$x^5 + 15\,x + 12$ の厳密解 with *Mathematica* 13.3

文献[1]を参考にして Gal= F_{20}の方程式を解く

2025 年3月 by mixedmoss

---

§0. [準備] 原始元, 分解方程式, ガロア群

以下は GaloisGroupProgram.nb を使って求めた結果です.

```
In[1]:= ClearAll["`*"];
f = x^5 + 15 x + 12;
```

f(x)=0 の解を x1, x2, x3, x4, x5 (α,β... などの代わりに x1,x2,...を利用する). f(x) の原始元をv = x1+ 4 x2 + 3 x3 + 2 x4 + 5 x5 , vの最小多項式をV[x] とすると

```
In[3]:= V[x_] = 2 371 842 000 000 000 + 79 290 090 000 000 x^2 - 10 682 052 390 000 x^4 + 850 670 100 000 x^6 -
    34 046 433 000 x^8 + 523 980 000 x^10 + 9 587 025 x^12 - 90 000 x^14 - 5370 x^16 + x^20;
```

f のガロア群を Gal とすると,

gal = < τ, σ > ≃ $C_4\,C_5$

ただし σ = (1, 2, 3, 4, 5), τ = (2, 3, 4, 5)

このように $C_4\,C_5$ の形で書ける群を F_{20} (Frobenius group) というらしい.

分解列は $F_{20} \triangleright D_5 \triangleright C_5 \triangleright \{Id\}$

ただし C_n は巡回群, D_n は2面体群で

$C_5 = \langle \sigma \rangle$, $D_5 = C_5 + \tau^2\,C_5$, $F_{20} = D_5 + \tau\,D_5 = C_5 + \tau\,C_5 + \tau^2\,C_5 + \tau^3\,C_5 \simeq C_4\,C_5$

また 解のvによる表現は次のようになる. **(解は $x1,$x2,$x3,$x4,$x5に代入)**

```
In[4]:= {$x1, $x2, $x3, $x4, $x5} = {(-861 938 718 370 242 204 295 608 211 266 295 749 515 640 000 000 -
      684 433 253 827 819 307 591 593 725 116 638 734 918 408 000 000 v +
      56 453 863 409 949 377 565 172 037 271 904 795 583 245 800 000 v^2 +
      19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 -
      7 978 466 780 980 478 967 648 684 319 768 154 297 604 375 000 v^4 -
      1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 +
      454 647 992 046 551 629 938 068 763 322 137 557 640 847 500 v^6 + 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 -
      13 776 327 979 571 728 133 852 521 864 693 297 147 931 250 v^8 + 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 -
      82 512 570 458 629 569 770 475 904 931 084 945 494 875 v^10 - 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 +
      4 797 148 900 075 425 726 389 295 085 994 209 777 500 v^12 - 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 +
      101 218 323 101 025 844 900 848 255 798 867 235 650 v^14 + 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 -
      733 123 275 960 863 452 231 815 446 003 913 250 v^16 + 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 -
      24 177 861 079 325 177 445 822 443 717 163 795 v^18 + 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
    2 041 681 628 667 118 655 087 624 863 780 198 236 925 920 000 000,
   (288 962 986 598 211 429 293 764 452 721 718 394 637 080 000 000 - 174 012 846 661 039 643 819 687 509 171 589 175 686 928 000 000
       v - 60 001 378 726 542 522 459 935 163 913 547 847 315 185 400 000 v^2 +
      19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 +
      6 580 063 880 550 445 698 229 626 882 944 152 376 275 125 000 v^4 -
      1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 -
      316 671 295 975 123 912 024 987 067 169 784 443 651 517 500 v^6 + 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 +
      6 067 999 698 672 491 109 590 008 894 958 502 641 868 750 v^8 + 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 +
      96 204 031 481 264 240 681 635 473 494 882 788 795 875 v^10 - 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 -
      1 239 924 706 348 598 058 510 108 525 628 473 142 500 v^12 - 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 -
      55 503 894 727 181 654 479 874 499 299 363 568 450 v^14 + 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 +
      49 098 725 383 619 996 457 776 558 599 182 750 v^16 + 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 +
      10 156 737 918 838 949 953 161 614 612 963 835 v^18 + 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
    1 020 840 814 333 559 327 543 812 431 890 099 118 462 960 000 000,
   (17 682 965 821 657 195 956 640 032 738 346 434 240 000 + 3 956 628 498 066 676 567 522 910 744 266 347 000 000 v^2 -
      322 616 275 388 652 119 062 693 539 383 779 437 000 v^4 + 11 125 734 870 376 676 599 102 217 027 958 772 500 v^6 +
      102 128 776 784 474 922 892 498 560 974 779 050 v^8 - 6 842 221 945 748 661 717 492 745 300 989 525 v^10 -
      144 277 777 424 300 821 652 509 703 231 340 v^12 + 609 503 629 255 743 300 863 141 717 310 v^14 +
      39 531 224 767 096 432 236 733 301 402 v^16 + 240 601 146 642 007 769 540 230 179 v^18) /
    63 558 743 528 095 155 461 086 764 482 499 108 480 000,
   (288 962 986 598 211 429 293 764 452 721 718 394 637 080 000 000 + 174 012 846 661 039 643 819 687 509 171 589 175 686 928 000 000
       v - 60 001 378 726 542 522 459 935 163 913 547 847 315 185 400 000 v^2 -
      19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 +
      6 580 063 880 550 445 698 229 626 882 944 152 376 275 125 000 v^4 +
      1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 -
      316 671 295 975 123 912 024 987 067 169 784 443 651 517 500 v^6 - 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 +
      6 067 999 698 672 491 109 590 008 894 958 502 641 868 750 v^8 - 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 +
      96 204 031 481 264 240 681 635 473 494 882 788 795 875 v^10 + 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 -
      1 239 924 706 348 598 058 510 108 525 628 473 142 500 v^12 + 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 -
      55 503 894 727 181 654 479 874 499 299 363 568 450 v^14 - 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 +
      49 098 725 383 619 996 457 776 558 599 182 750 v^16 - 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 +
      10 156 737 918 838 949 953 161 614 612 963 835 v^18 - 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
    1 020 840 814 333 559 327 543 812 431 890 099 118 462 960 000 000,
   (-861 938 718 370 242 204 295 608 211 266 295 749 515 640 000 000 +
      684 433 253 827 819 307 591 593 725 116 638 734 918 408 000 000 v +
      56 453 863 409 949 377 565 172 037 271 904 795 583 245 800 000 v^2 -
      19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 -
      7 978 466 780 980 478 967 648 684 319 768 154 297 604 375 000 v^4 +
      1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 +
      454 647 992 046 551 629 938 068 763 322 137 557 640 847 500 v^6 - 39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 -
      13 776 327 979 571 728 133 852 521 864 693 297 147 931 250 v^8 - 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 -
      82 512 570 458 629 569 770 475 904 931 084 945 494 875 v^10 + 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 +
      4 797 148 900 075 425 726 389 295 085 994 209 777 500 v^12 + 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 +
      101 218 323 101 025 844 900 848 255 798 867 235 650 v^14 - 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 -
      733 123 275 960 863 452 231 815 446 003 913 250 v^16 - 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 -
      24 177 861 079 325 177 445 822 443 717 163 795 v^18 - 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /
    2 041 681 628 667 118 655 087 624 863 780 198 236 925 920 000 000};
```

今回は 参考文献[1]「可解な 5 次方程式について」を「参考」にして，Gal= F_{20}の方程式を解いてみたいと思います．この文献は，Galois群の判別式など，特に理論的な面に価値があると思うのですが，今回は，5 次方程式の解法に絞って話をしたいと思います．またMathematicaの計算力をフルに使うので，文献の方法とはかなり違います．なおこのノートブックは変数の再利用を考えず，見やすさを一番に考え，変数の再定義を頻繁に行っています．ご注意ください．

§ 1 .4次の分解方程式 $h(x)$ を作る

1-1. 分解方程式の定義

$C_5 \triangleright \{Id\}$の部分に注目し，ラグランジュの5次分解式をつくる .(ζは1の原始 5 乗根のひとつ．) このとき x_k $(1 \leqq k \leqq 5)$ を自由変数，すなわち $f = 0$ の解となっていることは忘れるものとする．

In[5]:=
```
Clear[x1, x2, x3, x4, x5, ξ]
r0 = x1 + x2 + x3 + x4 + x5;
r1 = x1 + ξ x2 + ξ^2 x3 + ξ^3 x4 + ξ^4 x5;
r2 = x1 + ξ^2 x2 + ξ^4 x3 + ξ x4 + ξ^3 x5;
r3 = x1 + ξ^3 x2 + ξ x3 + ξ^4 x4 + ξ^2 x5;
r4 = x1 + ξ^4 x2 + ξ^3 x3 + ξ^2 x4 + ξ x5;
```

解と係数の関係より r0 = 0.　また以下の性質が成り立つ.

$$
(\#1)\begin{cases}
\text{r1を}\sigma\text{で移すと r1} \to \zeta^4\,\text{r1}, & \tau\text{で移すと r1}\to\text{r3}, \ \tau^2 \text{ で移すと r1}\to\text{r4}, \\
\text{r2を}\sigma\text{で移すと r2} \to \zeta^3\,\text{r2}, & \tau\text{で移すと r2}\to\text{r1}, \ \tau^2 \text{ で移すと r2}\to\text{r3}, \\
\text{r3を}\sigma\text{で移すと r3} \to \zeta^2\,\text{r3}, & \tau\text{で移すと r3}\to\text{r4}, \ \tau^2 \text{ で移すと r3}\to\text{r2}, \\
\text{r4を}\sigma\text{で移すと r4} \to \zeta\,\text{r4}, & \tau\text{で移すと r4}\to\text{r2}, \ \tau^2 \text{ で移すと r4}\to\text{r1},
\end{cases}
$$

τは 分解式を「r1→r3→r4→r2→r1」のように移し，σは「r1 → ξ^4 r1→ → ξ^3 r1→ → ξ^2 r1 → ξ r1 → r1」のように移す.

さらに 同型写像 ω: $\zeta \to \zeta^3$ とすると，分解式は次のように移る．ωはτと同じように分解式を移す.

(by ω) r1→r3→r4→r2 →r1⋯　　(by ω^2) r1↔r4，r2↔r3

In[11]:=

$R_1 = {r_1}^5$, $R_2 = {r_2}^5$, $R_3 = {r_3}^5$, $R_4 = {r_4}^5$ と定義し，${r_1}^5$ を展開し, ζについて整理した式を

$R_1 = {r_1}^5 = l_0 + l_1\,\zeta + l_2\,\zeta^2 + l_3\,\zeta^3 +$ $l_4\,\zeta^4$ (l_i は ζを含まない x_j のみの式) とおく．これを ω で移すと次の式が得られる.

$$
(\#2)\begin{cases}
R_1 = {r_1}^5 = l_0 + l_1\,\xi + l_2\,\xi^2 + l_3\,\xi^3 + l_4\,\xi^4 \\
R_2 = {r_2}^5 = l_0 + l_3\,\xi + l_1\,\xi^2 + l_4\,\xi^3 + l_2\,\xi^4 \\
R_3 = {r_3}^5 = l_0 + l_2\,\xi + l_4\,\xi^2 + l_1\,\xi^3 + l_3\,\xi^4 \\
R_4 = {r_4}^5 = l_0 + l_4\,\xi + l_3\,\xi^2 + l_2\,\xi^3 + l_1\,\xi^4
\end{cases}
$$

(#1) より，σで $R_1 \sim R_4$ は動かない．よってσで $l_0 \sim l_4$ も動かない.

次に τによって「$R_1 \to R_3 \to R_4 \to R_2 \to R_1$」と動くから,

「$l_1 \to l_2 \to l_4 \to l_3 \to l_1$」と動く．また l_0 は動かない.

次に $\boldsymbol{h(x) = (x - l_1)(x - l_2)(x - l_3)(x - l_4)}$ と定義すると,
l_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ は τによって動くので有理数でない.
また σとτ によって $h(x)$ の係数は変わらないので, $h(x)$ の係数は $F_{20} = \langle \sigma, \tau \rangle$ の固定体Q (ζ) に入る. しかし, l_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ は ζ を含んでないから
$h(x)$ の係数は有理数となる. まとめると「**$h(x)$ は Q上既約な 有理数係数の4次式**」となる.
同様に l_0 も σとτによって動かず ζ を含んでないから 有理数となる.

Mathematicaのような計算力があれば, 上の１行で話は終わり である. $h(x)$ の係数は Qに入るので「単純計算」で $h(x)$ は求まる. そして4次方程式は解の公式があるので, l_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ は求まる. これを(#2)へ代入すれば R_1~R_4が求まる. その５乗根を取ると r_1~r_4 が求まり, それを代入すると x_1~x_5 が求まる.

(私は分かりやすくするために「４次の分解方程式」と勝手に呼んでいますが, 文献[1] では何も名前が与えられていません.)

1-2. 分解方程式h(x)の式を求める

以上を Mathematica で実行しましょう. 解くだけなら不要ですが,
先ず l_i $(0 \leqq i \leqq 4)$ を $x_1 \sim x_5$ の式で見てみましょう.

In[12]:=
```
r1^5 // PolynomialMod[#, ζ^5 - 1] & // Collect[#, ζ] &
```

Out[12]=

$$
\begin{aligned}
& x1^{5} + x2^{5} + 20\, x1\, x2^{3}\, x3 + 30\, x1^{2}\, x2\, x3^{2} + x3^{5} + 30\, x1^{2}\, x2^{2}\, x4 + 20\, x1^{3}\, x3\, x4 + 20\, x2\, x3^{3}\, x4 + \\
& 30\, x2^{2}\, x3\, x4^{2} + 30\, x1\, x3^{2}\, x4^{2} + 20\, x1\, x2\, x4^{3} + x4^{5} + 20\, x1^{3}\, x2\, x5 + 30\, x2^{2}\, x3^{2}\, x5 + \\
& 20\, x1\, x3^{3}\, x5 + 20\, x2^{3}\, x4\, x5 + 120\, x1\, x2\, x3\, x4\, x5 + 30\, x1^{2}\, x4^{2}\, x5 + 20\, x3\, x4^{3}\, x5 + 30\, x1\, x2^{2}\, x5^{2} + \\
& 30\, x1^{2}\, x3\, x5^{2} + 30\, x3^{2}\, x4\, x5^{2} + 30\, x2\, x4^{2}\, x5^{2} + 20\, x2\, x3\, x5^{3} + 20\, x1\, x4\, x5^{3} + x5^{5} + \\
& (5\, x1^{4}\, x2 + 5\, x2^{4}\, x3 + 30\, x1\, x2^{2}\, x3^{2} + 10\, x1^{2}\, x3^{3} + 20\, x1\, x2^{3}\, x4 + 60\, x1^{2}\, x2\, x3\, x4 + 5\, x3^{4}\, x4 + \\
& \quad 10\, x1^{3}\, x4^{2} + 30\, x2\, x3^{2}\, x4^{2} + 10\, x2^{2}\, x4^{3} + 20\, x1\, x3\, x4^{3} + 30\, x1^{2}\, x2^{2}\, x5 + 20\, x1^{3}\, x3\, x5 + \\
& \quad 20\, x2\, x3^{3}\, x5 + 60\, x2^{2}\, x3\, x4\, x5 + 60\, x1\, x3^{2}\, x4\, x5 + 60\, x1\, x2\, x4^{2}\, x5 + 5\, x4^{4}\, x5 + 10\, x2^{3}\, x5^{2} + \\
& \quad 60\, x1\, x2\, x3\, x5^{2} + 30\, x1^{2}\, x4\, x5^{2} + 30\, x3\, x4^{2}\, x5^{2} + 10\, x3^{2}\, x5^{3} + 20\, x2\, x4\, x5^{3} + 5\, x1\, x5^{4})\, \zeta + \\
& (10\, x1^{3}\, x2^{2} + 5\, x1^{4}\, x3 + 10\, x2^{3}\, x3^{2} + 20\, x1\, x2\, x3^{3} + 5\, x2^{4}\, x4 + 60\, x1\, x2^{2}\, x3\, x4 + 30\, x1^{2}\, x3^{2}\, x4 + \\
& \quad 30\, x1^{2}\, x2\, x4^{2} + 10\, x3^{3}\, x4^{2} + 20\, x2\, x3\, x4^{3} + 5\, x1\, x4^{4} + 20\, x1\, x2^{3}\, x5 + 60\, x1^{2}\, x2\, x3\, x5 + \\
& \quad 5\, x3^{4}\, x5 + 20\, x1^{3}\, x4\, x5 + 60\, x2\, x3^{2}\, x4\, x5 + 30\, x2^{2}\, x4^{2}\, x5 + 60\, x1\, x3\, x4^{2}\, x5 + 30\, x2^{2}\, x3\, x5^{2} + \\
& \quad 30\, x1\, x3^{2}\, x5^{2} + 60\, x1\, x2\, x4\, x5^{2} + 10\, x4^{3}\, x5^{2} + 10\, x1^{2}\, x5^{3} + 20\, x3\, x4\, x5^{3} + 5\, x2\, x5^{4})\, \zeta^{2} + \\
& (10\, x1^{2}\, x2^{3} + 20\, x1^{3}\, x2\, x3 + 10\, x2^{2}\, x3^{3} + 5\, x1\, x3^{4} + 5\, x1^{4}\, x4 + 20\, x2^{3}\, x3\, x4 + 60\, x1\, x2\, x3^{2}\, x4 + \\
& \quad 30\, x1\, x2^{2}\, x4^{2} + 30\, x1^{2}\, x3\, x4^{2} + 10\, x3^{2}\, x4^{3} + 5\, x2\, x4^{4} + 5\, x2^{4}\, x5 + 60\, x1\, x2^{2}\, x3\, x5 + \\
& \quad 30\, x1^{2}\, x3^{2}\, x5 + 60\, x1^{2}\, x2\, x4\, x5 + 20\, x3^{3}\, x4\, x5 + 60\, x2\, x3\, x4^{2}\, x5 + 20\, x1\, x4^{3}\, x5 + 10\, x1^{3}\, x5^{2} + \\
& \quad 30\, x2\, x3^{2}\, x5^{2} + 30\, x2^{2}\, x4\, x5^{2} + 60\, x1\, x3\, x4\, x5^{2} + 20\, x1\, x2\, x5^{3} + 10\, x4^{2}\, x5^{3} + 5\, x3\, x5^{4})\, \zeta^{3} + \\
& (5\, x1\, x2^{4} + 30\, x1^{2}\, x2^{2}\, x3 + 10\, x1^{3}\, x3^{2} + 5\, x2\, x3^{4} + 20\, x1^{3}\, x2\, x4 + 30\, x2^{2}\, x3^{2}\, x4 + 20\, x1\, x3^{3}\, x4 + \\
& \quad 10\, x2^{3}\, x4^{2} + 60\, x1\, x2\, x3\, x4^{2} + 10\, x1^{2}\, x4^{3} + 5\, x3\, x4^{4} + 5\, x1^{4}\, x5 + 20\, x2^{3}\, x3\, x5 + 60\, x1\, x2\, x3^{2}\, x5 + \\
& \quad 60\, x1\, x2^{2}\, x4\, x5 + 60\, x1^{2}\, x3\, x4\, x5 + 30\, x3^{2}\, x4^{2}\, x5 + 20\, x2\, x4^{3}\, x5 + 30\, x1^{2}\, x2\, x5^{2} + \\
& \quad 10\, x3^{3}\, x5^{2} + 60\, x2\, x3\, x4\, x5^{2} + 30\, x1\, x4^{2}\, x5^{2} + 10\, x2^{2}\, x5^{3} + 20\, x1\, x3\, x5^{3} + 5\, x4\, x5^{4})\, \zeta^{4}
\end{aligned}
$$

全てが長いので l_0 だけ出力します.

In[13]:=
```
{l0, l1, l2, l3, l4} = CoefficientList[%, ξ]; l0
```

Out[13]=

$$x1^5 + x2^5 + 20\,x1\,x2^3\,x3 + 30\,x1^2\,x2\,x3^2 + x3^5 + 30\,x1^2\,x2^2\,x4 + 20\,x1^3\,x3\,x4 + 20\,x2\,x3^3\,x4 + 30\,x2^2\,x3\,x4^2 + 30\,x1\,x3^2\,x4^2 + 20\,x1\,x2\,x4^3 + x4^5 + 20\,x1^3\,x2\,x5 + 30\,x2^2\,x3^2\,x5 + 20\,x1\,x3^3\,x5 + 20\,x2^3\,x4\,x5 + 120\,x1\,x2\,x3\,x4\,x5 + 30\,x1^2\,x4^2\,x5 + 20\,x3\,x4^3\,x5 + 30\,x1\,x2^2\,x5^2 + 30\,x1^2\,x3\,x5^2 + 30\,x3^2\,x4\,x5^2 + 30\,x2\,x4^2\,x5^2 + 20\,x2\,x3\,x5^3 + 20\,x1\,x4\,x5^3 + x5^5$$

この後は F_{20} の固定体が Q（ζ）であることを使わないといけないので，
x1～x5 に 原始元v による表現 $x1～$x5 を代入して，h（x）の式を求めます．

In[14]:=
```
rule = {x1 → $x1, x2 → $x2, x3 → $x3, x4 → $x4, x5 → $x5};
l0 = l0 /. rule // Expand // PolynomialMod[#, V[v]] &
l1 = l1 /. rule // Expand // PolynomialMod[#, V[v]] &;
l2 = l2 /. rule // Expand // PolynomialMod[#, V[v]] &;
l3 = l3 /. rule // Expand // PolynomialMod[#, V[v]] &;
l4 = l4 /. rule // Expand // PolynomialMod[#, V[v]] &;
l1 // Style[#, Small] &
```

Out[15]=

1500

Out[20]=

$$\frac{29\,455\,770\,674\,010\,072\,004\,825\,875}{72\,475\,421\,388\,149\,690\,474\,791} + \frac{1\,327\,705\,550\,783\,564\,801\,064\,152\,997\,465\,v}{7\,029\,970\,923\,807\,743\,676\,673\,777\,418} - \frac{21\,752\,743\,281\,981\,683\,631\,495\,v^2}{337\,487\,410\,422\,117\,301\,396} - \frac{682\,681\,279\,093\,389\,693\,446\,791\,636\,521\,v^3}{19\,805\,040\,320\,855\,343\,070\,489\,570\,840} + \frac{10\,056\,682\,901\,322\,355\,754\,791\,725\,v^4}{2\,319\,213\,484\,420\,790\,095\,193\,312} + \frac{14\,802\,761\,733\,541\,035\,688\,438\,256\,922\,801\,v^5}{13\,610\,023\,708\,491\,791\,758\,040\,433\,081\,248} - \frac{29\,761\,316\,194\,214\,581\,374\,491\,v^6}{4\,638\,426\,968\,841\,580\,190\,386\,624} - \frac{32\,070\,436\,771\,529\,328\,563\,332\,810\,357\,539\,v^7}{1\,361\,002\,370\,849\,179\,175\,804\,043\,308\,124\,800} - \frac{34\,340\,211\,895\,105\,676\,021\,405\,v^8}{9\,276\,853\,937\,683\,160\,380\,773\,248} - \frac{3\,068\,756\,020\,420\,744\,437\,619\,803\,515\,v^9}{27\,220\,047\,416\,983\,583\,516\,080\,866\,162\,496} - \frac{3\,363\,831\,604\,755\,816\,441\,007\,v^{10}}{278\,305\,618\,130\,494\,811\,423\,197\,440} - \frac{53\,101\,148\,040\,741\,830\,810\,013\,215\,951\,v^{11}}{27\,220\,047\,416\,983\,583\,516\,080\,866\,162\,496\,000} + \frac{18\,480\,149\,900\,936\,342\,425\,v^{12}}{13\,915\,280\,906\,524\,740\,571\,159\,872} + \frac{336\,630\,125\,864\,177\,093\,110\,379\,v^{13}}{1\,020\,751\,778\,136\,884\,381\,853\,032\,481\,093\,600} + \frac{3\,847\,642\,729\,072\,690\,963\,v^{14}}{231\,921\,348\,442\,079\,009\,519\,331\,200} - \frac{477\,010\,179\,223\,449\,670\,331\,484\,307\,v^{15}}{612\,451\,066\,882\,130\,629\,111\,819\,488\,656\,160\,000} - \frac{15\,574\,399\,638\,295\,997\,v^{16}}{83\,491\,685\,439\,148\,443\,426\,959\,232} + \frac{666\,993\,427\,678\,243\,463\,161\,v^{17}}{28\,119\,883\,695\,230\,974\,706\,695\,109\,672\,000} - \frac{63\,745\,289\,960\,693\,741\,v^{18}}{20\,872\,921\,359\,787\,110\,856\,739\,808\,000} + \frac{4\,802\,238\,877\,696\,426\,545\,016\,361\,v^{19}}{6\,124\,510\,668\,821\,306\,291\,118\,194\,886\,561\,600\,000}$$

l_0は確かに有理数です． l_1のみ出力しましたが l_2, l_3, l_4 も vが残った長い式になっています．それでは *h(x)* を「単純計算」で求めましょう．

In[21]:=
```
h[x_] = (x - l1) (x - l2) (x - l3) (x - l4) // Expand // PolynomialMod[#, V[v]] &
IrreducibleQ[%]
```

Out[21]=

$$39\,212\,068\,359\,375 - 1\,181\,250\,000\,x + 2\,250\,000\,x^2 + 1500\,x^3 + x^4$$

Out[22]=

True

確かに有理数係数で既約な 4 次式です．因みに「$l_0+l_1+l_2+l_3+l_4= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^5 =0$」が成り立つので，$x^3$ の係数はl_0と等しいです．

§2. $h(x)$ を解いて R_1~R_4の候補を求める

2-1. h(x)を解く

解の公式を使っても良いのですが，ここでは文献[1] を参考にします．(#1) よりσで l_1 ~ l_4は動かず, また τによって「$l_1 \to l_2 \to l_4 \to l_3 \to l_1$ 」と動くので， D_5=<σ, τ^2> によって l_1+l_4, l_2+l_3, $l_1 l_4$, $l_2 l_3$ は動きません．故にこれらは D_5の固定体 Q($\sqrt{5}$)に入ります．

$h(x)$=(x-l_1)(x-l_2)(x-l_3)(x-l_4)={ x^2-(l_1+l_4)x+$l_1 l_4$}{ x^2-(l_2+l_3)x+$l_2 l_3$} ですから，$h(x)$ は Q($\sqrt{5}$) の係数を持つ2次式の積に直せます． ver13.3より新しい Mathematica では次のように因数分解出来ます．(ver13.3より古い場合は Solveをお使い下さい.)

Factor[$poly$, Extension → {a_1, a_2, …}]
代数的数a_i の有理的組合せからなる係数を使い，多項式を因数分解する.

In[23]:=
```
hx = Factor[h[x], Extension → Sqrt[5]]
```
Out[23]=

$$-\left(\left(-6468750+725625\sqrt{5}+\left(-750+1500\sqrt{5}\right)x-x^2\right)\left(6468750+725625\sqrt{5}+\left(750+1500\sqrt{5}\right)x+x^2\right)\right)$$

h(x) = h1*h2 (h1, h2 は2次式) と分けると

In[24]:=
```
h1 = -(List @@ hx)[[2]]
h2 = (List @@ hx)[[3]]
```
Out[24]=

$$6468750-725625\sqrt{5}-\left(-750+1500\sqrt{5}\right)x+x^2$$

Out[25]=

$$6468750+725625\sqrt{5}+\left(750+1500\sqrt{5}\right)x+x^2$$

h1 = 0 の解を {x11, x12}, h2 = 0 の解を {x21,x22} とおき，{l1,l2,l3,l4}={ x11, x21, x22, x12} と置きます．

In[26]:=
```
{l1, l2, l3, l4} =
  {x /. Solve[h1 == 0, x], x /. Solve[h2 == 0, x]} // Flatten[#, 1][[{1, 3, 4, 2}]] &
```
Out[26]=

$$\left\{75\left(-5+10\sqrt{5}-i\sqrt{625-29\sqrt{5}}\right), 75\left(-5-10\sqrt{5}-i\sqrt{625+29\sqrt{5}}\right),\right.$$
$$\left.75\left(-5-10\sqrt{5}+i\sqrt{625+29\sqrt{5}}\right), 75\left(-5+10\sqrt{5}+i\sqrt{625-29\sqrt{5}}\right)\right\}$$

【注】同じことが Solve でも出来ます．(順序もたまたま揃っています.)

In[27]:=
```
{l1, l2, l3, l4} = x /. Solve[h[x] == 0, x, Quartics → True][[{1, 3, 4, 2}]]
```
Out[27]=

$$\left\{75\left(-5+10\sqrt{5}-i\sqrt{625-29\sqrt{5}}\right), 75\left(-5-10\sqrt{5}-i\sqrt{625+29\sqrt{5}}\right),\right.$$
$$\left.75\left(-5-10\sqrt{5}+i\sqrt{625+29\sqrt{5}}\right), 75\left(-5+10\sqrt{5}+i\sqrt{625-29\sqrt{5}}\right)\right\}$$

2-2. R_1~R_4の候補を求める

もちろん，ここで，$l_1 \sim l_4$ が本来あるべき $l_1 \sim l_4$ と一致しているとは限りません．しかし l_1 と l_4，l_2 と l_3 は同じ２次方程式の解であることから，正しい (l_1, l_2, l_3, l_4) は，$l_i = i$ と省略すると，(1, 2, 3, 4)，(1, 3, 2, 4)，(4, 2, 3, 1)，(4, 3, 2, 1)，(2, 1, 4, 3)，(2, 4, 1, 3)，(3, 1, 4, 2)，(3, 4, 1, 2) の８通りのいずれか．

ここで(#2)の定義より「(1,2,3,4)と (2,4,1,3)と(3,1,4,2)と(4,3,2,1)」,「 (1,3,2,4)と (2,1,4,3)と(3,4,1,2)と(4,2,3,1)」は同じ R_1~R_4の集合を与える．故に R_1~R_4 は次のA,B2組の何れかになります．(*F20_Solutions . nb* でも結局は2種類の比較となっていました．このやり方だと「2種類」になる理由が，よりはっきりしますね.)

In[127]:=
```
ξ = Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5];
```

In[128]:=
```
(*A組(1,2,3,4),(2,4,1,3),(3,1,4,2),(4,3,2,1)*)
R1a = l0 + l1 ξ + l2 ξ^2 + l3 ξ^3 + l4 ξ^4 // FullSimplify;
R2a = l0 + l3 ξ + l1 ξ^2 + l4 ξ^3 + l2 ξ^4 // FullSimplify;
R3a = l0 + l2 ξ + l4 ξ^2 + l1 ξ^3 + l3 ξ^4 // FullSimplify;
R4a = l0 + l4 ξ + l3 ξ^2 + l2 ξ^3 + l1 ξ^4 // FullSimplify;
(*B組(1,3,2,4),(2,1,4,3),(3,4,1,2),(4,2,3,1)*)
R1b = l0 + l1 ξ + l3 ξ^2 + l2 ξ^3 + l4 ξ^4 // FullSimplify;
R2b = l0 + l2 ξ + l1 ξ^2 + l4 ξ^3 + l3 ξ^4 // FullSimplify;
R3b = l0 + l3 ξ + l4 ξ^2 + l1 ξ^3 + l2 ξ^4 // FullSimplify;
R4b = l0 + l4 ξ + l2 ξ^2 + l3 ξ^3 + l1 ξ^4 // FullSimplify;
Ra = {R1a, R2a, R3a, R4a}
Rb = {R1b, R2b, R3b, R4b}
```

Out[136]=

$$\left\{225\left(25+8\sqrt{10}\right),\ -75\left(25+7\sqrt{10}\right),\ 75\left(-25+7\sqrt{10}\right),\ 225\left(25-8\sqrt{10}\right)\right\}$$

Out[137]=

$$\left\{375\left(15+2\sqrt{2}\right),\ 375\left(-5+11\sqrt{2}\right),\ -375\left(5+11\sqrt{2}\right),\ 5625-750\sqrt{2}\right\}$$

l_1 と l_4，l_2 と l_3 は複素共役だから $R_1 \sim R_4$ は実数です．

§3.(おまけ) 束縛条件から r_1~r_4 を決めて，解を求める

3-1. $w_1 = r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$ ，$w_2 = r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$ の値から r_1~ r_4 を決める

これから後は *F20_Solutions . nb* と**全く同じです**. 「R_1~R_4 が実数のときは r_1~r_4 が全て実数としても一般性を失わない」(D5_Solutions.nb) から, A,Bのケースに対する r_iの値のセットを *ra*と *rb* とすると,

In[39]:=
```
realRoot[p_] := Sign[p] Abs[p]^(1/5)
ra = realRoot /@ Ra
rb = realRoot /@ Rb
```

Out[40]=

$$\left\{15^{2/5}\left(25+8\sqrt{10}\right)^{1/5},\ -5^{2/5}\left(3\left(25+7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5},\ -5^{2/5}\left(3\left(25-7\sqrt{10}\right)\right)^{1/5},\ -15^{2/5}\left(-25+8\sqrt{10}\right)^{1/5}\right\}$$

Out[41]=

$$\left\{5^{3/5}\left(3\left(15+2\sqrt{2}\right)\right)^{1/5},\ 5^{3/5}\left(3\left(-5+11\sqrt{2}\right)\right)^{1/5},\ -5^{3/5}\left(3\left(5+11\sqrt{2}\right)\right)^{1/5},\ \left(5625-750\sqrt{2}\right)^{1/5}\right\}$$

$w_1 = r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$ ，$w_2 = r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$ とおく．F20_Solutions.nb で述べたように $w_1 + w_2$，$(w_1 - w_2)^2$ は F_{20} の固定体Q（ζ）に入る．「単純計算」して

In[42]:=
```
Clear[ζ]
w1 = r1 r2^2 + r3^2 r4 /. rule;   w2 = r1^2 r3 + r2 r4^2 /. rule;
w1 + w2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &
(w1 - w2)^2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &
```

Out[44]=

0

Out[45]=

90 000

raとrbのセットの内，$w_1 + w_2$，$(w_1 - w_2)^2$ の値が上と一致するものを見つけるとよい.
　時間の節約のため有効小数で計算する.

In[46]:=
```
sum[{r1_, r2_, r3_, r4_}] := (w1 = r1 r2^2 + r3^2 r4;
  w2 = r1^2 r3 + r2 r4^2;
  w1 + w2)
minusSquared[{r1_, r2_, r3_, r4_}] := (w1 = r1 r2^2 + r3^2 r4;
  w2 = r1^2 r3 + r2 r4^2;
  (w1 - w2)^2)

{sum[ra], minusSquared[ra] - 90000} // N
{sum[rb], minusSquared[rb] - 90000} // N
```

Out[48]=

$\{-2.84217\times10^{-14},\ 7.27596\times10^{-11}\}$

Out[49]=

{302.983, 73 175.6}

ご覧のように 正しいセットは *ra* と分かる．r_1~r_4 に *ra* を代入すれば, f(x)=0 の解 x_i が求まる.

3-2. r_1~r_4を代入して, 方程式の解 x_1~ x_5 を求める

In[50]:=
```
{$r1, $r2, $r3, $r4} = ra;
```

F20_Solutions.nb と同じ単なる代入です.

In[51]:=
```
ξ = Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5];
x1 = 1 / 5 ($r1 + $r2 + $r3 + $r4) // Simplify
x2 = 1 / 5 (ξ^4 $r1 + ξ^3 $r2 + ξ ^2 $r3 + ξ $r4) // Simplify
x3 = 1 / 5 (ξ^3 $r1 + ξ $r2 + ξ^4 $r3 + ξ^2 $r4) // Simplify
x4 = 1 / 5 (ξ^2 $r1 + ξ^4 $r2 + ξ $r3 + ξ^3 $r4) // Simplify
x5 = 1 / 5 (ξ $r1 + ξ^2 $r2 + ξ ^3 $r3 + ξ^4 $r4) // Simplify
```

Out[52]=

$$-\frac{3^{1/5}\left(\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}+\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}+\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}-\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\right)}{5^{3/5}}$$

Out[53]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-8i\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}+2\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

Out[54]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-8\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}-2\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2+2\sqrt{5}-i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+i\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

Out[55]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(-8i\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}-2\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-i\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2i\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

Out[56]=

$$\frac{1}{32\times 5^{3/5}}3^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\left(8\left(75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}-2\left(25+7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(25-7\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2+2\sqrt{5}+i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)+\left(-75+24\sqrt{10}\right)^{1/5}\left(2+2\sqrt{5}-i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+i\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)\right)$$

お約束の近似値です. 上が 累乗根の, 下が NSolve で求めた解です.

In[57]:=
```
N[{x1, x2, x3, x4, x5}] // Sort
x /. NSolve[f == 0, x] // Sort
```

Out[57]=

{−1.16886 − 1.45104 i, −1.16886 + 1.45104 i,
 −0.780669, 1.55919 − 1.41298 i, 1.55919 + 1.41298 i}

Out[58]=

{−1.16886 − 1.45104 i, −1.16886 + 1.45104 i,
 −0.780669, 1.55919 − 1.41298 i, 1.55919 + 1.41298 i}

§4. まとめ

Lagrange の 分解式を r_0,r_1,r_2,r_3,r_4 , $R_1 = r_1^5$, $R_2 = r_2^5$, $R_3 = r_3^5$, $R_4 = r_4^5$ とおき， さらに l_i を R_1を計算したときの ζ^i の係数と定めると， 次のようになります.

$$\begin{cases} R_1 = r_1^5 = l_0 + l_1\zeta + l_2\zeta^2 + l_3\zeta^3 + l_4\zeta^4 \\ R_2 = r_2^5 = l_0 + l_3\zeta + l_1\zeta^2 + l_4\zeta^3 + l_2\zeta^4 \\ R_3 = r_3^5 = l_0 + l_2\zeta + l_4\zeta^2 + l_1\zeta^3 + l_3\zeta^4 \\ R_4 = r_4^5 = l_0 + l_4\zeta + l_3\zeta^2 + l_2\zeta^3 + l_1\zeta^4 \end{cases}$$

ここで， $h(x) = (x - l_1)(x - l_2)(x - l_3)(x - l_4)$

と定義すると「 **$h(x)$ は Q上既約な 有理数係数の4次式** 」となります.

これはQ係数の方程式なので Mathematica では「単純計算」で式が求まります.
そして h（x）は4次方程式なので， 解の公式で解けます.
（Q（$\sqrt{5}$）係数の2つの2次式に因数分解して解くこともできます.）

この様にして（l_1, l_2, l_3, l_4）の候補が本質的には2組見つかり， それに対応して $R_1 \sim R_4$ と，
その実5乗根 $r_1 \sim r_4$ の候補も2組見つかります. （l_0 は有理数となるので「単純計算」で求まります）
この後は「F20_Solutions.nb」と全く同じです. その2組の内,
束縛条件「$w_1 = r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$, $w_2 = r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$」の値から $r_1 \sim r_4$ を決めます.

やはり「$h(x)$ を考えつく点が 鮮やか」です. 私の解き方だと $k1\sim k7$ までの7個の変数を「単純計算」して求めないといけなかったので， それと比べると $h(x)$ の 1 つだけで良いのは素晴らしいと思います. しかし最初の解法としては， 私のやり方も基本に忠実なやり方で良いのではないでしょうか？「巧い解法」と「基本に忠実な解法」はどちらも大切だと思います. (^_^;)

なお， プログラムをこれを使って書き直すことはしません. 実行時間のほとんどは「Galois群& 解のvによる表現を求める事」が占めています. そして方程式を解く計算自体は短いので 余り実行時間は変わらないと思います. そもそも $h(x)$ の「単純計算」は， まずl_1~l_4の「単純計算」が必要で， 次にl_1~l_4の(長～い)対称式4式も「単純計算」しないといけないので， 短い計算ではありません. これよりは l_1+l_4 , l_2+l_3, $l_1 l_4$, $l_2 l_3$ は Q(ζ)にも入るので， 直接これらを「単純計算」で求めた方がやや速いと思います. それでも合計8式の計算が必要です.

§4. 補足

ここでは触れませんでしたが， 文献[1]「可解な 5 次方程式について」には， 計算量を減らすような工夫も色々書いてあります. しかし初めに述べましたが， [1]の真の価値は, Galois 群の判別など理論的な面にあると思います . しかし それについては私はまだよく分かっていないので， 詳しい説明は省かせていただき， 6次分解式 f_{20}について少しだけ紹介します.

方程式の解を $x_1 \sim x_5$ とし， x_i は自由変数,
 すなわち特定の 方程式の解に固定されていないとします． ここで次の長い式θを定義します．

$$\theta = x_1^2 (x_2 x_5 + x_3 x_4) + x_2^2 (x_1 x_3 + x_4 x_5) + x_3^2 (x_1 x_5 + x_2 x_4) + x_4^2 (x_1 x_2 + x_3 x_5) + x_5^2 (x_1 x_4 + x_2 x_3)$$

θは 変換 $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$ と $\tau = (2, 3, 5, 4)$ について不変なので $F_{20} = \langle \sigma, \tau \rangle$ の固定体 に入ります． よってθは有理数です．
「$f = x^5 + 15 x + 12$」のときに「単純計算」してみると,

In[59]:=
```
Clear[x1, x2, x3, x4, x5]
θ = x1^2 (x2 x5 + x3 x4) + x2^2 ( x1 x3 + x4 x5) +
  x3^2 ( x1 x5 + x2 x4) + x4^2 (x1 x2 + x3 x5) + x5^2 (x1 x4 + x2 x3)
θ /. rule // PolynomialMod[#, V[v]] &(*x1,x2,x3,x4,x5に f=0 の解を代入*)
```

Out[60]=

$$(x2\, x3 + x1\, x4)\, x5^2 + x3^2 (x2\, x4 + x1\, x5) + x1^2 (x3\, x4 + x2\, x5) + x4^2 (x1\, x2 + x3\, x5) + x2^2 (x1\, x3 + x4\, x5)$$

Out[61]=

0

たまたま「θ=0」となりましたが， 一般に θ は有理数となります． x_i を自由変数に戻し， $\theta_1=\theta$. 更に, θに(1,2,3)を作用させたものを (1,2,3)θ の様に書き, 次の様に $\theta_1 \sim \theta_6$ を定義します.

$$\theta_1=\theta, \quad \theta_2=(1,2,3)\,\theta, \quad \theta_3=(1,3,2)\,\theta, \quad \theta_4=(1,2)\,\theta, \quad \theta_5=(2,3)\,\theta, \quad \theta_6=(1,3)\,\theta$$

In[62]:=

```
θ1 = x1^2 (x2 x5 + x3 x4) + x2^2 ( x1 x3 + x4 x5) +
   x3^2 ( x1 x5 + x2 x4) + x4^2 (x1 x2 + x3 x5) + x5^2 (x1 x4 + x2 x3)
θ2 = θ1 /. {x1 → x2, x2 → x3, x3 → x1}
θ3 = θ1 /. {x1 → x3, x3 → x2, x2 → x1}
θ4 = θ1 /. {x1 → x2, x2 → x1}
θ5 = θ1 /. {x2 → x3, x3 → x2}
θ6 = θ1 /. {x1 → x3, x3 → x1}
```

Out[62]=

$(x2\,x3 + x1\,x4)\,x5^2 + x3^2\,(x2\,x4 + x1\,x5) + x1^2\,(x3\,x4 + x2\,x5) + x4^2\,(x1\,x2 + x3\,x5) + x2^2\,(x1\,x3 + x4\,x5)$

Out[63]=

$(x1\,x3 + x2\,x4)\,x5^2 + x4^2\,(x2\,x3 + x1\,x5) + x1^2\,(x3\,x4 + x2\,x5) + x2^2\,(x1\,x4 + x3\,x5) + x3^2\,(x1\,x2 + x4\,x5)$

Out[64]=

$(x1\,x2 + x3\,x4)\,x5^2 + x3^2\,(x2\,x4 + x1\,x5) + x4^2\,(x1\,x3 + x2\,x5) + x2^2\,(x1\,x4 + x3\,x5) + x1^2\,(x2\,x3 + x4\,x5)$

Out[65]=

$(x1\,x3 + x2\,x4)\,x5^2 + x2^2\,(x3\,x4 + x1\,x5) + x3^2\,(x1\,x4 + x2\,x5) + x4^2\,(x1\,x2 + x3\,x5) + x1^2\,(x2\,x3 + x4\,x5)$

Out[66]=

$(x2\,x3 + x1\,x4)\,x5^2 + x2^2\,(x3\,x4 + x1\,x5) + x4^2\,(x1\,x3 + x2\,x5) + x1^2\,(x2\,x4 + x3\,x5) + x3^2\,(x1\,x2 + x4\,x5)$

Out[67]=

$(x1\,x2 + x3\,x4)\,x5^2 + x4^2\,(x2\,x3 + x1\,x5) + x3^2\,(x1\,x4 + x2\,x5) + x1^2\,(x2\,x4 + x3\,x5) + x2^2\,(x1\,x3 + x4\,x5)$

$S_5 = F_{20} + (1, 2, 3)\,F_{20} + (1, 3, 2)\,F_{20} + (1, 2)\,F_{20} + (2, 3)\,F_{20} + (1, 3)\,F_{20}$ ですから，
$\theta_1 \sim \theta_6$ についての対称式は $x_1 \sim x_5$ についての対称式でもあります． 故に

$$f_{20}(x) = (x - \theta_1)\,(x - \theta_2)\,(x - \theta_3)\,(x - \theta_4)\,(x - \theta_5)\,(x - \theta_6)$$

と定義すると， $f_{20}(x)$ は有理数係数の整式です．

そしてこの $f_{20}(x)$ を使って色々な定理が証明されます． 例えば

> 定理 4.2 Q係数既約5次方程式が可解になる条件は， その6次分解式 $f_{20}(x)$がちょうど1つの有理数根を持つことである．

証明は 文献［1］を読んでいただくとして，
ここでは実際に「 $f = x^5 + 15\,x + 12$ 」の時に， $f_{20}\,(x)$ を求めてみたいと思います．

fの n次対称式を s_n とすると， 解と係数の関係より， $s_1 = s_2 = s_3 = 0$， $s_4 = 15$， $s_5 = -12$

In[68]:=
```
f20[x_] = (x - θ1) (x - θ2) (x - θ3) (x - θ4) (x - θ5) (x - θ6) // Expand // Collect[#, x] &
```

Out[68]=
```
x^6 + x1^8 x2^8 x3^8 + … 8452 … +
 x^2 (x1^6 x2^6 x3^4 + 4 x1^6 x2^5 x3^5 + 4 x1^5 x2^6 x3^5 + x1^6 x2^4 x3^6 + 4 x1^5 x2^5 x3^6 + x1^4 x2^6 x3^6 + 3 x1^7 x2^5 x3^3 x4 +
    4 x1^6 x2^6 x3^3 x4 + 3 x1^5 x2^7 x3^3 x4 + 6 x1^7 x2^4 x3^4 x4 + 11 x1^6 x2^5 x3^4 x4 + 11 x1^5 x2^6 x3^4 x4 + 6 x1^4 x2^7 x3^4 x4 +
    3 x1^7 x2^3 x3^5 x4 + 11 x1^6 x2^4 x3^5 x4 + 6 x1^5 x2^5 x3^5 x4 + 11 x1^4 x2^6 x3^5 x4 + 3 x1^3 x2^7 x3^5 x4 + 4 x1^6 x2^3 x3^6 x4 +
    11 x1^5 x2^4 x3^6 x4 + 11 x1^4 x2^5 x3^6 x4 + 4 x1^3 x2^6 x3^6 x4 + … 2291 … + 4 x2^3 x3^3 x4^2 x5^8 + x1^2 x3^4 x4^2 x5^8 +
    4 x1 x2 x3^4 x4^2 x5^8 + x2^2 x3^4 x4^2 x5^8 + 4 x1^3 x2^2 x4^3 x5^8 + 4 x1^2 x2^3 x4^3 x5^8 + 4 x1^3 x2 x3 x4^3 x5^8 +
    8 x1^2 x2^2 x3 x4^3 x5^8 + 4 x1 x2^3 x3 x4^3 x5^8 + 4 x1^3 x3^2 x4^3 x5^8 + 8 x1^2 x2 x3^2 x4^3 x5^8 + 8 x1 x2^2 x3^2 x4^3 x5^8 +
    4 x2^3 x3^2 x4^3 x5^8 + 4 x1^2 x3^3 x4^3 x5^8 + 4 x1 x2 x3^3 x4^3 x5^8 + 4 x2^2 x3^3 x4^3 x5^8 + x1^2 x2^2 x4^4 x5^8 +
    4 x1^2 x2 x3 x4^4 x5^8 + 4 x1 x2^2 x3 x4^4 x5^8 + x1^2 x3^2 x4^4 x5^8 + 4 x1 x2 x3^2 x4^4 x5^8 + x2^2 x3^2 x4^4 x5^8) + x (… 1 …)
```

メモリでのサイズ：6.7 MB | もっと表示 | すべて表示 | アイコン化 | 完全な式をノートブックに保存

これを SymmetricReduction で対称式の値を代入して簡単にします．

In[69]:=
```
SymmetricReduction[f20[x], {x1, x2, x3, x4, x5}, {0, 0, 0, 15, -12}]
```

Out[69]=

$$\{324\,000\,000\, x + 20\,250\,000\, x^2 + 540\,000\, x^3 + 9000\, x^4 + 120\, x^5 + x^6,\ 0\}$$

第 2 成分は対称式に直せなかった残りですから，ここでは当然「0」です．そして

In[70]:=
```
f20[x_] = %[[1]]
```

Out[70]=

$$324\,000\,000\, x + 20\,250\,000\, x^2 + 540\,000\, x^3 + 9000\, x^4 + 120\, x^5 + x^6$$

In[71]:=
```
Factor[%]
```

Out[71]=

$$x\,(324\,000\,000 + 20\,250\,000\, x + 540\,000\, x^2 + 9000\, x^3 + 120\, x^4 + x^5)$$

確かに $f_{20}(x)=0$ は 有理数解を ちょうど一個持っています．

この他にも色々な定理が載っています．また θ は h1, h2 を作成する時にも使えます． 文献[1]では h(x)を作ってから解くのではなく，それを Q($\sqrt{5}$)で因数分解した式 h1,h2を直接作ります．その係数は非常に複雑な式で，その式を作るには x_1~x_5を自由変数と見た時の θ が必要です．そしてその公式を実際に使う時は，x_1~x_5 を 与えられた f の解と見たときの 有理数解θ を代入します． 詳しくは参考文献[1],[2],[4]を御覧ください. なお[1],[2]に載っている公式は「x^5+ax+b=0」にしか使えません． 言い換えると，この形の5次方程式なら，かなり高速に(おそらく10秒以内に)答えを求められます． 因みにその証明(?)は，非常に複雑なCASの計算を使う様です．私は2週間ほどやっていますが，まだ再現できていません． 驚いたことにMathematicaでは異なる結果が出ます．しかし，これは公式が間違いというわけではなく，Mathematicaの計算能力を超えているという事だと思います． 詳しくは 文献[2]を御覧ください.

さらに「x^5+p x^3 +q x^2 +rx +s=0」の「解の公式」もあるようです． （2020年の論文です．文献[4]にリンク https://hal.science/hal-02547734/document があります.）Groebner 基底を使ったすごい計算です． 公式は異常に長く全部書けばおそらく10ページでも収まりません． 例えば i5~i8は公式の変数の１つですがこうあります；We do not give here the expression of i5; i6; i7; i8 as polynomials in i4, because of their size : i8 needs 90 lines in our Maple program. なんと， 変数の１つ i8 が 90行に成ります． 多分他の i5~i7も負けず劣らず長いです． そしてi5~i8が公開されていないので，このリンク先にあるものだけでは公式は使えません． 通常の公式とはかなり異なります．