門 (小林吹代氏) □

[1] がなんといっても一番詳しいですが難しいです．まだ読了していません．読了したら[1]の解き方でも解いてみたいと思っています．しかし[1] が難しいのは一般論 （例えば Galois群の判別式） をしっかりやっているからで，「有理係数の方程式を解くだけ」なら *Mathematica* を使えば, 結構解けるものだなと感じました．数学的な知識は[6], [7], [8], [9] の入門レベルしか使っていません． 最後に，私は専門家ではないので， 色々間違いしているかもしれません．その際はお知らせ下さると有り難いです．なおメールアドレスは ロボット対策のため 画像ファイルとなっています．クリックしても何も起こりません．

(mail@mixedmoss.com)