目で見て分かるベクトル 3
-平面ベクトルの内積-
「講義編」

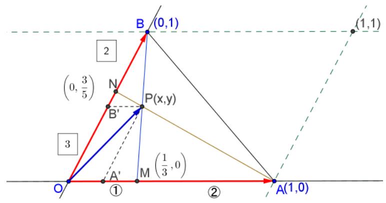
2014年5月

生越　茂樹

(HD画質で作成してあります)

§ 1.そもそも内積とは？

$$\text{ベクトルの2つの演算}\begin{cases}\text{和·差·実数倍} - \text{斜交座標 (長さの比·面積の比と関係)}\\ \text{内積} - \text{余弦定理 (実際の長さ·角度と関係)}\end{cases}$$

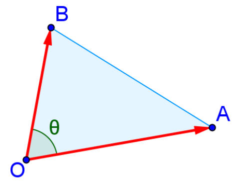


演習編【例題1】から

M が OAを 1:2 に内分し，N が OB を 3:2 に内分するとき，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \Longleftrightarrow \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{1}{6},\ \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\frac{1}{2}$$

($\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ のとり方によらない)



$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$=\ OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\theta$$

(余弦定理!)

($\overline{AB}$ は，$\overline{OA},\overline{OB}$ や θ の大きさで変わる)

§ 2.内積と分配法則

内積の主な法則

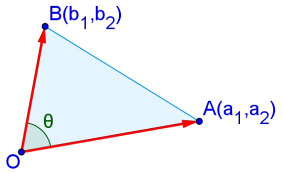
$\boxed{1}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ （内積の定義）

$\boxed{2}$ $\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$ のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ （定理）

$\boxed{3}$ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ （分配法則）

[注]$\boxed{1}$から $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ がすぐ導ける



内積の分配法則から，余弦定理が導ける

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 &= |\vec{b}-\vec{a}|^2 && \leftarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\
&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) && \leftarrow |\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\\
&=\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a} && \leftarrow \text{分配法則}\\
&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{b} && \leftarrow \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\\
&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\,\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta && \text{(余弦定理!)}
\end{aligned}
$$

まとめ

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\cdot\underline{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta}$ (余弦定理)の一部を「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$」と定義すると

$\Downarrow$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (分配法則)
が成り立つことが発見された．
「分配法則を使った余弦定理の書き換え」が「内積」

【注】教科書では，$\boxed{1}$ から余弦定理を使って$\boxed{2}$ を導き，さらに $\boxed{2}$ を使って $\boxed{3}$ を導いている．ここでは，図形的に $\boxed{3}$ を導く．

§ 3.「内積の分配法則」と「正射影」

【例】$\mathrm{OA}=1$, $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=2$, $\angle\mathrm{AOB}=15^\circ$, $\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ の時，
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (分配法則)を確かめる．

△OBC は正三角形だから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とすると，$\mathrm{OD}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OD}}\cdot\cos45^\circ=1\cdot2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}\cdots$①

一方，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\cos15^\circ=2\cos15^\circ\\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\cos75^\circ=2\cos75^\circ\end{cases}\cdots$②

ここで 加法定理より

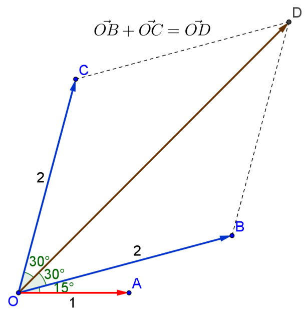
$$
\begin{cases}
\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ\cdot\cos30^\circ+\sin45^\circ\cdot\sin30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\
\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos45^\circ\cdot\cos30^\circ-\sin45^\circ\cdot\sin30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{cases}
$$

よって

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\cos15^\circ+2\cos75^\circ=2\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+2\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\sqrt{6}\cdots$③

①，③より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$



B,C,Dから直線OAに下ろした垂線の足をそれぞれ B',C',D'とすると

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 1\cdot 2\cdot\cos 15^\circ = OB' \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 1\cdot 2\cdot\cos 75^\circ = OC' \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = 1\cdot OD\cdot\cos 75^\circ = OD' \end{cases}$$

ところが, □OBDCは平行四辺形だから,

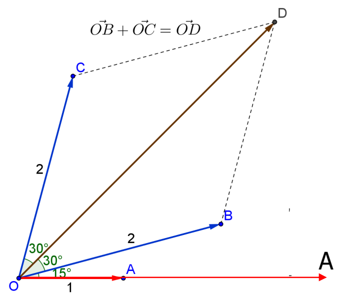
$$OC' = B'D'$$

$$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = OC' = B'D'$$

ゆえに,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = OB'+B'D' = OD' = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$$

即ち, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\cdots(*)$



仮に「OA=3」だとすると,

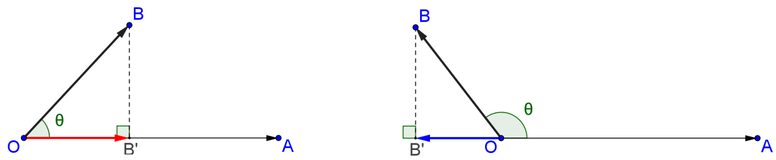
$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 3\cdot 2\cdot\cos 15^\circ = 3\cdot OB' \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 3\cdot 2\cdot\cos 75^\circ = 3\cdot OC' = 3\cdot B'D' \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = 3\cdot OD\cdot\cos 75^\circ = 3\cdot OD' \end{cases}$$

「３つの内積の値が, 全て 3倍」となり, この場合も,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$$

これは, OAの長さによらず 成り立つ.

(内積)=(スクリーンの長さ)*(正射影の長さ)



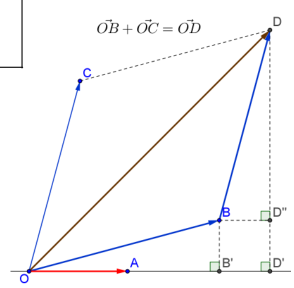
Bから直線OAに下ろした垂線の足をB', ∠AOB=θ とすると,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\cdot OB\cdot\cos\theta = \begin{cases} OA\cdot OB' & (0^\circ \le \theta \le 90^\circ \text{ の時}) \\ -OA\cdot OB' & (90^\circ < \theta \le 180^\circ \text{ の時}) \end{cases}$$

$\overrightarrow{OB'}$ を 「$\overrightarrow{OB}$ の $\overrightarrow{OA}$ への正射影ベクトル」と呼ぶ. 即ち,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ =(スクリーンの長さ)×(正射影ベクトルの長さ)

(ただし「$\vec{a}$ の上への正射影ベクトル $\vec{b}'$ の長さ」は, $\vec{b}'$ が $\vec{a}$ と逆向きの時は, マイナスの符号を付けるとする.)



また,

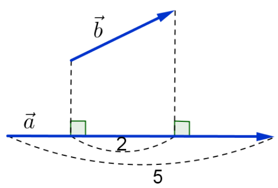
($\overrightarrow{OB}$ の $\overrightarrow{OA}$ への正射影ベクトル)+($\overrightarrow{BD}$ の $\overrightarrow{OA}$ への正射影ベクトル)
=($\overrightarrow{OD}$ の $\overrightarrow{OA}$ への正射影ベクトル)

であるから, 「内積の分配法則」が成り立つ. ($\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ のなす角によらない.)

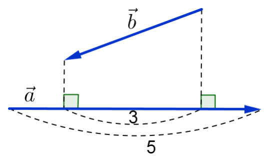
練習問題1

下図の $\vec{a},\vec{b}$ について，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ.

(1)



(2)



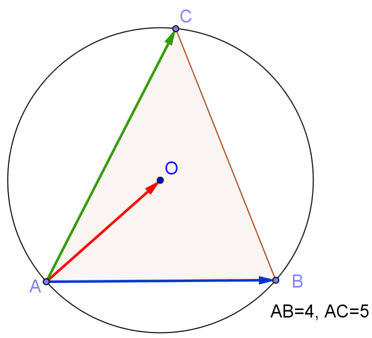
$2\cdot 5=10$

$(-3)\cdot 5=-15$

練習問題2

Oは三角形ABCの外心とする. AB=4, AC=6 のとき,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$ と $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$ の値を求めよ.

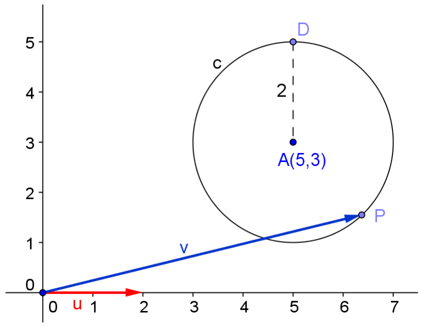


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=AB\cdot\left(\frac{1}{2}AB\right)=4\cdot 2=8$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=AC\cdot\left(\frac{1}{2}AC\right)=5\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$

練習問題3

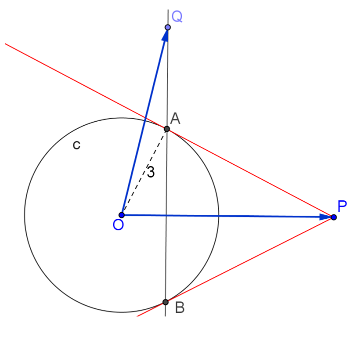
点Pは中心A(5,3) , 半径 $r=2$ の円C上を動く． $\vec{u}$ を図のベクトル，
$\vec{v}=\overrightarrow{OP}$ とするとき, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ の最大値と最小値を求めよ．



最大値は $2\cdot7=14$, 最小値は $2\cdot3=6$

練習問題4

中心Oで半径 $r=3$ の円をCとする．さらに，Cの外側にある点Pから
Cに引いた2本の接線とCの接点をAとBとする．Qが直線AB上を
動くとき, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ の値を求めよ．



直線OPを「スクリーン」と見ると,

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\cdots①$$

次に, 直線OAを「スクリーン」と見ると,

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=OA\times OA=3^2=9\cdots②$$

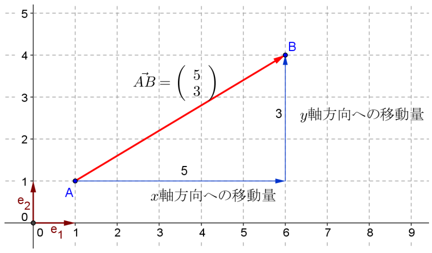
①,②より,

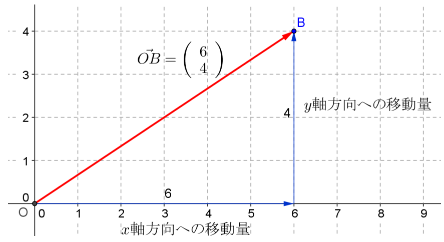
$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=9$$

[この問題は, 同僚の 小林先生に教えていただきました.]

§4. 内積と「ベクトルの成分」

ベクトルの成分



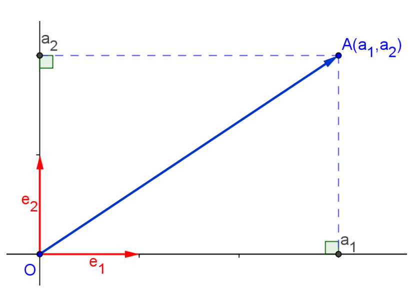


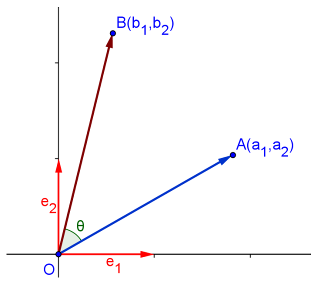
> 2点の直交成分が $\mathrm{A}(x_1,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ の時, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\cdots\text{AからBまでの } x \text{ 軸方向の移動量}\\\cdots\text{AからBまでの y 軸方向の移動量}\end{array}$$
>
> と定める．特に, 始点が原点のときは,
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$
>
> となり，終点Bの座標成分と数字は一致する．

$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とすると,

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\vec{v}=X\vec{e_1}+Y\vec{e_2}$$

($\vec{e_1}$ と $\vec{e_2}$ を基本ベクトルという.)





直交座標系で $\mathrm{A}(a_1,a_2)$ のとき, $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とすると,

$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ の上への正射影を考えて,

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e_1}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{ の }\vec{e_1}\text{ への正射影ベクトルの長さ})=a_1\\\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e_2}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{ の }\vec{e_2}\text{ への正射影ベクトルの長さ})=a_2\end{cases}$$

ゆえに $\mathrm{B}(\mathrm{b}_1,b_2)$のとき，ベクトルの分配法則から

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}\right)=b_1(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e_1})+b_2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e_2})=a_1b_1+a_2b_2$$

$$\boxed{\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\text{ のとき，}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2}$$

目で見て分かるベクトル 4
-平面ベクトルの内積-
「演習編」

2014年5月

生越　茂樹

(HD画質で作成してあります)

§ 5.問題演習

$\boxed{1}$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　（内積の定義）

$\boxed{2}$ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$　（分配法則）

$\boxed{3}$ $\vec{a} = (a_1, a_2),\ \vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき,

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$　（定理）

正射影の考え方

[注]$\boxed{1}$から $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ がすぐ導ける

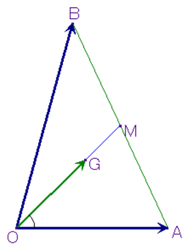
§ 5-1. 内積=余弦定理

第1問

△OABとその重心Gがあり，$|\overrightarrow{OA}|=3, |\overrightarrow{OB}|=5,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$ とする.

(1) $|\overrightarrow{OG}|$の値を求めよ.

(2) $\cos\angle AOG$の値を求めよ.



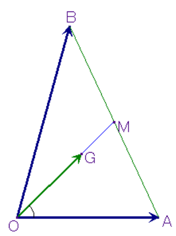
△OABとその重心Gがあり，$|\overrightarrow{OA}|=3, |\overrightarrow{OB}|=5,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$ とする.

(1) $|\overrightarrow{OG}|$の値を求めよ.

(2) $\cos\angle AOG$の値を求めよ.

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}$，ABの中点をMとおく. OG:GM=2:1 だから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\cdots①$$



(1)
$$|\overrightarrow{OG}|^2=\left|\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2$$
$$=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \leftarrow |\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$$
$$=\frac{1}{9}\left(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\right) \qquad \leftarrow \text{分配法則}$$
$$=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right) \qquad \leftarrow \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{9}(3^2+2\times3+5^2)=\frac{40}{9}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OG}|=\sqrt{\frac{40}{9}}=\frac{2\sqrt{10}}{3} \quad \cdots(Ans)$$

(2)
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}=\vec{a}\cdot\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{1}{3}(3^2+3)=4$$

$$\therefore \cos\angle AOG=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OG}|}=\frac{4}{3\times\frac{2\sqrt{10}}{3}}=\frac{\sqrt{10}}{5} \quad \cdots(Ans)$$

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Longleftrightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Longleftrightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

即ち,

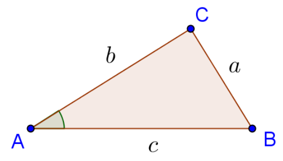
$$a^2 = b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A \quad (\text{余弦定理!})$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=b\cdot c\cdot\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

(教科書では，この関係を用いて「$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$」を導いている.)

よって

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} \Longleftrightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$



【余弦定理を使った別解】

(1) Bを通りOAと平行な直線と, Aを通りOBと平行な直線の交点をC とする.

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=3, \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=5,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ 　だから,

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}=\frac{3}{3\cdot5}=\frac{1}{5}$$

OB//AC だから

$$\cos\angle\mathrm{OAC}=\cos(180^\circ-\angle\mathrm{AOB})=-\cos\angle\mathrm{AOB}=-\frac{1}{5}$$

よって余弦定理を△AOCに使うと,

$$\mathrm{OC}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos\angle\mathrm{OAC}=9+25+6=40$$

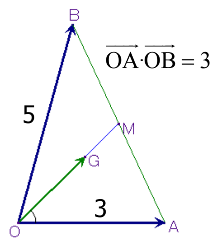
$$\therefore \mathrm{OC}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

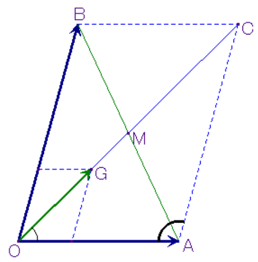
「$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$」だから　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|=\frac{1}{3}\mathrm{OC}=\boxed{\frac{2\sqrt{10}}{3}}$

(2) 余弦定理を△AOCに使うと,

$$\cos\angle\mathrm{AOC}=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OM}}=\frac{3^2+(\sqrt{40})^2-5^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{10}}=\frac{24}{6\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore \cos\angle\mathrm{AOG}=\cos\angle\mathrm{AOC}=\boxed{\frac{\sqrt{10}}{5}}$$





第2問

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=1,\ |3\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{7}$ のとき,

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ.

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ.

$|\vec{a}|=2\cdots$①, $|\vec{b}|=1\cdots$②, $|3\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{7}\cdots$③ のとき,

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ.

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ.

(1) ③より,

$$|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})=(2\sqrt{7})^2$$

$$\therefore\ 9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=28$$

①,②の値を代入して,

$$9\times4-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times1=28$$

故に, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{1}$

(2)

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2\cdot1}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \theta=\boxed{60^\circ}$$

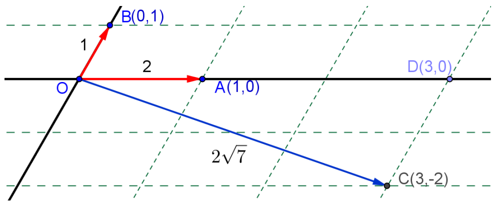
【余弦定理を使った別解】

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=3\vec{a}-2\vec{b},\ \overrightarrow{OD}=3\vec{a}$ とおくと，$\overrightarrow{DC}=-2\vec{b}$

$\therefore CD//OB$

仮定とあわせて

$$\begin{cases} OD=3\times OA=6, \\ CD=2\times OB=2, \\ OC=2\sqrt{7} \end{cases}$$



△OCDに対し 余弦定理を使うと,

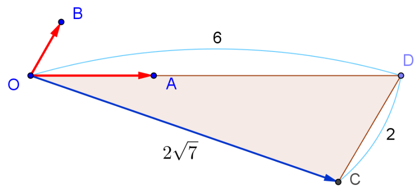
$$\cos\angle ODC=\frac{2^2+6^2-(2\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 6}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \angle ODC=60°$

OB//CD だから，

$\angle AOB=\angle ODC=\boxed{60°}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\cdot 1\cdot\cos 60^{\circ}=\boxed{1}$

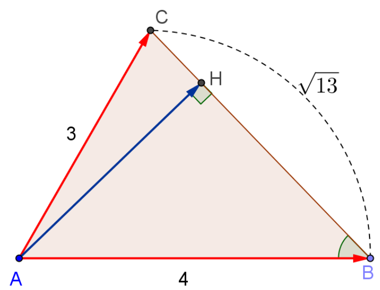


第3問

AB = 4, AC = 3, BC = $\sqrt{13}$ の△ABCがある．

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．

(2) Aから直線BCに下ろした垂線の足をHとするとき，BH:CHを求めよ．



(1) 一般に,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$ (余弦定理)

よって，仮定より

$$(\sqrt{13})^2=4^2+3^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{16+9-13}{2}=\boxed{6}$$

(2) Hは直線BC上より, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ (t は実数) とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=t\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots①$$

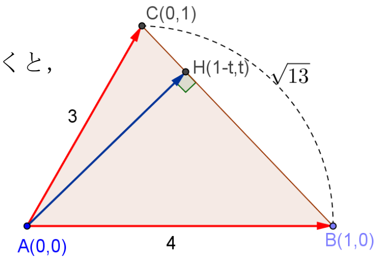
AH ⊥ BC だから, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\cdots②$

$$\therefore \left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=0$$

$$\therefore -(1-t)\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=0$$

$$\therefore -16(1-t)+6(1-t)-6t+9t=0 \Longleftrightarrow t=\frac{10}{13}$$

$$\therefore \ \mathrm{BH}:\mathrm{CH}=t:(1-t)=\frac{10}{13}:\frac{3}{13}=\boxed{10:3}$$



【余弦定理を使った別解】

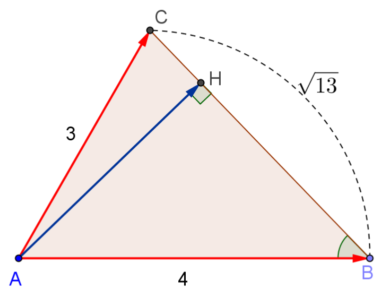
余弦定理より,

$$\cos \mathrm{B}=\frac{(\sqrt{13})^2+4^2-3^2}{2\cdot4\cdot\sqrt{13}}=\frac{20}{8\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$$

$$\therefore \mathrm{BH}=\mathrm{AB}\cdot\cos B=4\cdot\frac{5\sqrt{13}}{26}=\frac{10\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore \ \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}=\frac{\frac{10\sqrt{13}}{13}}{\sqrt{13}}=\frac{10}{13}$$

$$\therefore \mathrm{BH:CH}=\boxed{10:3}$$

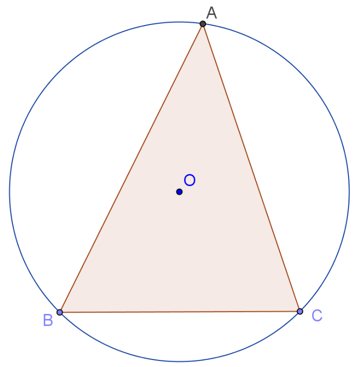


第4問

△ABCの外心をO, 外接円の半径を 1 とする.

$$5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

であるとき，∠Aの大きさを求めよ.



△ABCの外心をO, 外接円の半径を 1 とする.

$$5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

であるとき，∠Aの大きさを求めよ.

仮定より,

$$5\overrightarrow{OA}=-4\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}\ \cdots①$$

$$\therefore \left|5\ \overrightarrow{OA}\right|^2=\left|-4\ \overrightarrow{OB}-3\ \overrightarrow{OC}\right|^2=(-4\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC})\cdot(-4\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC})$$

$$\therefore 25\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=16\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+24\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+9\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$$

$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$ だから,

$$25=16+24\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+9$$

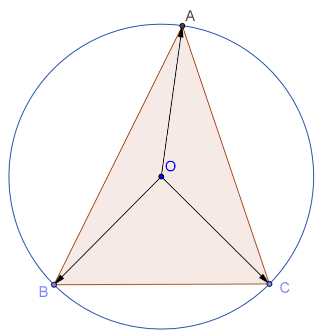
$$\therefore\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$$

$$\therefore\ \angle BOC=90^\circ$$

ここで①より, Aは優弧BC上にあるから,

∠A は劣弧BCに対する円周角となる. 故に

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=\boxed{45^\circ}$$



【余弦定理を使った別解】

仮定より

$$-5\overrightarrow{OA}=4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$$

よって $\overrightarrow{OA'}=-5\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB'}=4\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC'}=3\overrightarrow{OC}$ とおくと

$$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC}$$

ゆえに，四角形OB'A'C' は平行四辺形となる.…①

また，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ だから，

$$OA'=5,\ OB'=4,\ OC'=3\cdots②$$

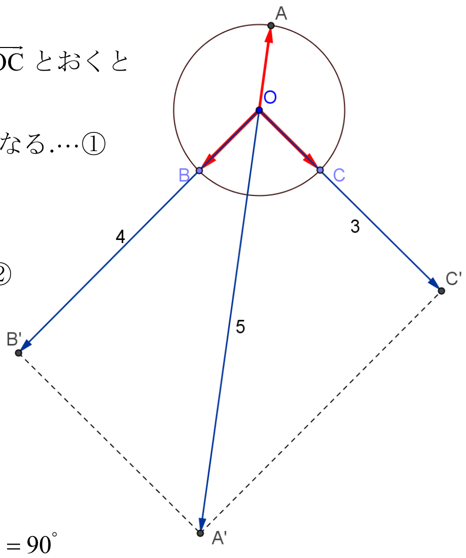
①,②より　　　$C'A'=OB'=4$

故に，△OA'C' において 余弦定理より，

$$\cos OC'A'=\frac{3^2+4^2-5^2}{2\cdot3\cdot4}=0$$

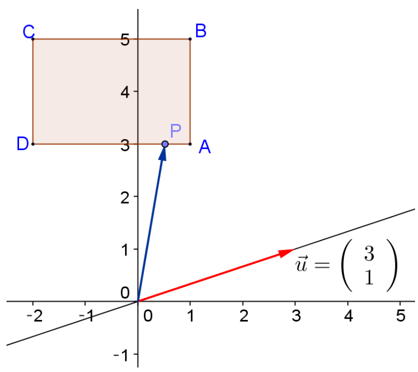
$$\therefore \angle OC'A'=90^\circ$$

OB'//C'A' だから，$\angle BOC=180^\circ-\angle OC'A'=90^\circ$



§5-2.「内積＝正射影」&「内積と成分」

第5問 平面上に 4点 A(1,3), B(1,5), C(−2, 5), D(−2, 3) を頂点とする長方形と $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ がある．点Pが，この長方形上を一周する時 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}$ のとり得る値の範囲を求めよ．



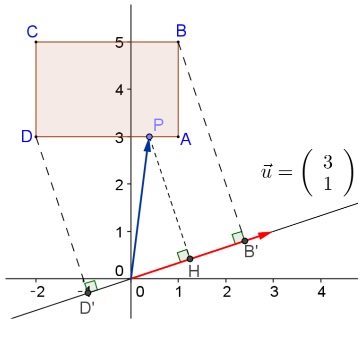
Oを通り$\vec{u}$ と平行な直線を l，P から l に下ろした垂線の足をHとすると，

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{OP}=\vec{u}\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP})=\vec{u}\cdot\overrightarrow{OH}=\begin{cases} |\vec{u}|\times OH & (\overrightarrow{OH}\text{ が }\vec{u}\text{ と同じ方向の時}) \\ -|\vec{u}|\times OH & (\overrightarrow{OH}\text{ が }\vec{u}\text{ と反対方向の時}) \end{cases}$$

よって，図よりPが 点B(1, 5) にあるとき $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OP}$ は最大で，
Pが 点D(−2, 3) にあるとき $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OP}$ は最小となる. 即ち，

最大値は $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=3\times1+1\times5=\boxed{8}$,

最小値は $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=3\times(-2)+1\times3=\boxed{-3}$



第6問

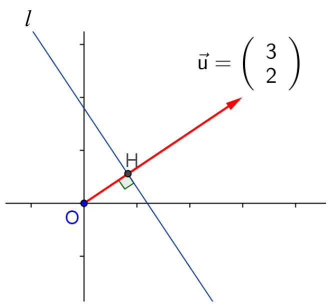
(1) 平面上で $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ と直交し, 原点からの距離が 1である

図の様な直線 l の式を「内積を使って」求めよ.

(Oからl に下ろした垂線の足をHとすると, Hが第 1 象限にある.)

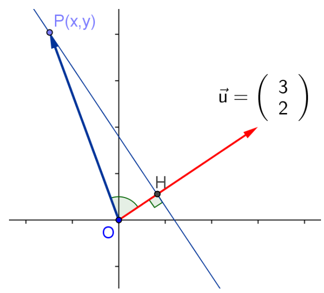
(2)平行な2直線 m_1 : $3x+2y=20$ と m_2 : $3x+2y=40$ の距離を求めよ.

(ヒント:「$m_0 : 3x+2y=0$ と l の距離が 1」である事を利用せよ.)



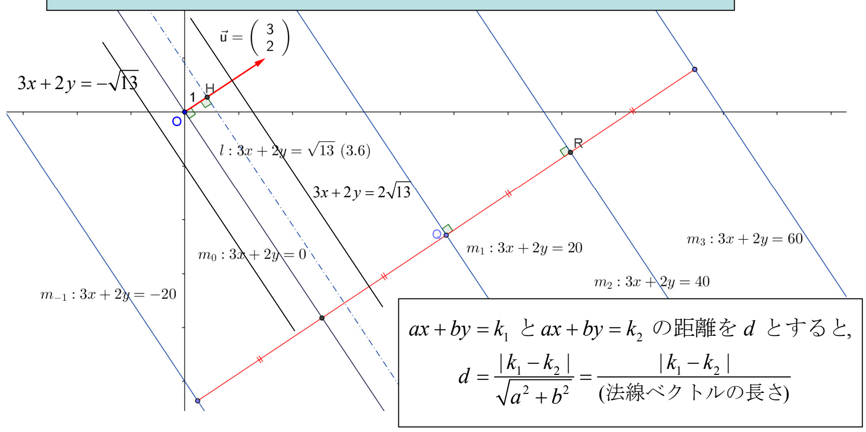
(1) l 上の点をP(x, y), Oからl に下ろした垂線の足をHとすると,
∠POH は鋭角だから

$$\text{P が } l \text{ 上} \iff \vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = |\vec{u}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{POH} = |\vec{u}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$
$$\iff \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \sqrt{3^2+2^2}\times 1$$
$$\iff \boxed{3x+2y=\sqrt{13}}$$



(2) $3x+2y=k$ と　$3x+2y=0$ との距離は $|k|$ に比例する.
よって $3x+2y=20$ と $3x+2y=40$ との距離は,
$3x+2y=0$ と $3x+2y=20$ $(\leftarrow 40-20=20)$ との距離と等しい. ところが
「$3x+2y=0$ と $3x+2y=\sqrt{13}$ との距離が 1」だから，求める距離は $\boxed{\dfrac{20}{\sqrt{13}}}$

$3x+2y=20$ 上の一点B(6,1) と, $3x+2y-40=0$ との距離 d と等しいから
$$d = \frac{|3\cdot 6+2\cdot 1-40|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{20}{\sqrt{13}}$$



$ax+by=k_1$ と $ax+by=k_2$ の距離を d とすると,
$$d = \frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|k_1-k_2|}{(\text{法線ベクトルの長さ})}$$

点と直線の距離の公式

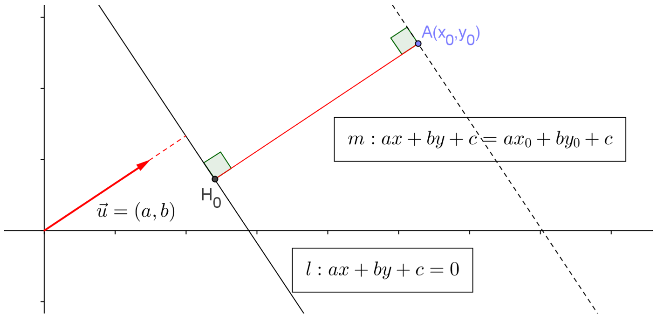
$\mathrm{A}(x_0, y_0)$ を通り l と平行な直線を m とすると,

$$m:\ ax+by+c=ax_0+by_0+c$$

よって,

$l: ax+by+c=0$ と $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ との距離を d とすると,

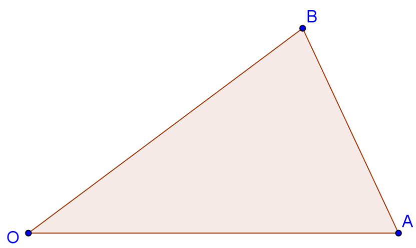
$$d=\left(\frac{|l\text{ と }m\text{ の }(ax+by)\text{の差}|}{\text{法線ベクトルの長さ}}\right)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



§ 5-3. ベクトル方程式

第7問

平面上に△OABが与えられていて $\mathrm{OA}=2$ である.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とするとき,
次の式をみたす動点P は, どのような図形を描くか.
(1) $\vec{a}\cdot\vec{p}=1$
(2) $\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{b}$



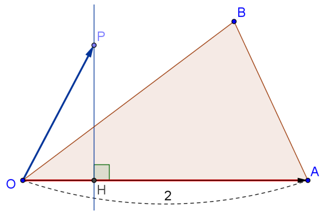
(1) Pから直線OAに下ろした垂線の足をHとすると，

$\vec{p}\cdot\vec{a}>0$ だから, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ方向にある. よって,

$$\vec{p}\cdot\vec{a}=\mathrm{OH}\cdot\mathrm{OA}$$

$\vec{a}\cdot\vec{p}=1$, OA=2 だから, $\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2}$

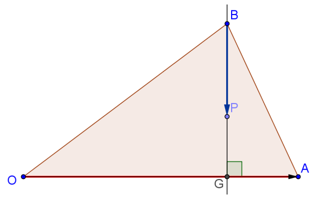
即ち, Pは 線分OAを 1:3 に内分する点Hを通り，
OAに垂直な直線上を動く.



(2) $\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ より,

$$\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$

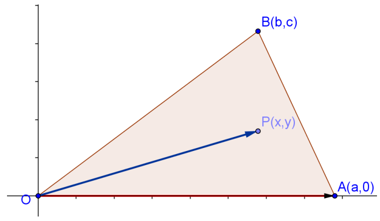
即ち, Pは Bを通り， 直線OAと直交する直線上を動く.



【別解】Oを原点, OAをx軸とする座標系をとると,
A$(a,0)$, B(b,c),P(x,y) とおける. $\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ より,

$$\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}\Longleftrightarrow ax=ab \Longleftrightarrow x=b\ (\because a\neq 0)$$

即ち, Pは Bを通り， 直線OAと直交する直線上を動く.

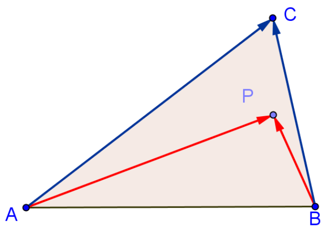


第8問

平面上に△ABCが与えられていて, $\mathrm{AB}=4$ とする.
次の式をみたす動点P は, どのような図形を描くか.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=5$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$



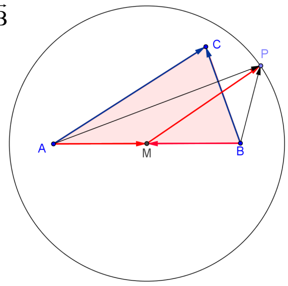
(1) AとBに関し対称なので, ABの中点Mを始点にすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(\overrightarrow{\mathrm{MP}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MP}}-\overrightarrow{\mathrm{MB}})=\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}$$

Mは中点だから, $\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\vec{0}$

よって,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|^2+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right|^2}\cdots①$$



$\mathrm{AB}=4$ だから, $\mathrm{MA}=2$.

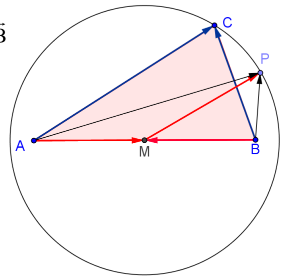
ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=5\iff\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|^2-4=5\iff\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|=3$$

よって, Pの軌跡は, ABの中点Mを中心とする半径3の円.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\overrightarrow{\mathrm{MC}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MC}}-\overrightarrow{\mathrm{MB}})=\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}$

$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right|^2\cdots②$$



①,②より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$\iff\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right|^2$$

$$\iff\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|$$

ゆえに, Pの軌跡は, ABの中点Mを中心とし, 点Cを通る円.

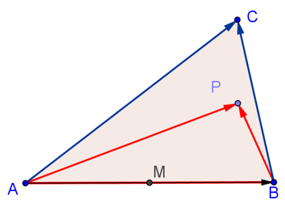
【(1)の別解】 点Aを始点にすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくと, Mは ABの中点で,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{MP}}$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$ (以下略)



【(2)の別解】 Aを原点, ABをx軸とする座標系をとると,

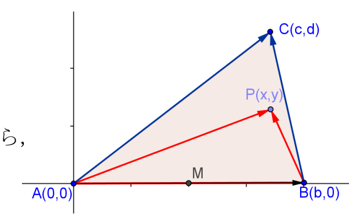
A(0,0), B$(b,0)$,C(c,d), P(x,y) とおける. $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-b\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c-b\\d\end{pmatrix}\iff x(x-b)+y^2=c(c-b)+d^2$$

$$\therefore\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+y^2=c^2-bc+\frac{b^2}{4}+d^2=\left(c-\frac{b}{2}\right)^2+d^2$$

右辺は ABの中点M$\left(\frac{b}{2},0\right)$と C$(c,d)$ との距離の2乗に等しいから,

Pは Mを中心とし, 点Cを通る円上を動く.



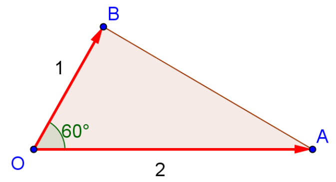
§ 5-4. 内積は, なぜ「cos」で定義するか?

第9問

$\vec{a}\otimes\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ のように, 新しい記号を使って「内積もどき」を定義したら,

$$\vec{a}\otimes(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\otimes\vec{b}+\vec{a}\otimes\vec{c}\ \text{(分配法則)}$$

は成り立つか？　成り立つなら証明し，成り立たないなら，反例を挙げよ．



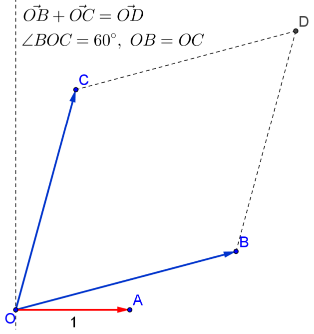
【例】上図の場合, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと,

$$\vec{a}\otimes\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=2\cdot1\cdot\sin60^\circ=\sqrt{3}$$

[参考] $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ と定義したら？

平面上では 直線OAに関し BとCが同じ側にあるならば, 分配法則が成り立つ.
しかし， 直線OAに関し BとCが反対側にあるならば, 分配法則は不成立.
空間ベクトルでは, 通常は, 分配法則は 成り立たない.

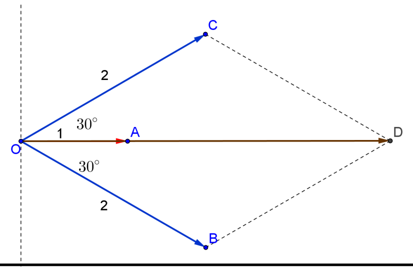
$OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB=1\cdot2\cdot\sin14.77^\circ=0.51$
$OA\cdot OC\cdot\sin\angle AOC=1\cdot2\cdot\sin74.77^\circ=1.93$
$OA\cdot OD\cdot\sin\angle AOD=1\cdot3.46\cdot\sin44.77^\circ=2.44$
$\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OD}$
$\angle BOC=60^\circ,\ OB=OC$



$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin30^\circ=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1,$

$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin30^\circ=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1,$

$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OD}\cdot\sin0^\circ=0$



ここまで見てくださり，ありがとうございました．
今回 使用した PowerPoint（pdf)は，私の site に置いておきます．

http://mixedmoss.com/youtube/vector3&4.pdf

なお，内積もどき（外積)の分配法則に関しては，
私の web site　に詳しい解説を置いてあります．
http://mixedmoss.com/GraphicMath/

他にもいろいろ置いていますので，是非 ご覧ください．