目で見て分かるベクトル 5
-空間ベクトルの和・差・実数倍-
「講義編」

2014年5月

生越　茂樹

(HD画質で作成してあります)

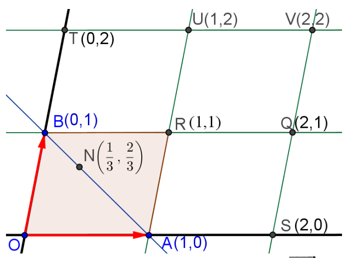
§ 1.斜交座標

【復習】平面上の 斜交座標

O,A,Bが三角形を作る時，平面上の任意の点をPとすると

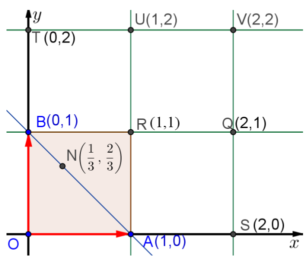
$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ \ (s,t \text{ は実数})$$

とただ1通りに表せる．このときPに対し(s,t)を対応させると，
A(1,0), B(0,1) にした時の"座標のようなもの"になる．これを
($\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を基底にした)斜交座標と言う．
特に $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$, $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ のとき，(s,t) は
通常の(x,y)座標と同じになる．これを直交座標という．



斜交座標

$$\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OA}+1\overrightarrow{OB}\to Q(2,1)$$
$$\overrightarrow{OA}=1\cdot\overrightarrow{OA}+0\cdot\overrightarrow{OB}\to A(1,0)$$
$$\overrightarrow{OB}=0\cdot\overrightarrow{OA}+1\cdot\overrightarrow{OB}\to B(0,1)$$



直交座標

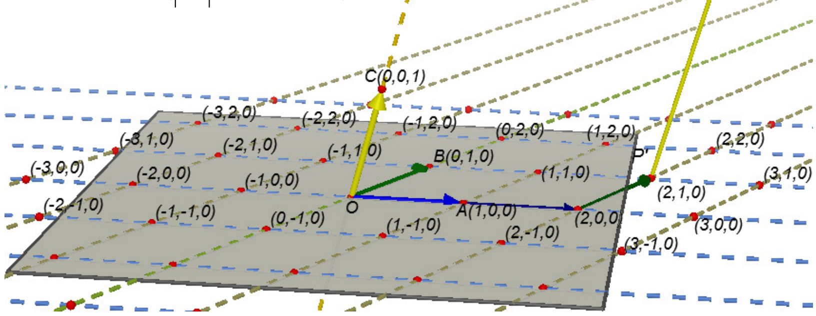
空間内の 斜交座標

O,A,B,Cが四面体を作る時，空間内の任意の点をPとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とただ1通りに表せる．このとき点Pに対し (s,t,u) を対応させると，
A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) にした時の "座標のようなもの" になる．
これを（$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を基底にした）Pの 斜交座標と言う．
特に $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$, かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が互いに直交しているとき，
(s,t,u) は，通常の(x,y,z)成分と同じになる．これを直交座標という．

【注】u は，平面OABからの"高さ"
のようなもの.($|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$を単位に測る.)

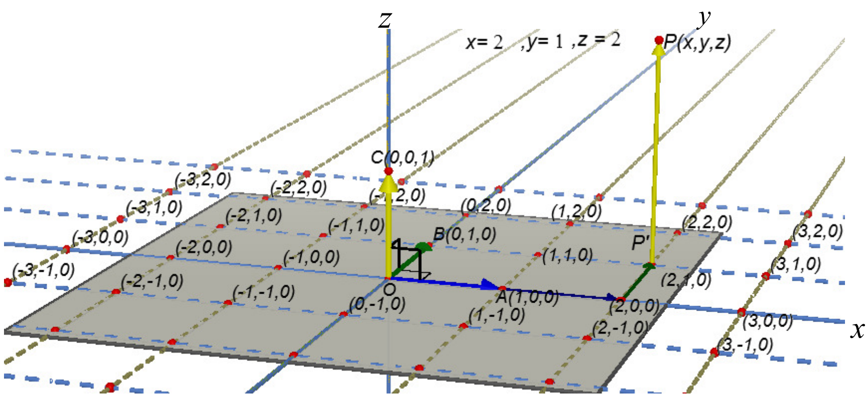


空間内の 直交座標

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$, かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が互いに直交しているときも，
空間内の任意の点をPとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}} + z\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (x,y,z\text{実数})$$

とただ1通りに表せる．このとき点Pに対し (x,y,z) を直交座標という．



【x軸を一塁方向，y軸を三塁方向とすると，一塁側のバックネットから見た図】

§2. 内分・外分の公式

「内分・外分の公式」は　平面上と「全く同様に」成り立ちます.
なぜなら, 線分ABを内分(あるいは外分)する点を考える時は,
(始点がOとすると)平面OAB上で考えているからです.

例:△ABCの重心G の位置ベクトル

線分AC,BCの中点をそれぞれ M,N とする.
Gは, 線分AM を 2:1 に内分するから

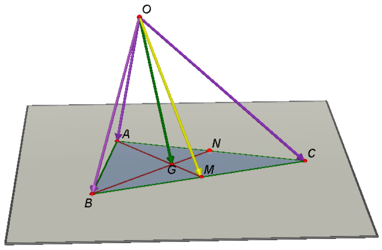
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdots①$$

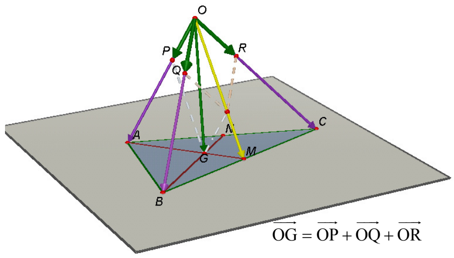
Mは, 線分BCの中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots②$$

①,②より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\boxed{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\end{aligned}$$





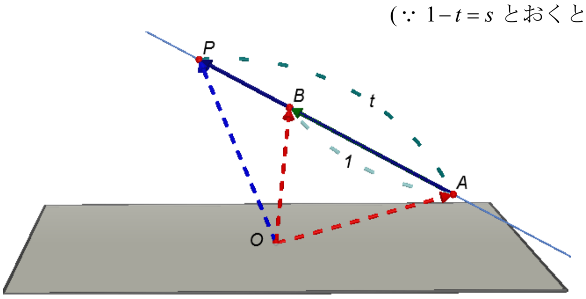
$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

§3.共線条件

「共線条件(3点A,B,Cが同一直線上にある条件)」は,　平面の時と「全く同様に」成り立ちます. なぜなら, 直線AB上の点Pを考える時は, (始点がOとすると)平面OAB上で考えているからです.

Pが直線AB上にある	$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　(t は任意の実数)
	$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\,(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$
	$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
	$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(ただし $s+t=1$)

($\because$ $1-t=s$ とおくと, $s+t=1$)



§4.共面条件

「ベクトルの和, 差, 実数倍」で, 空間(3次元)になって新しく現れるのは,
「**3つの基底ベクトルが必要**」という事と, 「**共面条件**」の 2つだけ です.

Pが平面ABC上にある $\iff \overrightarrow{AP} = s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}$ (s, t は任意の実数)

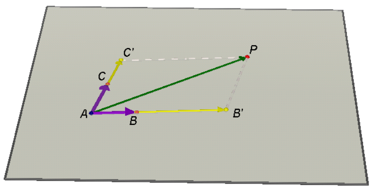
$\iff \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = s\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + t\,(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

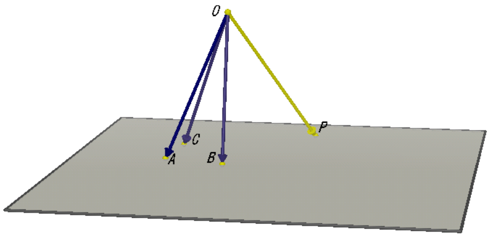
$\iff \overrightarrow{OP} = (1 - s - t)\,\overrightarrow{OA} + s\,\overrightarrow{OB} + t\,\overrightarrow{OC}$

$\iff \overrightarrow{OP} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC}$ $(\alpha + \beta + \gamma = 1)$

【例】Gが△ABCの重心のとき, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

Mが辺ABの中点のとき, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + 0\overrightarrow{OC}$





$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{OP} = (1 - s - t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$

【例】直交座標系で, A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), P(x, y, z) とすると,

Pが平面ABC上にある $\iff x + y + z = 1$

即ち, $z = 0$ なら $x + y = 1$, $z = 1$ なら $x + y = 0$, $z = 2$ なら $x + y = 2, \cdots$
となる様な点の集合 が 平面ABC.

【内積を使った説明】

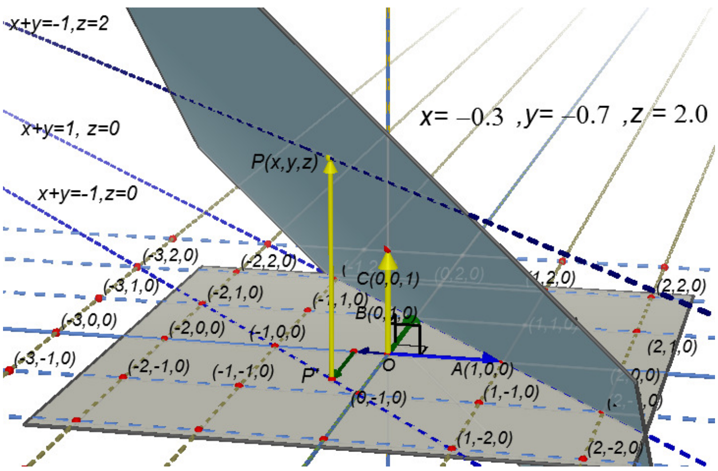
$x + y + z = 1$

$\iff \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 1$

故に

$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ に直交し

点A(1,0,0)を通る平面



目で見て分かるベクトル 6
-空間ベクトルの和・差・実数倍-
「演習編」

2014年5月

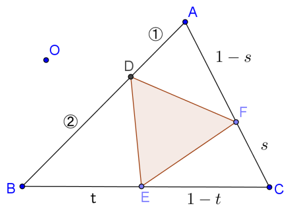
生越　茂樹

(HD画質で作成してあります)

§ 5.問題演習

[問1]

△ABCの辺ABを 1:2 に内分する点をD,
BCを $t:1-t$ $(0<t<1)$ に内分する点をE,
CAを $s:1-s$ $(0<s<1)$ に内分する点をFとする.
△ABCの重心と△DEFの重心が一致するとき,
s と t の値を求めよ.



上の問題を K君は次のように解いたが,「大きく」減点されていた. 何故か？

K君の答案

平面ABC上に点Oをとり, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする.

内分の公式から, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-\mathrm{t})\vec{b}+t\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-s)\vec{c}+s\vec{a},$

△ABC, △DEFの重心を,それぞれ $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ とすると, $\overrightarrow{\mathrm{OG}_1}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\ \cdots①$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}_2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{3}=\frac{\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}+(1-s)\vec{c}+s\vec{a}}{3}=\left(\frac{2}{9}+\frac{s}{3}\right)\vec{a}+\left(\frac{4}{9}-\frac{t}{3}\right)\vec{b}+\frac{t+1-s}{3}\vec{c}\ \cdots②$$

①, ②の係数を比べて,

$\dfrac{2}{9}+\dfrac{s}{3}=\dfrac{1}{3}$ かつ $\dfrac{4}{9}-\dfrac{t}{3}=\dfrac{1}{3}$ かつ $\dfrac{t+1-s}{3}=\dfrac{1}{3}$　　　$\therefore s=t=\dfrac{1}{3}$ (答え)

【答】 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は 一次独立でないから (O,A,B,C は四面体を作らないから), 係数比較はできない.

空間では $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が一次独立のとき (3つのベクトルが,同一平面上に無いとき)
空間内の任意の点Pは,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$

の形で, ただ1通りに表せる. 即ち,

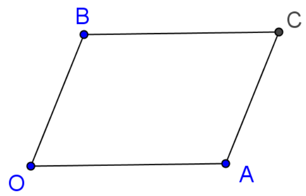
$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c} = s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c} \iff s=s',\ t=t',\ u=u' \ \cdots(*)$$

が成り立つ. 平面では, 上の関係は成り立たない.

【例】四角形OACBが平行四辺形のとき,

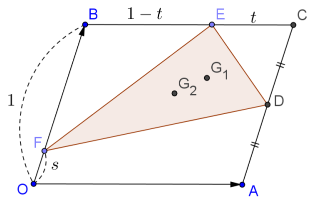
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

よって, $1\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(-1)\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+0\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+0\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$
即ち, (*) は 成り立たない.



平面では「2つの(基底)ベクトルで表す事」が基本.

【例】 平行四辺形OACDの, 辺ACの中点をD,
辺CBを $t:1-t\ (0\le t\le 1)$ に内分する点をE,
辺OBを $s:1-s\ (0\le s\le 1)$ に内分する点をF
とする. △ABCの重心と△DEFの重心が
一致するとき, s と t の値を求めよ.



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = (1-t)\vec{c}+t\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}} = s\vec{b}.$$

△ABC, △DEFの重心を,それぞれ $\mathrm{G_1}, \mathrm{G_2}$ とすると, $\overrightarrow{\mathrm{OG_1}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\ \cdots$①

$$\overrightarrow{\mathrm{OG_2}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{3} = \frac{\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+(1-t)\vec{c}+t\vec{b}+s\vec{b}}{3} = \frac{1}{6}\vec{a}+\frac{t+s}{3}\vec{b}+\frac{3-2t}{6}\vec{c}\ \cdots②$$

①と②の係数が一致することはない！　しかし「$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$」を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG_1}} = \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\cdots①'$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG_2}} = \frac{1}{6}\vec{a}+\frac{t+s}{3}\vec{b}+\frac{3-2t}{6}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{2-t}{3}\vec{a}+\frac{3+2s}{6}\vec{b}\cdots②'$$

①',②'より, $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2-t}{3}$ かつ $\dfrac{2}{3} = \dfrac{3+2s}{6}$　　$\therefore\ \boxed{t=0,\ s=\dfrac{1}{2}}$

[共面条件]

[問2]

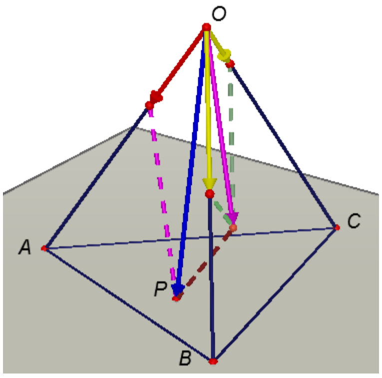
四面体OABCと

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

で与えられる点Pがある．次の問いに答えよ．

(1) P は 平面ABC上にあることを示せ．

(2) △PAB, △PBC, △PCAの面積比を求めよ．



$$\boxed{\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\cdots(*)}$$

(1) (*)において「$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$」だから, P は平面ABC 上にある.

(2) (*) のベクトルを「$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}$」に変える. (*) より,

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\ \cdots①$$

Pを通りACと平行な直線とABの交点をD,
Pを通りABと平行な直線とACの交点をE とすると,

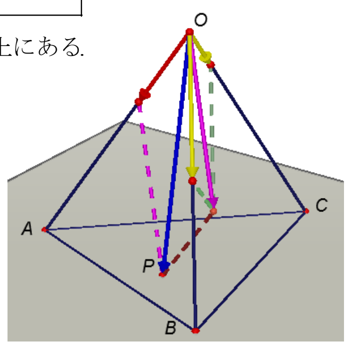
①より, $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$, $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{6}$

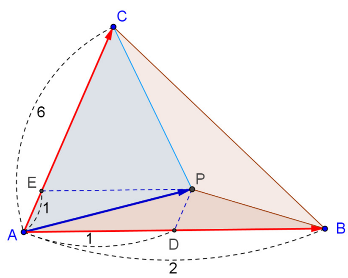
ゆえに,

$$\frac{\triangle APB}{\triangle ABC}=\frac{DP}{AC}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{6},\quad \frac{\triangle APC}{\triangle ABC}=\frac{EP}{AB}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\triangle BPC}{\triangle ABC}=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

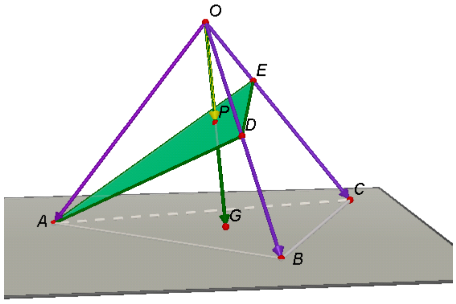
$$\therefore \triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA=\frac{1}{6}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\boxed{1:2:3}$$





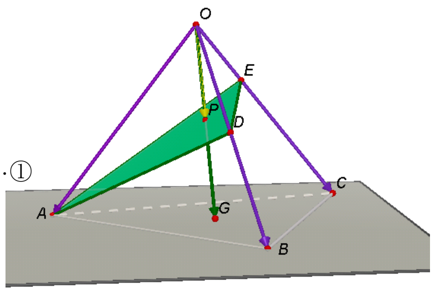
[直線と平面の交点]

[問3] 四面体OABC があり，D は辺OB の中点, E は辺OC を 1:2 に内分する点とする.
また，三角形ABC の重心をG, 平面ADE と直線OG の交点を P とする.
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ.
(2) 三角形OAB と直線CPの交点を Q とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ.



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．仮定より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{3}\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$



Pは直線OG上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}\cdots①$$

Pは 平面ADE上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+u\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+\frac{u}{3}\vec{c}\quad (s+t+u=1)\quad\cdots②$$

①,②より,

$$\begin{cases}\dfrac{k}{3}=s\cdots③\\ \dfrac{k}{3}=\dfrac{t}{2}\cdots④\\ \dfrac{k}{3}=\dfrac{u}{3}\cdots⑤\\ s+t+u=1\cdots⑥\end{cases}\qquad \therefore \frac{k}{3}+\frac{2}{3}k+k=1\quad \therefore k=\frac{1}{2}\qquad \therefore \boxed{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}$$

(2) Qは直線CP上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{CP}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad (t\text{は実数})$$

とおける．よって(1)の結果から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{c}+t\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)=\frac{t}{6}\vec{a}+\frac{t}{6}\vec{b}+\frac{6-5t}{6}\vec{c}\cdots ⑦$$

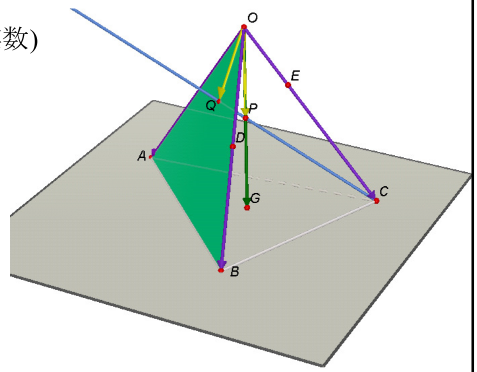
一方，Qは平面OAB上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b} \quad (\alpha,\beta\text{は実数})$$

と表せる．よって⑦より，

$$\frac{6-5t}{6}=0 \qquad \therefore t=\frac{6}{5}$$

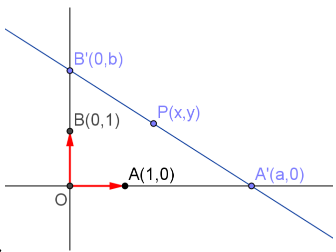
$$\therefore \boxed{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}}$$



【参考】平面の方程式（内積の時に,詳しく説明します）

平面上で，点A'$(a,0)$ と点B'$(0,b)$ を通る直線の式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

【注】一般の直線の方程式は ax+by+c=0



空間内で，点A'$(a,0,0)$, 点B'$(0,b,0)$, 点C'$(0,0,c)$ を通る平面の式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\cdots(*)$

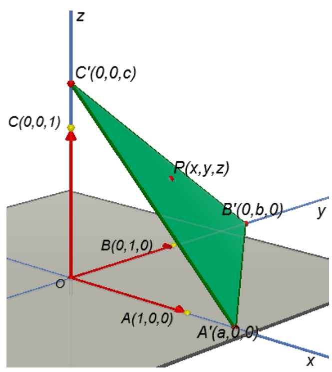
【証明】「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\right)$」が成り立つ時，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{x}{a}(a\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{y}{b}(b\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\frac{z}{c}(c\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

ここで，$a\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$, $b\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$, $c\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{x}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\frac{y}{b}\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\frac{z}{c}\overrightarrow{\mathrm{OC'}} \quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\right)$$

よって，Pは平面A'B'C'上にある．



【注】一般の平面の方程式は ax+by+cz+d=0

【斜交座標を使った別解】

(1) Pは直線OG上より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{k}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (k \text{ は実数}).\quad \text{よって, 改めて } t = \frac{k}{3} \text{ とおくと, } \begin{cases} x = t \\ y = t \cdots ① \\ z = t \end{cases}$$

$P(x, y, z)$ は 平面ADE上より,

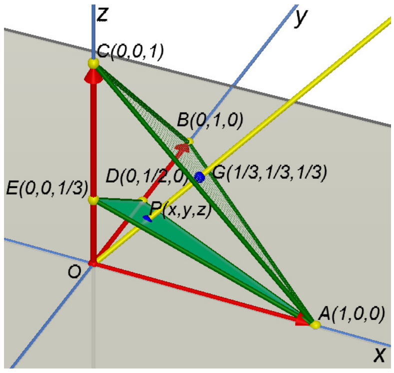
$$\frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\frac{1}{3}} = 1 \iff x + 2y + 3z = 1 \cdots ②$$

①,②を連立して,

$$t + 2t + 3t = 1 \qquad \therefore t = \frac{1}{6}$$

①より$P\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ となるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$



(2) $Q(x, y, z)$ は直線CP上にあるから,

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OP} = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \ (t \text{ は実数}) \text{とおける.}$$

すなわち,

$$\begin{cases} x = \frac{t}{6} \\ y = \frac{t}{6} \\ z = 1 - \frac{5}{6}t \end{cases} \cdots ①$$

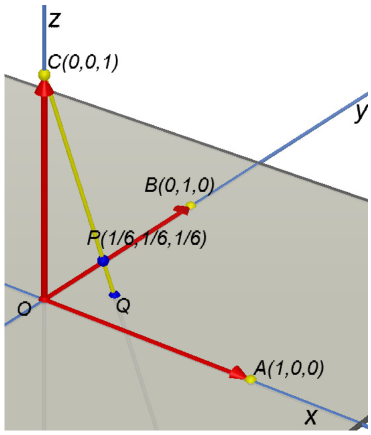
Qは平面OAB上にあるから, $z = 0 \cdots ②$

①,②より,

$$1 - \frac{5}{6}t = 0 \qquad \therefore t = \frac{6}{5}$$

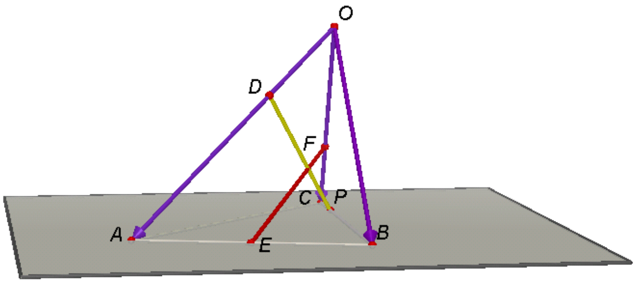
①へ代入すると$Q\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$ となるから,

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$$



[直線と直線の交点]

[問4] 四面体OABCがあり，D は辺OAを 1:2 に内分する点，E は辺AB の中点，Fは 辺OC を 2:1 に内分する点， P を辺BC 上の点とする．直線DPと直線EF が交わるとき，BP:PC の値を求めよ．



【共線条件を2つ使う】

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\vec{a}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{2}{3}\vec{c}$

Pが 辺 BC を $t:(1-t)$ に内分するとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\ \vec{b}+t\,\vec{c}\ (t\ \text{は実数})$$

直線PDとEFの交点をRとすると，Rは PD上より,

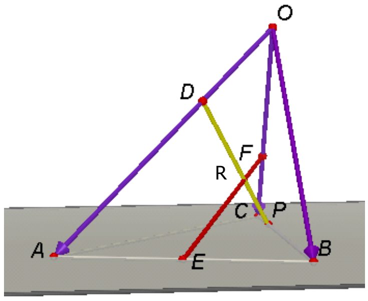
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}(1-s)\vec{a}+s\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}=\frac{1-s}{3}\vec{a}+s(1-t)\,\vec{b}+st\,\vec{c}\cdots①$$

RはEF上より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+u\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-u)\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+u\left(\frac{2}{3}\vec{c}\right)=\frac{1-u}{2}\vec{a}+\frac{1-u}{2}\vec{b}+\frac{2u}{3}\vec{c}\cdots②$$

①,②より,

$$\begin{cases}\dfrac{1-s}{3}=\dfrac{1-u}{2}\cdots③\\ s(1-t)=\dfrac{1-u}{2}\cdots④\\ st=\dfrac{2u}{3}\cdots⑤\end{cases}\qquad \therefore s=\frac{5}{8},\ u=\frac{3}{4},\ t=\frac{4}{5}$$



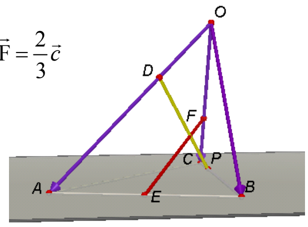
よって,　　$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=t:(1-t)=\frac{4}{5}:\frac{1}{5}=\boxed{4:1}$

【別解】直線DPとEFが交わる⇔Pが平面DEF上にある

$\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと, $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{OF}=\frac{2}{3}\vec{c}$

Pが 辺 BC を $t:(1-t)$に内分するとすると

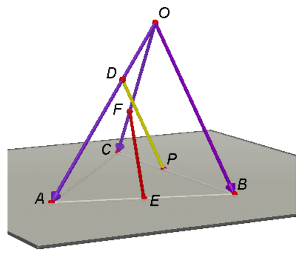
$\overrightarrow{OP}=(1-t)\ \vec{b}+t\,\vec{c}$ (t は実数) …①



交わっているとき

交わっているとき，Pは平面DEF上にもあるので

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OD}+\beta\overrightarrow{OE}+\gamma\,\overrightarrow{OF}$$
$$=\alpha\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right)+\beta\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\gamma\left(\frac{2}{3}\vec{c}\right)$$
$$=\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}\right)\vec{a}+\frac{\beta}{2}\vec{b}+\frac{2\gamma}{3}\vec{c}\ \text{(ただし } \alpha+\beta+\gamma=1) \cdots ②$$



交わってないとき

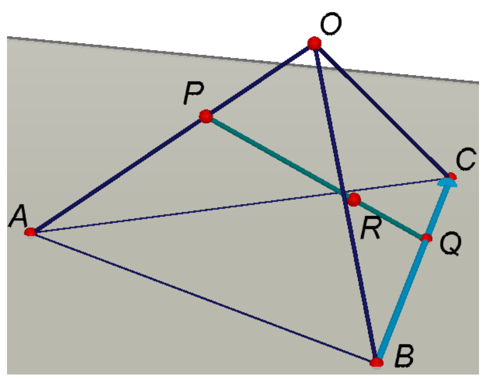
①，②より

$$\begin{cases}\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}=0\\ \frac{\beta}{2}=1-t\\ \frac{2\gamma}{3}=t\\ \alpha+\beta+\gamma=1\end{cases}\qquad \therefore t=\frac{4}{5}$$

$$\therefore BP:PC=t:(1-t)=\frac{4}{5}:\frac{1}{5}=\boxed{4:1}$$

【通過領域】

[問5] 四面体OABCがあり， $OA\perp BC,\ OA=5,\ BC=6$ とする. また PとQは, それぞれ, 辺 OA, BC上 (両端含む)を動くとし， さらに線分PQを 2:1 に内分する点を Rとする． このときRはどのような図形を描くか？
また その図形の面積Sを求めよ.



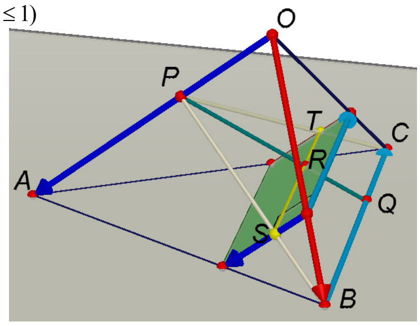
$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BC}$ を, 基底ベクトルに取って考える.

Pは辺OA上より, $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}\ (0\le s\le 1)$

Qは 辺BC上より, $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}\ (0\le t\le 1)$

とおける. Rは 線分PQを2:1 に内分するから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR}&=\frac{\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}}{3}\\&=\frac{s}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}\right)\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right)+t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)\end{aligned}$$



よって $\overrightarrow{OB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB},\ \vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\ \vec{v}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ とおくと,

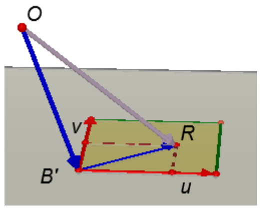
$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OB'}+s\vec{u}+t\vec{v} \iff \overrightarrow{B'R}=s\vec{u}+t\vec{v}$$

「$0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1$」であるから，Rは B'を 1 つの頂点とし,

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ に平行な辺を持つ平行四辺形Dの内部と周囲を動く.

さらに $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$ だから $\vec{u}\perp\vec{v}$. かつ $|\vec{u}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{OA}|=\frac{5}{3},\ |\vec{v}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{BC}|=2$

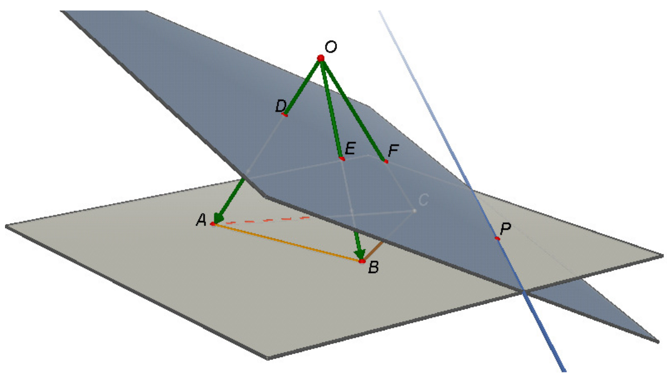
故に Dは 長方形となり, 面積 $S=\frac{5}{3}\cdot 2=\boxed{\frac{10}{3}}$



[平面と平面の交線]

[問6]

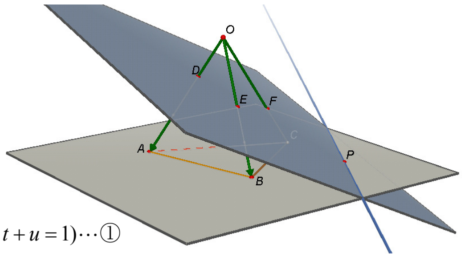
四面体OABC があり，Dは辺OA を 1:2 に内分する点，E は辺OB の中点，F は 辺OC を 2:1 に内分する点とする.
また，平面DEFと平面ABC の交線 l 上の点を P とする.
(1) $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ とおくとき，x と y の関係式を求めよ.
(2) 平面ABC 上で l は，どのような直線になるか？　図示せよ.



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

仮定より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{2}{3}\vec{c}$$



Pは平面DEF上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{OE}}+u\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{s}{3}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+\frac{2u}{3}\vec{c}\quad (s+t+u=1)\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+y(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-x-y)\vec{a}+x\,\vec{b}+y\,\vec{c}\cdots②$$

①,②より,

$$\begin{cases}1-x-y=\dfrac{s}{3}\\ x=\dfrac{t}{2}\\ y=\dfrac{2u}{3}\\ s+t+u=1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}s=3-3x-3y\\ t=2x\\ u=\dfrac{3y}{2}\\ s+t+u=1\end{cases}\cdots③$$

③から, s,t,u を消去して, $\boxed{2x+3y=4}$

(2) 「$2x+3y=4$」の両辺を 4 で割って,

$$\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y=1\cdots④$$

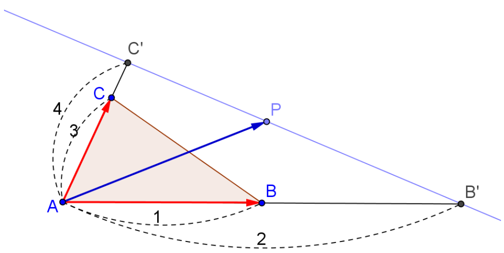
一方,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}x\left(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\frac{3}{4}y\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}x\,\overrightarrow{\mathrm{AB'}}+\frac{3}{4}y\,\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$$

$$\left(\text{ただし},\ \overrightarrow{\mathrm{AB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

よって ④より，Pは直線B’C’ 上を動く.



ここまで見てくださり，ありがとうございました．
今回 使用した PowerPoint（pdf)は，私の site に置いておきます．

http://mixedmoss.com/youtube/vector5&6.pdf

同じアドレスを, YouTubeのコメント欄にも書いてあるので，そこから リンクをたどる事も できます.

他にもいろいろ置いていますので，是非 ご覧ください．