

目で見て分かるベクトル 7 -空間ベクトルの内積- 「講義編」Part1

2014年5月
生越 茂樹

(HD画質で作成してあります)

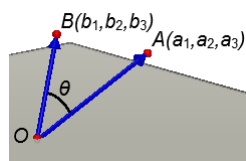
§ 1.「正射影」と「分配法則」

ベクトルの2つの演算 { 和・差・実数倍 - 斜交座標 (長さの比・面積の比と関係)
内積 - 余弦定理 (実際の長さ・角度と関係)

内積の主な法則

- ① $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ (内積の定義)
- ② $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき,
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ (定理)
- ③ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (分配法則)

正射影の
考え方



まとめ

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \vec{OA} \cdot \vec{OB} \cos \theta$ (余弦定理)の
一部を「 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \cdot OB \cos \theta$ 」と定義すると

↓

$\vec{OA} \cdot (\vec{OB} + \vec{OC}) = \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OC}$ (分配法則)
が成り立つことが発見された。
「分配法則を使った余弦定理の書き換え」が「内積」

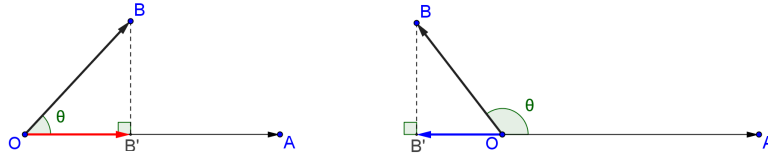
内積の分配法則から、余弦定理が導ける

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB} \text{ とおくと,} \\
 |\vec{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 && \leftarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \\
 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) && \leftarrow |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \\
 &= \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} && \leftarrow \text{分配法則} \\
 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \vec{a} \cdot \vec{b} && \leftarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \\
 &= OA^2 + OB^2 - 2 OA \cdot OB \cos \theta \text{ (余弦定理!)}
 \end{aligned}$$

【注】教科書では、①から余弦定理を使って②を導き、さらに②を使って③を導いている。ここでは、図形的に③を導く。

(内積)=(スクリーンの長さ)*(正射影の長さ)

←平面の場合と「全く」同じ



Bから直線OAに下ろした垂線の足をB', $\angle AOB = \theta$ とすると,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cos \theta = \begin{cases} OA \cdot OB' & (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ の時}) \\ -OA \cdot OB' & (90^\circ < \theta \leq 180^\circ \text{ の時}) \end{cases}$$

$\overrightarrow{OB'}$ を「 $\overrightarrow{OB}$ の $\overrightarrow{OA}$ への正射影ベクトル」と呼ぶ. 即ち,

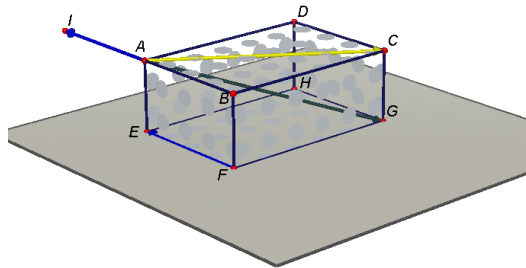
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\text{スクリーンの長さ}) \times (\text{正射影ベクトルの長さ})$$

(ただし「 $\vec{a}$ の上への正射影ベクトル $\vec{b}'$ の長さ」は,
 $\vec{b}'$ が $\vec{a}$ と逆向きの時は, マイナスの符号を付けるとする.)

練習問題1

直方体ABCD-EFGHがあり, $AB=3, AD=4, AE=2$ である.
 このとき, 次の内積を求めよ.

- (1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$
- (2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FE}$



(1) 直線ACを「スクリーン」とみて,

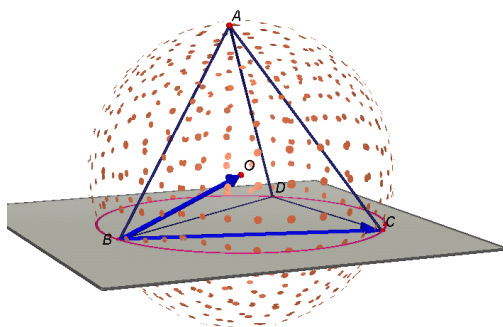
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = AC \times AC = AC^2 = 3^2 + 4^2 = \boxed{25}$$

(2) $\overrightarrow{FE}$ を平行移動して, 始点をAに移動したときの終点をIとする. 直線AIを「スクリーン」と見て,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = -AI \times AB = -3 \times 3 = \boxed{-9}$$

練習問題2

四面体A-BCDの外接球の中心をOとする．BC=3のとき， $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}$ を求めよ．

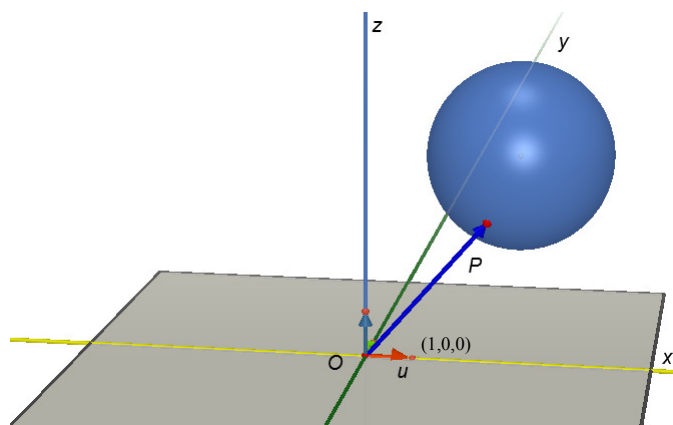


直線BCを「スクリーン」と考えて、

$$\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \times \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \times 3 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

練習問題3

点Pは中心A(3,2,4)，半径 $r=2$ の球S上を動く． $\vec{u}$ を図のベクトル， $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ とするとき， $\vec{u} \cdot \vec{v}$ の最大値と最小値を求めよ．



最大値は $1 \cdot 5 = \boxed{5}$ ，最小値は $1 \cdot 1 = \boxed{1}$

【内積の分配法則の証明】

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, B, C, Dから直線OAに下ろした垂線の足をそれぞれB', C', D'とする.
さらに $OA=1$, $\overrightarrow{OA}$ が $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ となす角がすべて鋭角のとき,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = OB' \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \cdot OC \cdot \cos \angle AOC = OC' \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 1 \cdot OD \cdot \cos \angle AOD = OD' \end{cases}$$

ところが, $\square OBDC$ は平行四辺形だから,

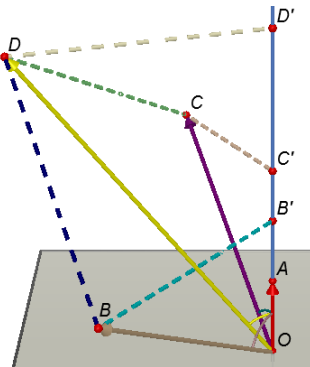
$$OC' = B'D' \quad \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OC' = B'D'$$

ゆえに,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OB' + B'D' = OD' = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$$

$$\text{即ち, } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \dots (*)$$

(鋭角でない時も, 同様に成り立つ.)

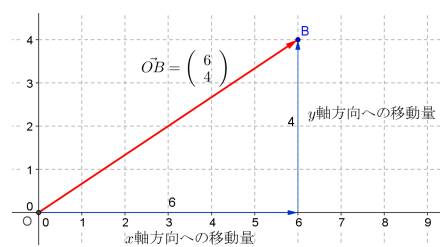
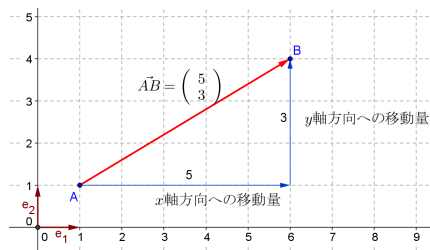


$\vec{a}$ の正射影ベクトル + $\vec{b}$ の正射影ベクトル = $(\vec{a} + \vec{b})$ の正射影ベクトル
(影を取ってから足しても, 足してから影を取っても同じ)

であるから, 「内積の分配法則」が成り立つ.

§ 2. ベクトルの成分

【復習】平面におけるベクトルの成分



2点の直交成分が $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ の時, $\overrightarrow{AB}$ の成分を

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \dots AからBまでのx軸方向の移動量 \\ \dots AからBまでのy軸方向の移動量 \end{array}$$

と定める. 特に, 始点が原点のときは,

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

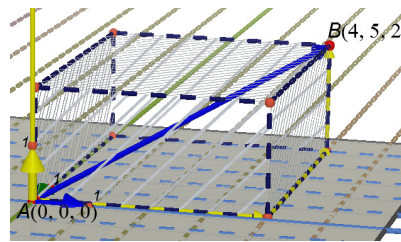
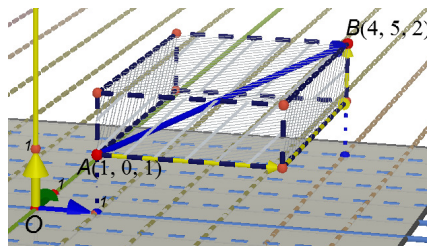
となり, 終点Bの座標成分と数字は一致する.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とすると,}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \vec{v} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$$

($\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ を基本ベクトルという.)

空間におけるベクトルの成分



2点の直交成分が $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ の時, $\overrightarrow{AB}$ の成分を

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \cdots A \text{ から } B \text{ までの } x \text{ 軸方向の移動量} \\ \cdots A \text{ から } B \text{ までの } y \text{ 軸方向の移動量} \\ \cdots A \text{ から } B \text{ までの } z \text{ 軸方向の移動量} \end{array}$$

と定める. 特に, 始点が原点のときは,

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

となり, 終点Bの座標と一致する.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると,

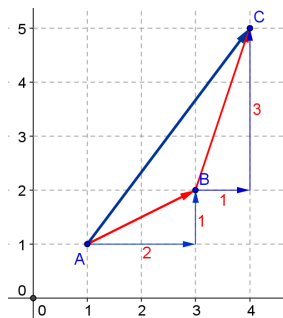
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff \vec{v} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3$$

($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を基本ベクトルという.)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix},$$

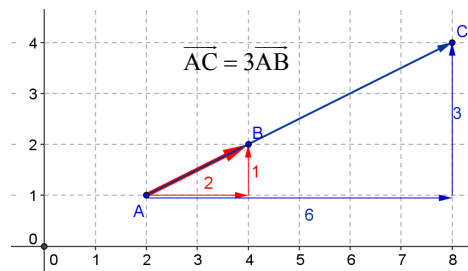
$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} \quad (k \text{ は実数})$$



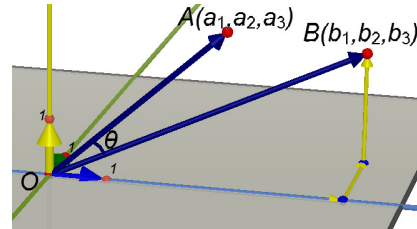
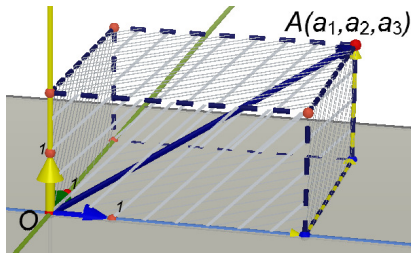
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix},$$

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix} \quad (k \text{ は実数})$$



§ 3.内積と成分



直交座標系で $A(a_1, a_2, a_3)$ の時, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると,

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ の上への正射影を考えて,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \vec{e}_1 = (\overrightarrow{OA} \text{ の } \vec{e}_1 \text{ への正射影ベクトルの長さ}) = a_1 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \vec{e}_2 = (\overrightarrow{OA} \text{ の } \vec{e}_2 \text{ への正射影ベクトルの長さ}) = a_2 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \vec{e}_3 = (\overrightarrow{OA} \text{ の } \vec{e}_3 \text{ への正射影ベクトルの長さ}) = a_3 \end{cases}$$

ゆえに $B(b_1, b_2, b_3)$ のとき, ベクトルの分配法則から

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = b_1 (\overrightarrow{OA} \cdot \vec{e}_1) + b_2 (\overrightarrow{OA} \cdot \vec{e}_2) + b_3 (\overrightarrow{OA} \cdot \vec{e}_3) = \boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

目で見て分かるベクトル 7 -空間ベクトルの内積- 「講義編」Part2

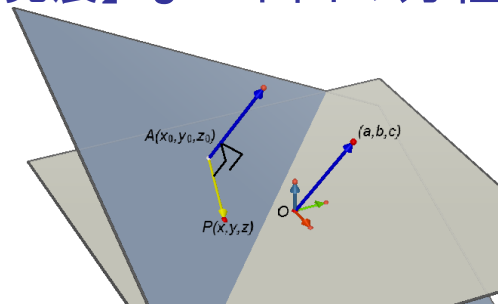
—平面の方程式—

2014年5月

生越 茂樹

(HD画質で作成してあります)

【発展】 § 4. 平面の方程式

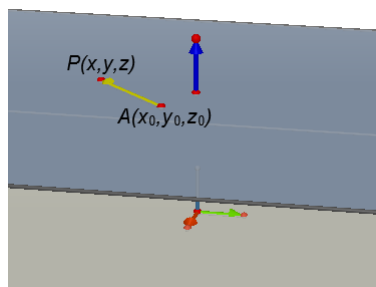


$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直で 点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通る平面を α とする. α 上の任意の点を $P(x, y, z)$ とすると

$$P \text{ が } \alpha \text{ 上にある} \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \iff \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ を整理すると, $ax + by + cz + d = 0$ (ただし $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$)

よって「 $ax + by + cz + d = 0$ は $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面」である.
 $(a, b, c, d \text{ は定数, } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$



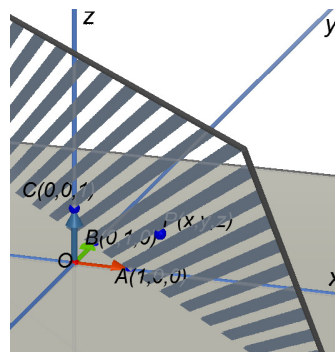
【例1】

$A(x_0, y_0, z_0)$ を通り, z 軸と垂直
(xy 平面と平行) な平面の式は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \iff z = z_0$$

同様にして,

yz 平面と平行な平面は, $x = x_0$
 zx 平面と平行な平面は, $y = y_0$

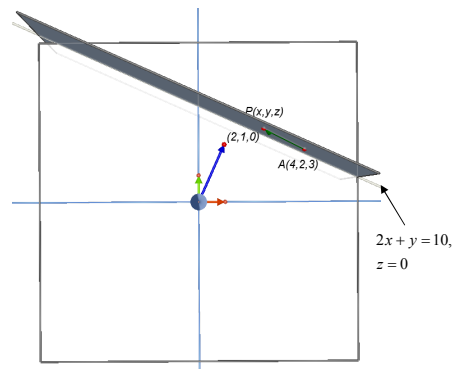
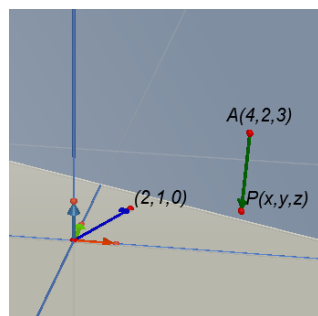


【例2】

$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$ を通る平面の式は
 $x + y + z = 1$

$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ を通る平面の式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



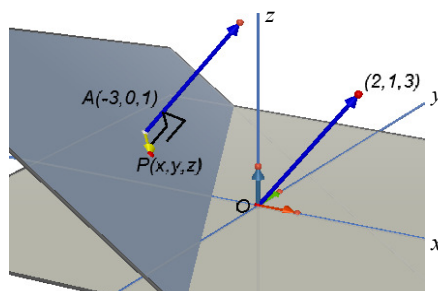
【例3】 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と垂直で 点A(4,2,3) を通る平面の式は,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = 0 \iff 2(x-4) + 1(y-2) + 0(z-3) = 0 \iff \boxed{2x + y = 10}$$

(xy 平面上の直線: $2x + y = 10, z = 0$ を, z 軸に平行に平行移動した平面)

【例4】 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と垂直で 点A(-3,0,1) を通る平面の式は,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+3 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2(x+3) + 1 \cdot y + 3(z-1) = 0 \iff \boxed{2x + y + 3z + 3 = 0}$$



【注】いろいろな表し方がある. 例えば,

$$z = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Pの} z \text{成分が,} \\ \text{Pの} x, y \text{成分にしたがって,} \\ \text{上の式で変わる} \end{array} \right)$$

【例題】3点を通る平面（法線ベクトルの利用）

$A(-1,1,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,2,1)$ を通る平面を α とする. α の式を求めよ.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \text{ の法線ベクトル(の1つ)を } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

$\vec{n}$ は平面ABCに垂直だから, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ かつ $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

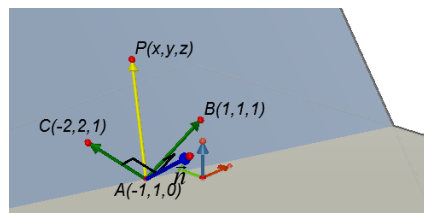
$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a + c = 0 & \dots ① \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -a + b + c = 0 & \dots ② \end{cases}$$

①より, $c = -2a$. ②へ代入して, $b = 3a$. 故に,

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \\ -2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ の長さは任意だから, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ として良い. 故に α 上の点を $P(x, y, z)$ とおくと,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff 1 \cdot (x+1) + 3(y-1) - 2z = 0 \iff \boxed{x + 3y - 2z - 2 = 0}$$



【別解1】平面の方程式の利用（法線ベクトルの利用）

平面の方程式を $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ (a, b, c, d 定数, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) とおく.

α 上に点 $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-2, 2, 1)$ があるから,

$$\begin{cases} -a + b + d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ -2a + 2b + c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b + d = a & \dots ① \\ b + c + d = -a & \dots ② \\ 2b + c + d = 2a & \dots ③ \end{cases}$$

これを b, c, d の方程式と見て解くと,

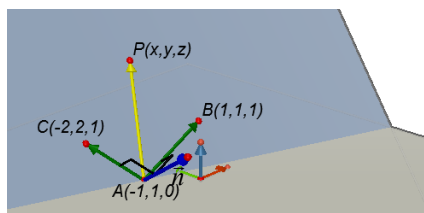
$$b = 3a, \quad c = -2a, \quad d = -2a$$

よって, α の式は

$$ax + 3ay - 2az - 2a = 0 \iff a(x + 3y - 2z - 2) = 0$$

$a \neq 0$ だから,

$$\boxed{\alpha: x + 3y - 2z - 2 = 0}$$



【別解2】共面条件の利用(α に平行な2つのベクトルの利用)

$P(x, y, z)$ が α 上にあるとき,

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (s, t \text{ は実数})$$

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

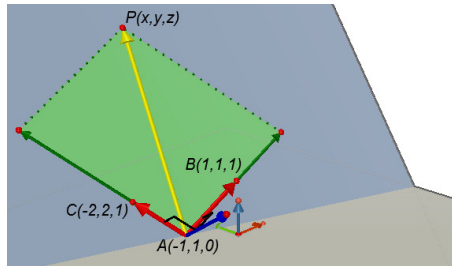
これから, s, t を消去する. ②, ③より,

$$t = y - 1, \quad s = z - t = z - (y - 1) \quad \leftarrow$$

①へ代入して,

$$x = 2(z - y + 1) - (y - 1) - 1$$

$$\therefore \boxed{\alpha: x + 3y - 2z - 2 = 0}$$

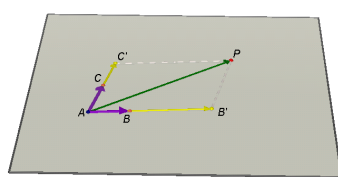


$$\begin{cases} x = 2s - t - 1 & \dots ① \\ y = t + 1 & \dots ② \\ z = s + t & \dots ③ \end{cases}$$

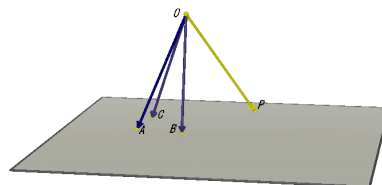
①, ②, ③のうち2つを使って,
 s, t を x, y, z の式で表す.
それを, 残りの式に代入する.

§ 5. 平面の2つの表し方

1. 平面に平行な2つのベクトルを使う。(和, 差, 実数倍の利用)



$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$



$$\overrightarrow{OP} = (1 - s - t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$$

2. 平面に垂直な1つのベクトルを使う。(内積の利用)

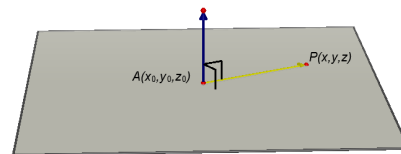
$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直で 点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通る平面上の任意の点 $P(x, y, z)$ とすると

P が α 上にある

$$\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



(①のタイプから, s, t を消去しても ②の形になる.)

ここまで見てくださり、ありがとうございました.
今回の PowerPoint(pdf)は、私の site に置いておきます.

<http://mixedmoss.com/youtube/vector7&8.pdf>

この続きは
目で見えて分かるベクトル8(演習編)
です.

目で見えて分かるベクトル 8
-空間ベクトルの内積-
「演習編」Part1

2014年5月
生越 茂樹

(HD画質で作成してあります)

§ 6.問題演習

- Part1. 座標が与えられていない時
 Part2. 座標が与えられている時 (主に平面)
 Part3. 座標が与えられている時 (主に直線)

【注】 ここで「座標」というのは「直交座標」

- ① $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ (内積の定義)
 ② $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき,
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ (定理)
 ③ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (分配法則)

正射影の
考え方

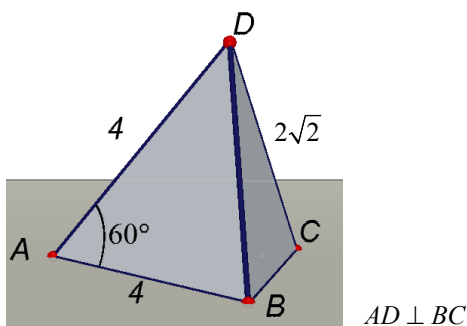
[注] ①から $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ がすぐ導ける

2種類の問題 { 定理・公式を理解するための問題
 問題のための問題 (落とすための問題)

もちろん, 2つは厳密には区別できない. しかし, ある程度
 「公式や定理が見えてくる」(自分で考えられるようになる)
 までは, 「問題のための問題」は避けたほうが良い.

問1 (内積の正射影と分配法則)

四面体ABCDがあり, $AB = AC = 4, BD = 2\sqrt{2}, \angle BAC = 60^\circ, AD \perp BC$ である.
 このとき, $\angle ADC$ の大きさを求めよ.



仮定より,

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 8, \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad |\overrightarrow{AD}| = 4, \quad |\overrightarrow{CD}| = 2\sqrt{2} \dots ①$$

一方「 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ 」だから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AD}|^2 \\ \therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} &= |\overrightarrow{AD}|^2 \dots ② \end{aligned}$$

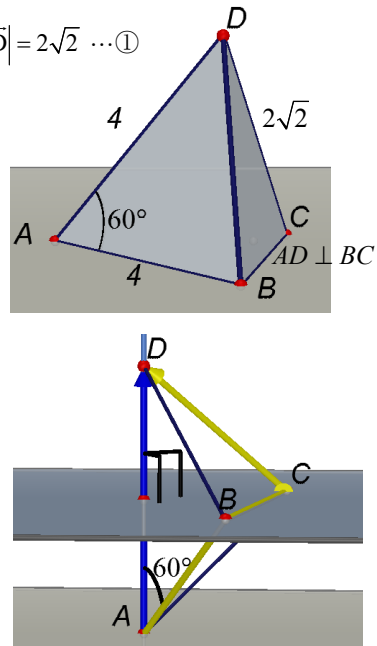
①の結果を代入して,

$$8 + 0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 16 \quad \therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 8$$

ゆえに、 $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{CD}$ のなす角を θ とすると,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

よって $\angle ADC = \boxed{45^\circ}$



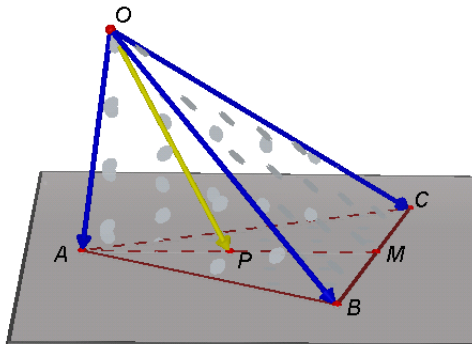
問2(内積＝余弦定理)

四面体OABCがあり、 $OA = 2$, $OB = 3$, $OC = 4$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ である.

さらに、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, 辺BCの中点をM, 線分AMの中点をPとする.

(1) $|\overrightarrow{OP}|$ を求めよ.

(2) $\cos \angle AOP$ の値を求めよ.



(1) 仮定より,

$$\begin{cases} |\vec{a}|=2, & |\vec{b}|=3, & |\vec{c}|=4, & \dots \textcircled{1} \\ \vec{a} \cdot \vec{b}=3, & \vec{b} \cdot \vec{c}=6, & \vec{c} \cdot \vec{a}=4 \end{cases}$$

MはBCの中点だから,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$$

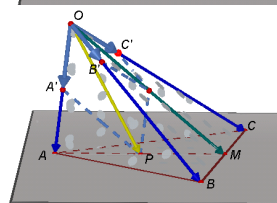
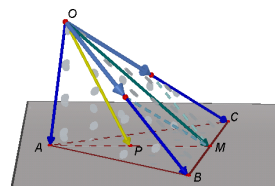
PはAMの中点だから,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}}{2} = \frac{1}{2} \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} \dots \textcircled{2}$$

①,②より,

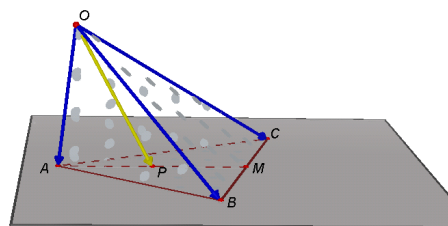
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= \left| \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} \right|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} \right) \quad \leftarrow |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{a} + \frac{1}{16}\vec{b} \cdot \vec{b} + \frac{1}{16}\vec{c} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{8}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{a} \quad \leftarrow \text{分配法則} \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{16}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{16}|\vec{c}|^2 + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{8}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{a} \quad \leftarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{4}2^2 + \frac{1}{16}3^2 + \frac{1}{16}4^2 + \frac{1}{4}3 + \frac{1}{8}6 + \frac{1}{4}4 \\ &= \frac{81}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$$



(2) ①,②より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} &= \vec{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{4}3 + \frac{1}{4}4 \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore \cos \angle AOP &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}|} \quad \leftarrow \text{内積の定義} \\ &= \frac{\frac{15}{4}}{2 \times \frac{9}{4}} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

【直線と平面の垂直】

A,B,Cは同一直線上にないとする,
3点A,B,Cを通る平面が1つに定まる.
このとき,「 $\vec{n}$ が平面ABCと垂直」とは
「 $\vec{n}$ が平面ABC上のすべての直線と直交」と定める.

$$\vec{n} \perp \text{平面ABC} \iff \vec{n} \perp \overline{AB} \text{ かつ } \vec{n} \perp \overline{AC} \text{ (定理)}$$

【← の証明】

$\vec{n} \perp \overline{AB}$ かつ $\vec{n} \perp \overline{AC}$ のとき, $\vec{n} \cdot \overline{AB} = \vec{n} \cdot \overline{AC} = 0$

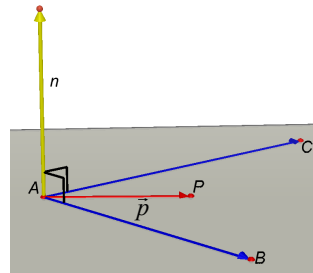
共面条件より, 平面ABC上にある任意のベクトル $\vec{p}$ は,

$$\vec{p} = s\overline{AB} + t\overline{AC} \quad (s, t \text{ 実数})$$

と表せる. よって,

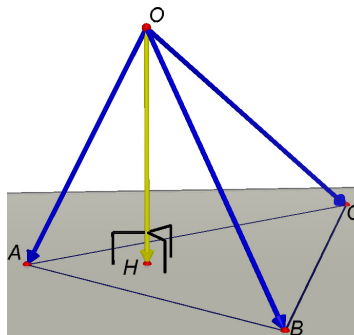
$$\vec{n} \cdot \vec{p} = \vec{n} \cdot (s\overline{AB} + t\overline{AC}) = s(\vec{n} \cdot \overline{AB}) + t(\vec{n} \cdot \overline{AC}) = s \times 0 + t \times 0 = 0$$

ゆえに, $\vec{n} \perp \overline{AB}$ かつ $\vec{n} \perp \overline{AC}$ のとき, $\vec{n} \perp \vec{p}$



問3(平面に下ろした垂線の足) やや難

- 四面体OABCがあり, $OA = 2$, $OB = 3$, $OC = 4$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ である.
さらに, $\vec{a} = \overline{OA}$, $\vec{b} = \overline{OB}$, $\vec{c} = \overline{OC}$, Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとする.
- (1) $\overline{OH} \cdot \vec{a} = \overline{OH} \cdot \vec{b} = \overline{OH} \cdot \vec{c}$ となることを証明せよ.
 - (2) $\overline{OH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ.
 - (3) Oと平面ABCまでの距離を求めよ.



仮定より,

$$\begin{cases} |\vec{a}|=2, & |\vec{b}|=3, & |\vec{c}|=4, & \dots(*) \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3, & \vec{b}\cdot\vec{c}=6, & \vec{c}\cdot\vec{a}=4 \end{cases}$$

(1) 「OH ⊥ 平面ABC」より,

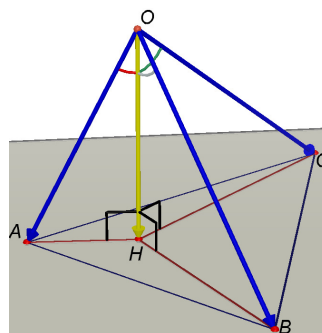
$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\cdots① \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\cdots②$$

$$①より, \overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

$$\therefore \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}$$

同様に ②より, $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OC}$ が得られるから,

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OC}$$



$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\cos\angle AOH=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OH}^2$$

同様に,

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}^2$$

(2) Hは平面ABC上より,

$$\overrightarrow{OH}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} \quad (x+y+z=1)$$

とおける. (1)より,

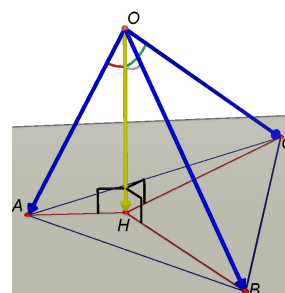
$$\begin{cases} \overrightarrow{OH}\cdot\vec{a}=(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})\cdot\vec{a}=x|\vec{a}|^2+y\vec{b}\cdot\vec{a}+z\vec{c}\cdot\vec{a}=4x+3y+4z \\ \overrightarrow{OH}\cdot\vec{b}=(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})\cdot\vec{b}=x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2+z\vec{c}\cdot\vec{b}=3x+9y+6z \\ \overrightarrow{OH}\cdot\vec{c}=(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})\cdot\vec{c}=x\vec{a}\cdot\vec{c}+y\vec{b}\cdot\vec{c}+z|\vec{c}|^2=4x+6y+16z \end{cases}$$

故に(1)より,

$$4x+3y+4z=3x+9y+6z=4x+6y+16z\cdots③$$

「 $x+y+z=1$ 」と合わせて解くと,

$$x=\frac{22}{25}, \quad y=\frac{4}{25}, \quad z=\frac{-1}{25} \quad \therefore \overrightarrow{OH}=\frac{1}{25}(22\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c})$$



$$\begin{cases} |\vec{a}|=2, & |\vec{b}|=3, & |\vec{c}|=4, & \dots(*) \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3, & \vec{b}\cdot\vec{c}=6, & \vec{c}\cdot\vec{a}=4 \end{cases}$$

(3) 「OH ⊥ 平面ABC」だから,

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OH}^2$$

$$\therefore \overrightarrow{OH}^2=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{25}(22\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=\frac{1}{25}(22|\vec{a}|^2+4\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{a})=\frac{96}{25} \quad \therefore OH=\frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$\overrightarrow{OH}$ は, 平面ABCの法線ベクトル

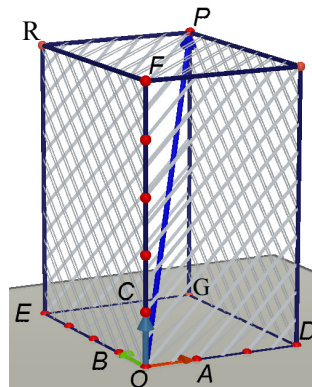
目で見えて分かるベクトル 8 -空間ベクトルの内積- 「演習編」Part2

2014年5月
生越 茂樹

(HD画質で作成してあります)

問4 (内積と成分)

- 図の様に $OD = 3$, $OE = 4$, $OF = 5$ の直方体があり, 辺 OD, OE, OF 上にそれぞれ点 A, B, C を「 $OA = OB = OC = 1$ 」となる様にとる. P を O から最も遠い頂点とすると,
- (1) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$ の値を求めよ.
 - (2) $\overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ (x, y, z 実数) とする. $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ の値を, x, y, z の式で表せ.
 - (3) R は図の直方体の頂点とする. $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{DR}$ の値を求めよ.



(1) 直線OAを「スクリーン」と見て射影すると
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = OA \cdot OP \cdot \cos \angle POA = OA \cdot OD = 3$
 $\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = \boxed{3}$
 同様、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \boxed{4}$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = \boxed{5}$

(2) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} \cdot (x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC})$
 $= x\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$
 $= \boxed{3x + 4y + 5z}$

(3) 「 $\overrightarrow{DR} = -3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}$ 」だから、(2)より、
 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{DR} = 3 \times (-3) + 4 \times 4 + 5 \times 5 = \boxed{32}$

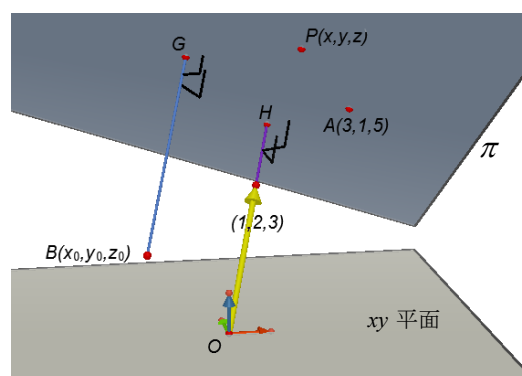
【別解】OA,OB,OC方向に、 x, y, z 軸を取ると、
 $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
 $\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 3, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = 4, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 5, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3x + 4y + 5z$

$\overrightarrow{OP}$ と基本ベクトルとの内積は
 $\begin{cases} \overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_x = P_x \\ \overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_y = P_y \\ \overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_z = P_z \end{cases}$
 となる事を表す

OA,OB,OC方向に x, y, z 軸を取ると、
 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$
 となる事を表す。

(発展)問5 点と平面の距離

- (1) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と垂直で 点A(3,1,5) を通る平面 π 上の点をP(x,y,z) とする.
 このとき、内積を使って、 x, y, z の関係式を求めよ.
 (2) 内積を使って、Oと π との距離を求めよ.
 (3) 内積を使って、点 (x_0, y_0, z_0) と π との距離を求めよ.



(1) $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ だから, $\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0 \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA}$

$$\text{よって, } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \therefore \boxed{x + 2y + 3z = 20} \dots \textcircled{1}$$

(2) O から π に下ろした垂線の足を H とすると,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos \angle AOH = |\vec{n}| \times OH$$

$$\therefore OH = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\vec{n}|} = \frac{20}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \boxed{\frac{20}{\sqrt{14}}}$$

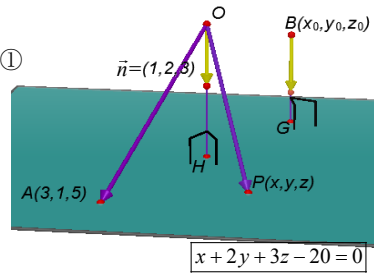
(2) B から π に下ろした垂線の足を G とすると, (2) と同様に考えて,

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA}| = |\vec{n}| |\overrightarrow{BA}| \cos \angle BOG = |\vec{n}| \times BG \quad \therefore BG = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA}|}{|\vec{n}|} \dots \textcircled{2}$$

ここで①より, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 20$ だから,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 20 - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 20 - (x_0 + 2y_0 + 3z_0)$$

$$\textcircled{2} \text{へ代入して, } BG = \frac{|20 - (x_0 + 2y_0 + 3z_0)|}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{|x_0 + 2y_0 + 3z_0 - 20|}{\sqrt{14}}}$$



$$\text{平面 } \pi: ax + by + cz + d = 0 \text{ と } (x_0, y_0, z_0) \text{ との距離は}$$

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$x + 2y + 3z = k_1$ と $x + 2y + 3z = k_2$ との距離は $|k_1 - k_2|$ に比例する.

例えば

$$x + 2y + 3z = -10$$

$$x + 2y + 3z = 0$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + 3z = 20$$

$$x + 2y + 3z = 30 \dots$$

は等間隔に並ぶ. よって,

$$\text{平面 } \pi: x + 2y + 3z = 20$$

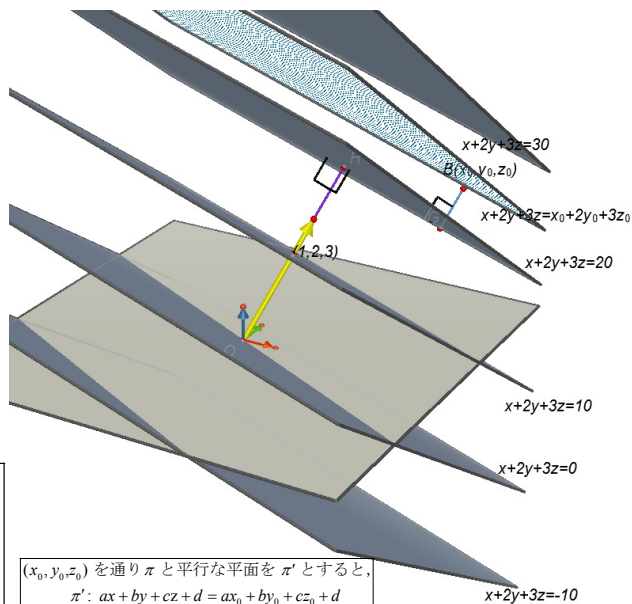
$$\text{と } (x_0, y_0, z_0) \text{ との距離は}$$

$$h = \frac{|x_0 + 2y_0 + 3z_0 - 20|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}}$$

$$\text{平面 } \pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{と } (x_0, y_0, z_0) \text{ との距離は}$$

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



$$(x_0, y_0, z_0) \text{ を通り } \pi \text{ と平行な平面を } \pi' \text{ とすると,}$$

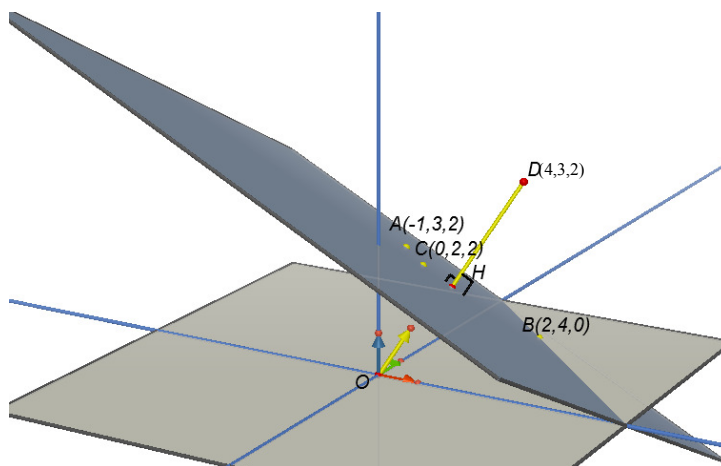
$$\pi': ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

問6 (点と平面との距離)

xyz 空間に点 $A(-1, 3, 2)$, $B(2, 4, 0)$, $C(0, 2, 2)$, $D(4, 3, 2)$ がある.

(1) Dから, 平面ABCに下ろした垂線の足Hの座標を求めよ.

(2) Dと平面ABCの距離を求めよ.



(1) Hは平面ABC上より

$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ (s, t は実数) とおける. このとき

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \textcircled{2}$$

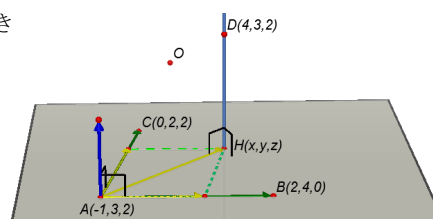
とおける. $\overrightarrow{DH} \perp$ 平面ABCだから,

$$\begin{cases} \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -15 + 14s + 2t = 0 \dots \textcircled{3} \\ \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 + 2s + 2t = 0 \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

③, ④より,

$$s = \frac{5}{6}, \quad t = \frac{5}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{へ代入して, } \overrightarrow{OH} = \left(\frac{19}{6}, \frac{13}{6}, \frac{1}{3} \right) \therefore H \left(\frac{19}{6}, \frac{13}{6}, \frac{1}{3} \right)$$



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) (1) より,

$$DH = \sqrt{\left(\frac{19}{6} - 4 \right)^2 + \left(\frac{13}{6} - 3 \right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 2 \right)^2} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

【発展的解法(平面の方程式の利用)】

(1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 平面ABCの法線ベクトルを $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 3a + b - 2c = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = a - b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \\ c = 2b \end{cases} \therefore \vec{n} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 2b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって、法線ベクトルの1つを改めて $\vec{n}$ とすると, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

平面上の任意の点を $P(x, y, z)$ とすると, $AP \perp \vec{n}$ より

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0 \iff 1(x+1) + (y-3) + 2(z-2) = 0$$

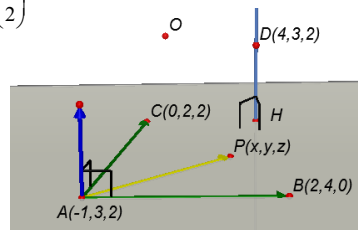
即ち、平面ABCの式は, $x + y + 2z - 6 = 0 \dots \textcircled{1}$

一方、HはDを通り $\vec{n}$ と平行な直線上にあるから、

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + t\vec{n} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = t + 4 \\ y = t + 3 \\ z = 2t + 2 \end{cases} \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$(t+4) + (t+3) + 2(2t+2) - 6 = 0 \therefore t = -\frac{5}{6} \therefore H\left(\frac{19}{6}, \frac{13}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

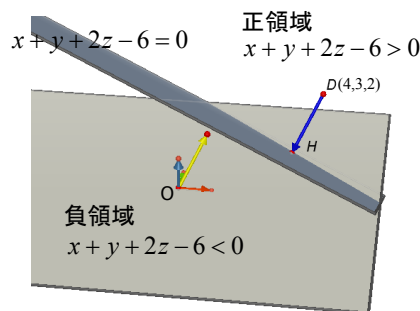
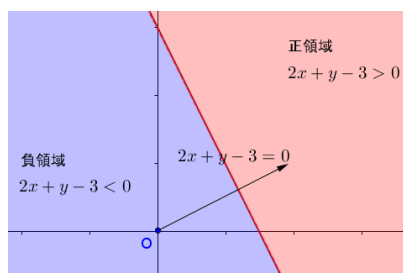


(2) 点と平面の距離の公式より,

$$\frac{|4+3+2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

【参考】正領域と負領域

平面は直線によって、空間は平面によって、2つの部分に分けられる。



【部分的別解】

$f(x, y, z) = x + y + 2z - 6$ とおくと,

$$f(0, 0, 0) = -6 < 0, \quad f(4, 3, 2) = 4 + 3 + 2 \cdot 2 - 6 = 5 > 0$$

ゆえに、原点Oと点D(4, 3, 2)は、平面 $\pi: x + y + 2z - 6 = 0$ に関し反対側にある。

$$D \text{ と } \pi \text{ の距離 } DH = \frac{|4+3+2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5}{6}\sqrt{6}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \text{ だから,}$$

$$\overrightarrow{DH} = -\frac{5}{6}\vec{n} = -\frac{5}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \therefore \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 19 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問6 (点と平面との距離)-類題1

$A(1, -4, 5), B(5, -6, 5), C(3, -8, 8)$ を通る平面 π と点 $D(6, 0, 3)$ がある.
 A を中心とする半径 2 の円を K とする.

- (1) D から π に下ろした垂線の足を H とする. H の座標を求めよ.
 (2) 点 P が円 K 上を動くとき, 線分 DP の長さの最小値を求めよ.

(1) 「問題6」と同様にして $H(5, -2, 1)$

(2) (1) より,

$$DH = \sqrt{(5-6)^2 + (-2-0)^2 + (1-3)^2} = 3$$

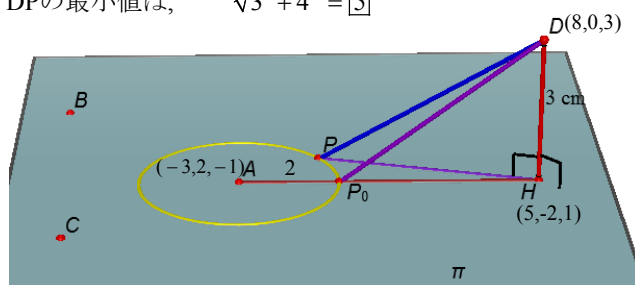
$$AH = \sqrt{(5-1)^2 + (-2+4)^2 + (1-5)^2} = 6 > 2 \text{ (Kの半径)}$$

よって H は K の外側にある. $DH \perp \pi$ だから, 三平方の定理より,

$$DP^2 = DH^2 + HP^2 = 3^2 + HP^2 \dots \textcircled{1}$$

ゆえに, HP が最小のとき, DP も最小. 即ち P が線分 AH と K の交点のとき, DP は最小となる. このとき $HP = AH - AP = 6 - 2 = 4$.

ゆえに DP の最小値は, $\sqrt{3^2 + 4^2} = \boxed{5}$



【球の方程式】

中心が $A(a, b, c)$, 半径 r の球上の点を $P(x, y, z)$ とすると, $AP^2 = r^2$ より,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

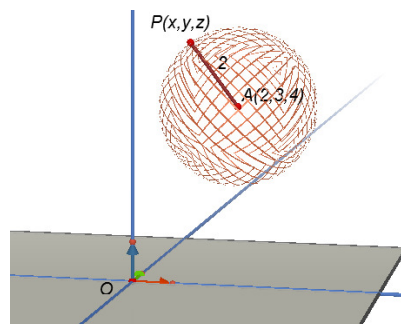
【例】 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 25 = 0$
 は, どのような図形を表すか?

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) + (z^2 - 8z) = -25$$

平方完成して,

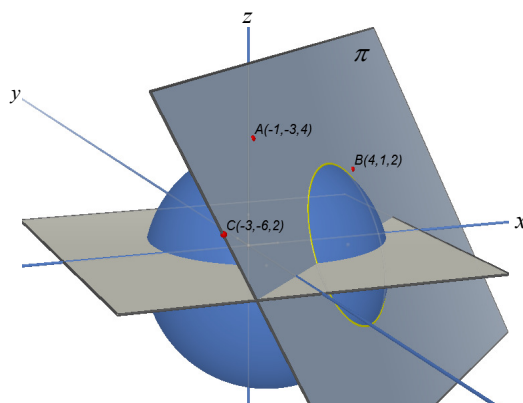
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2^2$$

すなわち, 中心が $A(2, 3, 4)$, 半径が 2 の球.



問6 (点と平面との距離)-類題2

xyz 空間内の 3点 $A(-1, -3, 4)$, $B(4, 1, 2)$, $C(-3, -6, 2)$ を通る平面を π ,
 球面 S を, $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2z - 13 = 0$ とする. π と S の交わりである
 円の中心の座標と半径を求めよ.



$$S: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2z - 13 = 0$$

(1) 上の式を変形して,

$$S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 16$$

ゆえに, S は中心 $A(1,1,-1)$, 半径 $R=4$ の球となる.

ゆえに, 交円の中心は A から平面 π に下ろした垂線の足と一致する.

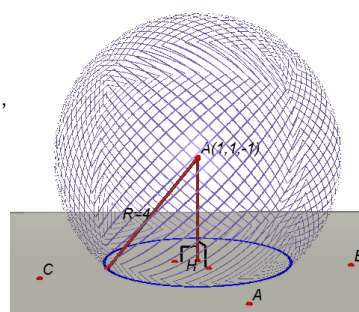
「問題6」と同様にして $\boxed{H(3,-1,0)}$

(2) (1)より,

$$AH = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-1)^2 + (0+1)^2} = 3$$

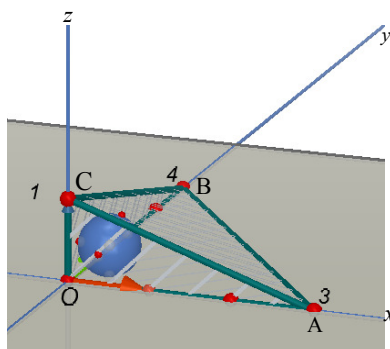
ゆえに, 三平方の定理より, 交円の半径を r とすると,

$$r = \sqrt{R^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \boxed{\sqrt{7}}$$



問6【発展】(点と平面との距離)-類題3

xyz 空間内に, 4点 $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,1)$ がある.
四面体 $OABC$ に内接する球の半径 r を求めよ.



【準備】

平面上に、点 $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(0,4)$ がある。
 三角形 OAB に内接する円の半径 r を求めよ。

円の半径を r とすると、円が x 軸, y 軸に接することから、
 円の中心 I は $I(r,r)$ とおける。

一方, $A(3,0)$, $B(0,4)$ を通る直線を l とすると,

$$l: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \iff 4x + 3y - 12 = 0$$

円と l は接するから, I と l との距離は r に等しい。よって,

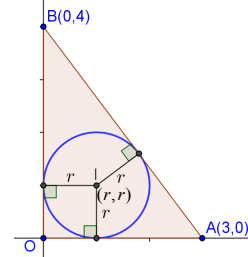
$$\frac{|4r + 3r - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|7r - 12|}{5} = r$$

$$\therefore |7r - 12| = 5r \quad \therefore 7r - 12 = \pm 5r \quad \therefore r = 6, r = 1$$

次に, $f(x,y) = 4x + 3y - 12$ とおくと, $f(0,0) = -12 < 0$
 よって 原点 O は 領域「 $4x + 3y - 12 < 0$ 」に含まれる。
 そして I は l に関して O と同じ側にあるから,
 $f(r,r) = 4r + 3r - 12 = 7r - 12 < 0$ が必要。故に $r = 1$

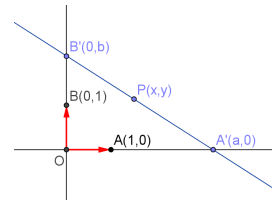
【別解】

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{r}{2} (3 + 4 + 5) \quad \therefore r = 1$$



平面上で、点 $A'(a,0)$ と
 点 $B'(0,b)$ を通る直線は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



【参考】平面の方程式

平面上で、点 $A'(a,0)$ と点 $B'(0,b)$ を通る直線の式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

【注】一般の直線の方程式は $ax + by + c = 0$

空間内で、点 $A'(a,0,0)$, 点 $B'(0,b,0)$, 点 $C'(0,0,c)$ を通る平面の式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \dots (*)$$

【証明】「 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA'} + y\overrightarrow{OB'} + z\overrightarrow{OC'} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \right)$ 」が成り立つ時、

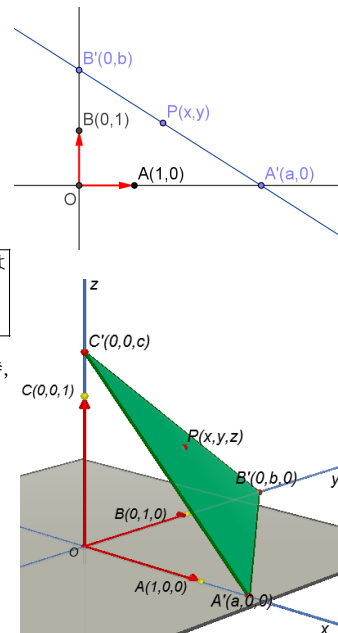
$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA'} + y\overrightarrow{OB'} + z\overrightarrow{OC'} = \frac{x}{a}(a\overrightarrow{OA'}) + \frac{y}{b}(b\overrightarrow{OB'}) + \frac{z}{c}(c\overrightarrow{OC'})$$

ここで, $a\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA'}$, $b\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB'}$, $c\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC'}$ とおくと,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{x}{a}\overrightarrow{OA'} + \frac{y}{b}\overrightarrow{OB'} + \frac{z}{c}\overrightarrow{OC'} \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \right)$$

よって, P は平面 $A'B'C'$ 上にある。

【注】一般の平面の方程式は $ax + by + cz + d = 0$



球の半径を r とすると, 球が xy, yz, zx 平面に接することから,
球の中心 P は $P(r, r, r)$ とおける.

一方, $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面を π とすると,

$$\pi: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{1} = 1 \iff 4x + 3y + 12z - 12 = 0$$

球と π は 接するから, P と π との距離は r に等しい. よって,

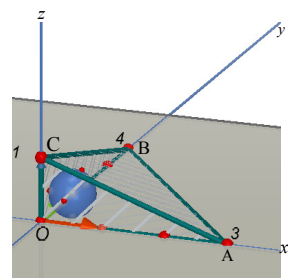
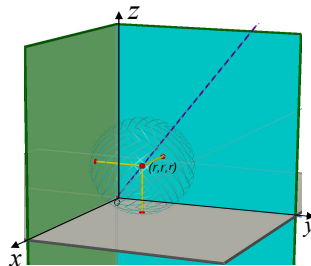
$$\frac{|4r + 3r + 12r - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = \frac{|19r - 12|}{13} = r$$

$$\therefore |19r - 12| = 13r \quad \therefore 19r - 12 = \pm 13r \quad \therefore r = 2, r = \frac{3}{8}$$

次に, $f(x, y, z) = 4x + 3y + 12z - 12$ とおくと, $f(0, 0, 0) = -12 < 0$
よって 原点 O は 領域「 $4x + 3y + 12z - 12 < 0$ 」に含まれる.

そして P は π に関して O と同じ側にあるから,

$$f(r, r, r) = 4r + 3r + 12r - 12 = 19r - 12 < 0 \text{ が必要. 故に } r = \boxed{\frac{3}{8}}$$



目で見て分かるベクトル 8 -空間ベクトルの内積- 「演習編」Part3

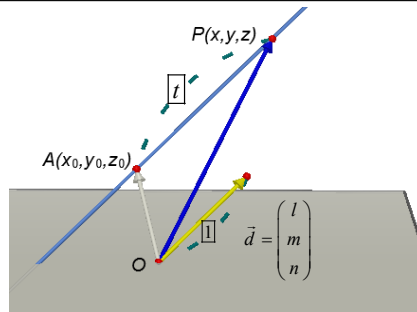
2014年5月
生越 茂樹

(HD画質で作成してあります)

「直線の式」(パラメーター表示)

点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\vec{d} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ と平行な直線上の点を $P(x, y, z)$ とすると,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d} \quad (t \text{ は実数}) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x_0 + l t \\ y = y_0 + m t \\ z = z_0 + n t \end{cases}$$



特に, 2点A,Bを通る直線は

$\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ と取れるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t\vec{d} \\ &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

(当然, 今までとまったく同じ)

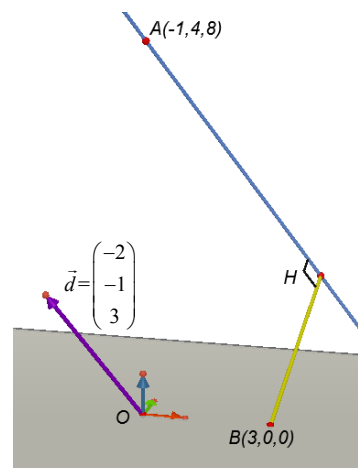
$\vec{d}$ を直線の「方向ベクトル」という。
平面では, 直線は「傾き」と「1点」で定まる。
空間では, 直線は「方向ベクトル」と「1点」で定まる。

問7(点と直線の距離)

点 $A(-1, 4, 8)$ を通り $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と

平行な直線を l とする。

- (1) 点 $B(3, 0, 0)$ から l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。
- (2) 点 B と l 上の点との最短距離 h を求めよ。



(1) H は l 上より,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdots \textcircled{2}$$

「 $BH \perp l$ 」だから,

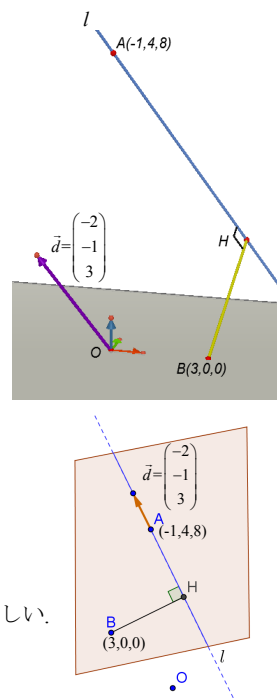
$$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{d} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 28 + 14t = 0 \quad \therefore t = -2$$

①へ代入して,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} - 2\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \therefore \boxed{H(3,6,2)}$$

(2) 三平方の定理より, 点Bと l 上の点との最短距離は BH に等しい.

$$\text{よって, } h = BH = \sqrt{(3-3)^2 + (6-0)^2 + (2-0)^2} = \boxed{2\sqrt{10}}$$



空間では「点と平面の距離の公式」は簡単だが, 「点と直線の距離の公式」は簡単ではない.

【垂線の足を求める 図形的別解】

Bを通り $\vec{d}$ に平行な直線に, Aから下ろした垂線の足を H' とする.

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \therefore \overrightarrow{BA} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 28 > 0$$

よって, $\overrightarrow{BA}$ と $\vec{d}$ は鋭角をなすから,

$$\overrightarrow{BA} \cdot \vec{d} = |\vec{d}| \cdot BA \cos \angle ABH' = |\vec{d}| \cdot BH'$$

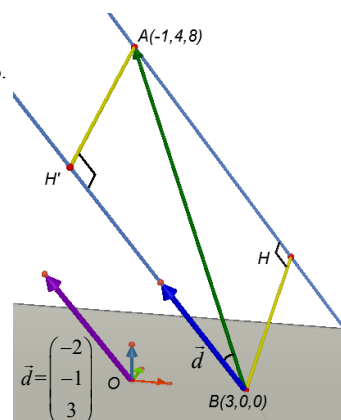
$$\therefore BH' = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{28}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}$$

$$\therefore \frac{BH'}{|\vec{d}|} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 2 \quad \leftarrow \text{【解答】の } t \text{ の値の符号違い}$$

$\overrightarrow{BH'}$ と $\vec{d}$ は「同方向を向き 長さの比が2」だから, $\overrightarrow{BH'} = 2\vec{d}$

「 $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BH'}$ 」だから,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} - 2\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$



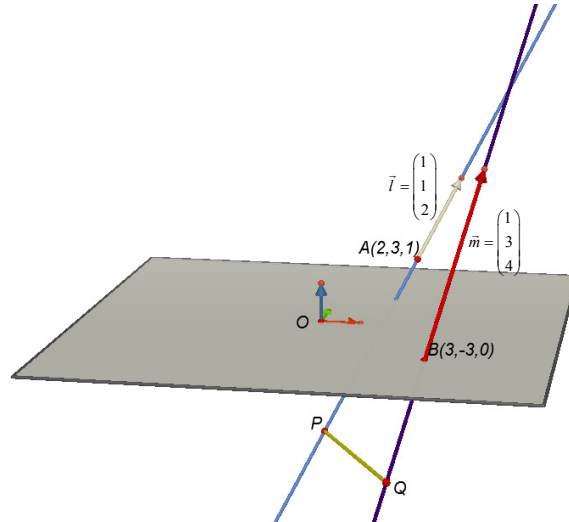
Aを通り $\vec{d}$ と平行な直線を l' , 点Bから l' に下ろした垂線の足を H' とすると,

$$\overrightarrow{AH} = -\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} \vec{d}$$

(余り お勧めでない公式)

問8(2直線間の最短距離)

点A(2,3,1)を通り、 $\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と平行な直線を l 、点B(3,-3,0)を通り、 $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ と平行な直線を m とする。
点Pが l 上、点Qが m 上を動くとき、線分PQの最小値を求めよ。



$PQ \perp l$ かつ $PQ \perp m$ のとき、PQ は最小となる。P は l 上、Q は m 上より、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + s\vec{m} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$$

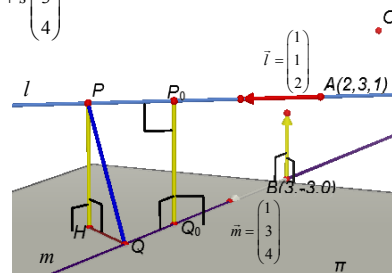
「 $PQ \perp l$ 」かつ「 $PQ \perp m$ 」だから、

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{l} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -7 + 12s - 6t = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -21 + 26s - 12t = 0 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より}, s = \frac{7}{2}, t = \frac{35}{6}. \quad \textcircled{1} \text{へ代入して}, \overrightarrow{P_0Q_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{35}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ゆえに求める距離は}, P_0Q_0 = \frac{4}{3} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



【別解】(平面の方程式を利用)

Bを通り, l と平行な平面を π とし, その法線ベクトルを $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおく.

「 $\vec{n} \perp \vec{l}$ 」かつ「 $\vec{n} \perp \vec{m}$ 」より

$$\vec{n} \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a + b + 2c = 0 \cdots \textcircled{1}$$

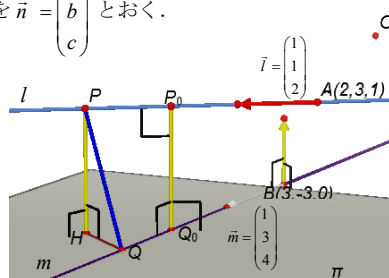
$$\vec{n} \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = a + 3b + 4c = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より, } b = -c, a = -c \quad \therefore \vec{n} = \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = (-c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに, π は $B(3, -3, 0)$ を通り, $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と垂直な平面だから, π 上の点を $R(x, y, z)$ とすると

$$\overrightarrow{BR} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-3 \\ y+3 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y - z = 0 \cdots \textcircled{3}$$

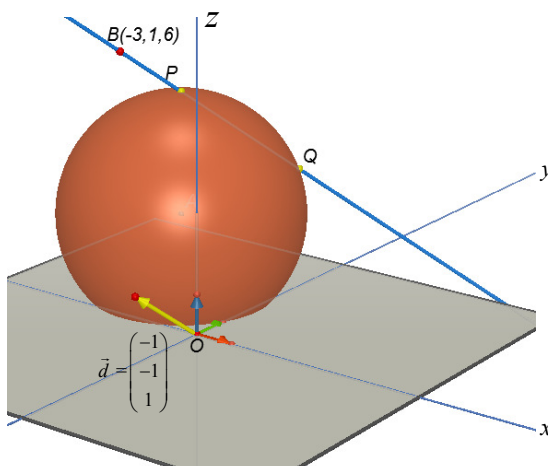
l と m の最短距離 h は $A(2, 3, 1)$ と π との距離だから, $h = \frac{|2+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$



問9(球と直線)

中心が $A(-2, 1, 2)$ で, 半径が r の球を S , $B(-3, 0, 6)$ を通り $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行な直線を l とする.

- (1) $r=3$ のとき, l と S は2つの交点 P, Q を持つ. 線分 PQ の長さを求めよ.
- (2) l と S が接するときの r の値を求めよ.



l 上の点を $X(x,y,z)$ とすると,

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + t\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3-t \\ y = 1-t \\ z = 6+t \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

(1) $r=3$ のとき,

$$S: (x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9 \dots \textcircled{2}$$

①,②を連立して,

$$(-1-t)^2 + (-1-t)^2 + (4+t)^2 = 9$$

$$\therefore t^2 + 4t + 3 = 0 \dots \textcircled{3}$$

$$\therefore t = -1, t = -3$$

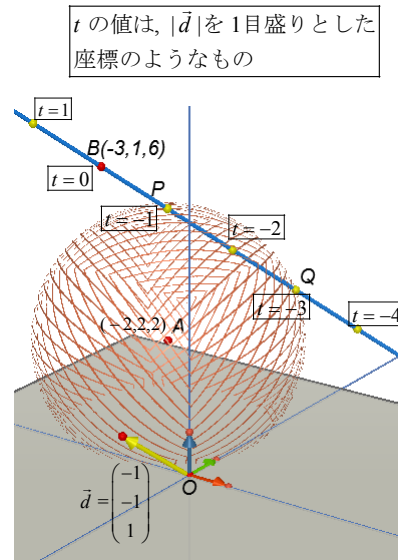
$\alpha = -1, \beta = -3$ とすると, 2つの交点の座標は,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \alpha\vec{d}, \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \beta\vec{d}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (\beta - \alpha)\vec{d}$$

$$\therefore PQ = |\beta - \alpha| |\vec{d}| \dots (*)$$

即ち, 切り取られる線分の長さは, $2|\vec{d}| = \boxed{2\sqrt{3}}$



l 上の点を $X(x,y,z)$ とすると,

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + t\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3-t \\ y = 1-t \\ z = 6+t \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

(2) 半径が r のとき,

$$S: (x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = r^2 \dots \textcircled{4}$$

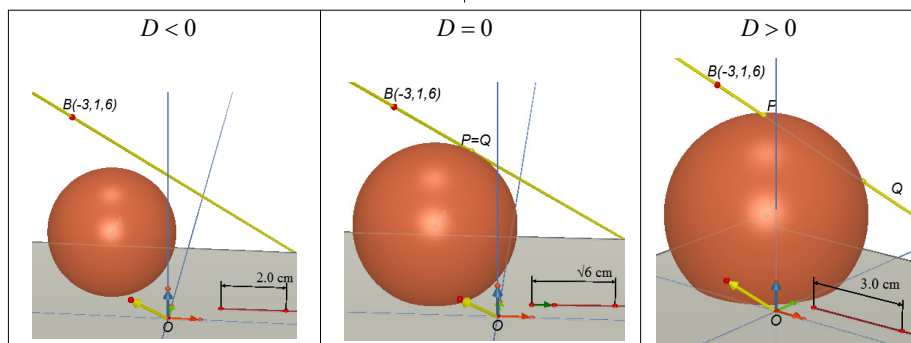
①,④を連立して,

$$(-1-t)^2 + (-1-t)^2 + (4+t)^2 = r^2$$

$$\therefore 3t^2 + 12t + 18 - r^2 = 0 \dots \textcircled{5}$$

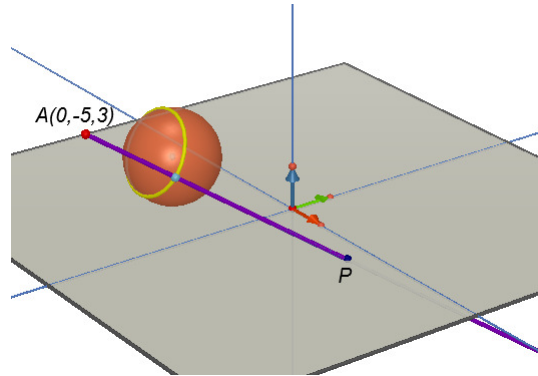
S と l が接するのは, ⑤が重解を持つとき.
すなわち, 判別式を D とすると,

$$D/4 = 6^2 - 3(18 - r^2) = 0 \quad \therefore r = \boxed{\sqrt{6}}$$



問9(球と直線)類題

xyz 空間で、球 $S: x^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ 、点 $A(0, -5, 3)$ を通り S に接する直線と xy 平面との交点を P とする. このような接線が変化するとき、 P の描く軌跡を求め図示せよ.



Pは xy 平面にあるので $P(a,b,0)$ とおける. (ただし a,b 実数)

直線AP上の点を $Q(x, y, z)$ とすると,

$$\overline{OQ} = (1-t)\overline{OA} + t\overline{OP} = (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at \\ (b+5)t-5 \\ 3(1-t) \end{pmatrix} \therefore \begin{cases} x=at \\ y=(b+5)t-5 \\ z=3(1-t) \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

一方 S の式は,

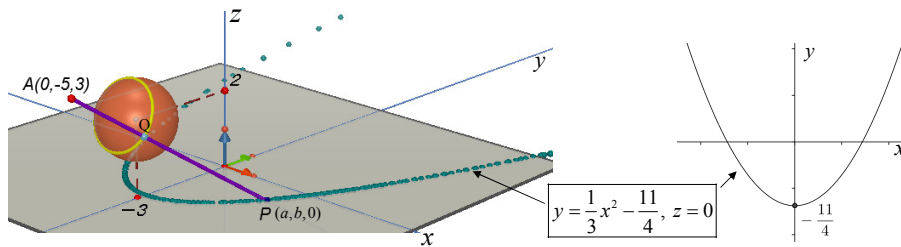
$$x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 1 \dots \textcircled{2}$$

①,②を連立すると,

$$(at)^2 + \{(b+5)t-2\}^2 + (1-3t)^2 = 1 \quad \therefore \{a^2 + (b+5)^2 + 9\}t^2 - 2(2b+13)t + 4 = 0 \dots \textcircled{3}$$

Sと直線APが接するとき、③は重解を持つから、

$$\text{判別式: } D/4 = (2b+13)^2 - 4\{a^2 + (b+5)^2 + 9\} = 0 \quad \therefore b = \frac{1}{3}a^2 - \frac{11}{4}$$



空間内の曲線の標準的な表現

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t) \quad [1 \text{ パラメーター表示}]$$

空間内の曲面の標準的な表現

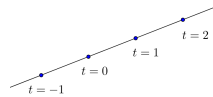
$$x = f(s, t), y = g(s, t), z = h(s, t) \quad [2 \text{ パラメーター表示}]$$

あるいは

$$f(x, y, z) = 0, \quad z = f(x, y) \text{ など } [x, y, z \text{ の式}]$$

直線の例

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 2t \end{cases}$$



球の例

$$S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \\ \iff z = \sqrt{9 - (x-1)^2 - (y-2)^2} + 3$$

平面の例

$$\pi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 1 + s - t & \dots \textcircled{1} \\ y = 4 - t & \dots \textcircled{2} \\ z = -8 + 2s + 2t & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

上の式から, s, t を消去する. ①, ②より,

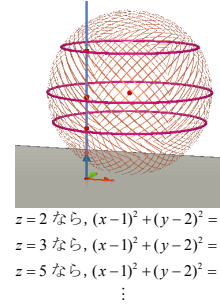
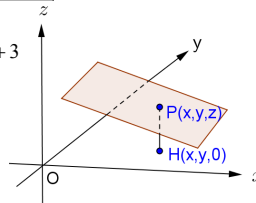
$$t = 4 - y, \quad s = x + t - 1 = x + (4 - y) - 1 = x - y + 3$$

③へ代入して,

$$z = -8 + 2(x - y + 3) + 2(4 - y) = 2x - 4y + 6$$

すなわち,

$$\pi: z = 2x - 4y + 6 \iff 2x - 4y - z + 6 = 0$$



【曲線の例】空間内の円

平面 $\pi: z = 2y$ と 球 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 5$ の交点を C とし, C 上の任意の点を $P(x, y, z)$ とすると,

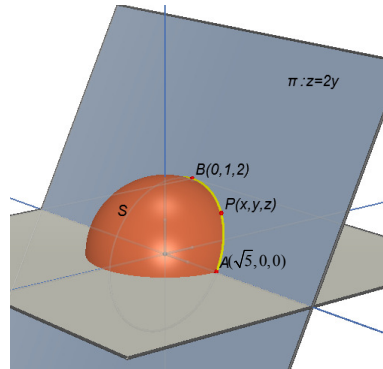
$$\begin{cases} z = 2y \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases} \quad (2 \text{ つの曲面の交線として表示})$$

球面上の2点 $A(\sqrt{5}, 0, 0), B(0, 1, 2)$ をとると, $\overline{OA} \perp \overline{OB}$

$$\therefore \overline{OP} = \cos \theta \overline{OA} + \sin \theta \overline{OB} = \cos \theta \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

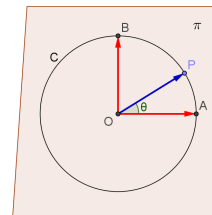
すなわち,

$$\begin{cases} x = \sqrt{5} \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = 2 \sin \theta \end{cases} \quad (C \text{ のパラメーター表示})$$



なお, 2つの曲面の選び方, およびパラメータ表示の方法は無限にある.

$$\begin{cases} z = 2y & (\text{平面}) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 & (\text{球}) \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2y & (\text{平面}) \\ x^2 + 5y^2 = 5 & (\text{楕円柱}) \end{cases} \text{ など}$$



最後まで見てくださり, ありがとうございました.
今回の PowerPoint(pdf) は, 下に置いておきます.

<http://mixedmoss.com/youtube/vector7&8.pdf>

8回連続の「目で見て分かるベクトル」は終了です. 高校生の皆さんが少しでも ベクトルの「イメージ」を持って頂けたら 幸いです. 「イメージ」なしでは数学とは言えません.

私のサイト: <http://mixedmoss.com/>
には「高校生の方～一般の方向け」に, 他にもいろいろ置いてあります. またお寄りください.