

「数列からの積分」入門

おごせ しげき
生越 茂樹

平成 17 年 12 月 23 日

目次

第 I 部 基本編	4
第 1 章 「積分」＝「数列の和」	5
1.1 introduction	5
1.2 積分の定義	7
1.3 数列の和	9
1.4 定積分と数列の和の関係	11
1.4.1 原始関数が分かっているとき	11
1.4.2 原始関数が分かっているとき	17
1.5 積分と数列の和の関係 (まとめ)	19
第 2 章 置換積分	22
2.1 公式の証明と使い方	22
2.2 直感的な理解 (数列の和と見る)	26
2.2.1 $g(t)$ が 増加関数の場合	26
2.2.2 $g(t)$ が 増加関数とは限らないとき	27
2.3 直感的な理解 (微小面積との関連)	29
2.4 積分区間の取り方	34
第 3 章 面積	36
3.1 面積の基本	36
3.2 パラメーター表示された関数の面積	38
3.3 極表示された曲線の囲む面積	49
第 4 章 体積	51
4.1 基本公式	51
4.2 パラメーター表示曲線の回転体	56
4.3 空間における回転体の体積	62
4.3.1 演習	68
4.4 非回転体の体積	72
第 5 章 練習問題解答	77
第 II 部 発展編	97
第 6 章 微小量 (無限小)	99
6.1 定義	99
6.2 連続性と微小量	99

6.3	微分と微小量 (その 1)	100
6.4	【参考】高階微分と微小量 (Taylor 展開)	100
6.5	微分と微小量 (その 2)	103
6.6	様々な例	103
6.7	ハサミウチと微小量	106
6.8	積分の二つの意味 (復習)	107
第 7 章 極方程式と面積 (その 2)		110
第 8 章 回転体の体積 (バームクーヘン分割)		117
第 9 章 回転体の体積 (斜回転体)		122
9.1	傘型分割	123
第 10 章 非回転体の体積 (「軸 $\perp$ 断面」のとき)		128
10.1	図形が移動してできる立体の体積	128
10.2	立体を「上手に」切断する	134
第 11 章 非回転体の体積 (球, 円柱, 円錐がらみ)		138
11.1	三角関数の利用	138
11.2	【参考】ショートケーキ分割 (バームクーヘン分割の応用)	144
第 12 章 立体の曲面積		151
12.1	円柱の側面積	151
12.2	円すいの側面積	153
12.3	円すいの側面積と正射影	155
12.4	練習問題	158
第 III 部 演習 編		163
第 13 章 問題編		164
13.1	基礎編	164
13.2	発展編	165
第 14 章 演習解答		168
14.1	基本編	168
14.2	発展編	182
あとがき		203

第I部
基本編

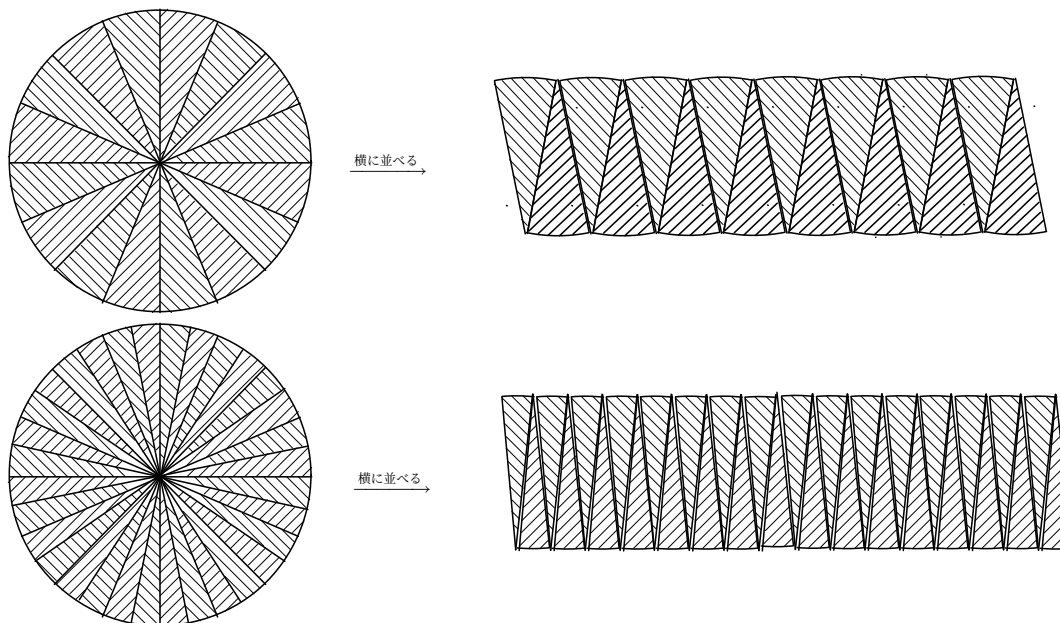
第1章 「積分」＝「数列の和」

1.1 introduction

高校生の皆さんは、積分を**微分の逆算**と考えている人が多いでしょうが、歴史的には、積分は、**数列の和**として定義されました。^{注1)}たとえば、古代ギリシャの時代から、円を細かく細分して、数列の和と考えることにより面積は πr^2 になることは知られていましたし、アルキメデスは、放物線と直線で囲まれた領域の面積を数列の和を利用して求めました。(B.C.300 年頃) その「**数列の和としての積分**」が、**微分の逆算として簡単に計算できる**ことを発見したのが、あの有名な *Newton* と *Leibnitz* です。(1700 年頃) すなわち、*Newton* が発見するまでの、なんと 2000 年ものあいだ、積分は数列の和の公式を使って苦労して求めていたことになります。まず円の面積の復習からしましょう。

例 1

半径 r の円の面積を、図形的に求めよ。ただし、円周率は π とする。



注1) 定義とは、「言葉の意味」という意味で、例えば2等辺三角形とは、普通は「2辺の等しい三角形」と定義されます。これに対して、定理(あるいは公式)とは、「定義から導かれる性質」という意味で例えば、「2等辺三角形の底角が等しい」、「2等辺三角形の頂角から底辺に下ろした垂線は、底辺を垂直に2等分する」、「2等辺三角形の内角の和は 180° である」というのは、2等辺三角形の性質の一部です。定義は、証明できませんが、定理は、必ず証明しないとけません。しかし、何を定義にとるかは、ある程度自由で、例えば、2等辺三角形を「2角の等しい三角形」と定義することもできます。すると「2辺が等しい」というのは定理になって証明すべきものになります。しかし、2等辺三角形を「内角の和が 180° の三角形」と定義するわけには行きません。それは全ての三角形の持つ性質だからです。すなわち、

$$2 \text{ 辺が等しい三角形} \iff 2 \text{ 角が等しい三角形}$$

ですから、この二つはどちらを定義にしても構いませんが、

$$2 \text{ 辺が等しい三角形} \not\iff \text{内角の和が } 180^\circ \text{ の三角形}$$

なので、「内角の和が 180° の三角形」で定義しては、まずい訳です。

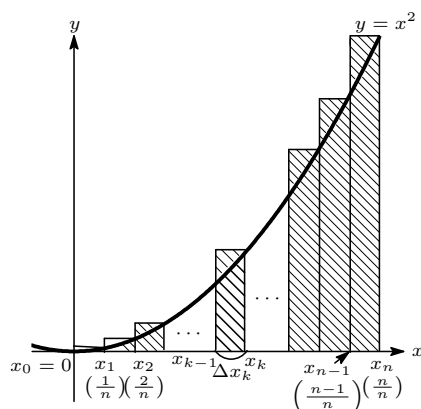
図のように円を n 等分して、互い違いに並べる． n を限りなく大きくすると、右側の楕形は底辺が円周の $\frac{1}{2}$ 、高さが r の平行四辺形に限りなく近づくから、円の面積は

$$S = \frac{1}{2} \times (2\pi r) \times r = \pi r^2$$

厳密には、楕形に外接する平行四辺形と、内接する平行四辺形を考えてハサミウチをやります．今度は、放物線と直線の囲む面積を求めてみましょう．

例 2

$y = x^2$ と x 軸、および直線 $x = 1$ によって囲まれる領域の面積 S を求めよ．



図のように、区間 $0 \leq x \leq 1$ を

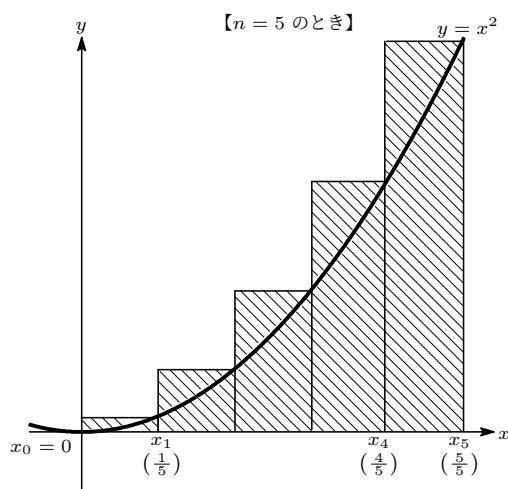
$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_k = \frac{k-1}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n}$$

のように n 個の区間に等分すると、 k 番目の区間は $[x_{k-1}, x_k]$. この長さを δx_k とすると $\delta x_k = \frac{1}{n}$. そして、この区間を底辺とし、高さが $f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ の長方形の面積の和を S_n とすると、

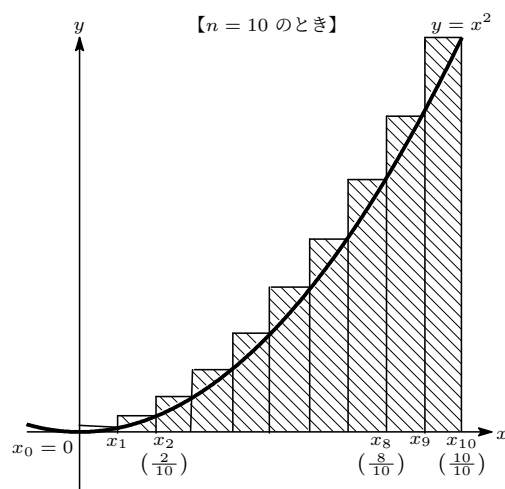
$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \end{aligned}$$

ここで、区間の幅 δx_k ^{注2)} を限りなく小さくしていくと、放物線と直線によって囲まれた面積 S に限りなく近づくので

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

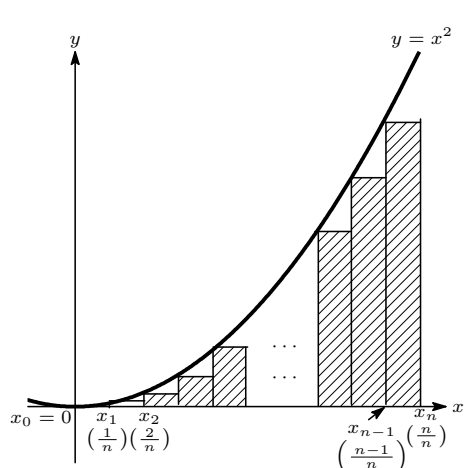


n 増加 $\rightarrow$



— この CG を web site に置いてあります。ご覧ください。—

注2) デルタ と読みます。英語の 'd' に当たります。ちなみに 'D' は Δ



厳密には、放物線に内接する長方形の和も考えて、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})\delta x_k &< S < \sum_{k=1}^n f(x_k)\delta x_k \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 &< S < \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} &< S < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \end{aligned}$$

これは、任意の自然数 n に対し成り立つ. $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \rightarrow \frac{1}{3}, \quad \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$$

であるから、ハサミウチより

$$S = \frac{1}{3} \quad \dots(\text{答})$$

練習 1 上と同様にして $y = e^x$ と $x = 1$, x 軸, y 軸で囲まれた面積を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.

1.2 積分の定義

以上のように、「積分」とは、もともと「細かく分けて積む(集積する)」という意味です。^{注3)}

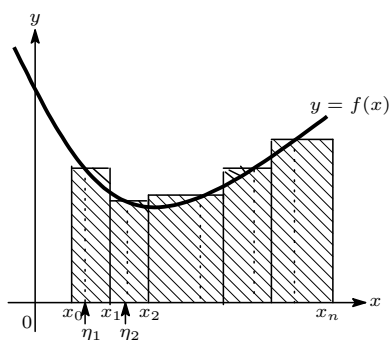
さて $a < b$ のとき, $y = f(x)$ の a から b までの定積分を次のように定義します.

積分の定義

$a \leq x \leq b$ の区間を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ をみたす $\{x_k\}$ によって n 個の細区間に分けて, $\delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) とする. この分割を Δ , δx_k の最大値を Δx とし, η_k を $x_{k-1} \leq \eta_k \leq x_k$ をみたす任意の点とする. ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) このとき,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{f(\eta_1)(x_1 - x_0) + f(\eta_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\eta_n)(x_n - x_{n-1})\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k)\delta x_k \quad \dots(*) \end{aligned}$$

^{注3)} 余談になりますが, 私は, 高校時代に, なぜ積分を, 「積分」と呼ぶのかよく分かりませんでした. また, 「積分」を「分からなさが積もる」と解釈する有名なジョークもあります. ちなみに「微分」は「微かに分かる」です.



今までの例では、区間を n 等分し、また $f(x)$ の値も区間の両端でしか考えませんでした。これに対し (*) では、 $\{x_k\}$ のとり方も、 $f(x)$ の値のとり方も自由です。すなわち、 $\sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k$ は、区間の区切り方 (Δ) や $\{\eta_k\}$ のとり方によってももちろん異なった値を持ちますが、分割の幅 (Δx) が小さくなれば、そのような差は消失して η_k および Δ の選び方によらず一通りに決まる ことがある。そのようなとき、 $f(x)$ は **積分可能** といって、(*) で積分を定義するというわけです。そして、実は、 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ に於いて連続なときは、積分可能であることが分かっています。

さて、積分の定義 $\sum f(\eta_k) \delta x_k$ が分かると、積分の記号が良く分かるようになります。すなわち $\int$ は $\sum$ が、 dx は δx が元になっています。(これらの記号は *Leibnitz* の発明といわれています。)

$$\begin{array}{ccc} \sum & f(\eta_k) & \delta x_k \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \int & f(x) & dx \end{array}$$

よく生徒に

$$\int_a^b x^2 \quad \text{でなぜいけない?}$$

という質問を受けます。「微分の逆算が積分」と思っていれば、まことに無理のない話ですが、この質問を受けると私はいつも悲しくなってしまいます。この小冊子を書いた動機も、「難しい問題はできなくても良いから、一番の基本だけは分かってほしい。」という願いからです。これからは $\int f(x) dx$ が出てきたら

$$\delta x_k \text{ をとても小さくして, } f(\eta_k) \delta x_k \text{ を集めたもの}$$

(細かく分けて集める) と読んで欲しいと思います。 $f(\eta_k) \delta x_k$ を集めるので dx は、絶対省略できません。

この小冊子では、この章で、連続関数では (*) の和が一通りに決まる (すなわち連続関数は積分可能である) ことをできるだけ厳密に説明します。^{注4)} そして、数列の和と積分が密接に関係していることを、高校生でも良く分かるように説明します。さらに、その次の章では置換積分のやり方だけではなく直感的な理解を説明します。その後、パラメータ表示された曲線の囲む面積や体積を取り扱いますが、ここでも普通の参考書にはない統一的な見方を説明します。

注4) 本当に厳密な証明は高校レベルでは不可能なので、少しだけごまかしがあります。しかしその場合は、できるだけそのことを述べるようにしました。

1.3 数列の和

まず、数列の和を復習します。もっとも大切なのは次の公式です。

数列の和

数列 $\{a_n\}$ において、 $a_k = F(k+1) - F(k)$ とかける $F(k)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) が存在すれば

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \{F(k+1) - F(k)\} = - \sum_{k=1}^n \{F(k) - F(k+1)\} \\ &= -[\{F(1) - F(2)\} + \{F(2) - F(3)\} + \{F(3) - F(4)\} + \dots + \{F(n) - F(n+1)\}] \\ &= -\{F(1) - F(n+1)\} \\ &= F(n+1) - F(1)\end{aligned}$$

例 3 (分数の和)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

$F(n) = -\frac{1}{n}$ とおくと

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \left(-\frac{1}{k+1}\right) - \left(-\frac{1}{k}\right) = F(k+1) - F(k)$$

よって

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{F(k+1) - F(k)\} = F(n+1) - F(1) = -\frac{1}{n+1} + 1 \quad \text{となります.}$$

例 4 (等比数列の和)

$3^{k+1} - 3^k = (3-1)3^k = 2 \cdot 3^k$ だから、 $3^k = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 3^k)$. よって、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n 3^k &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (3^{k+1} - 3^k) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (3^k - 3^{k+1}) \\ &= -\{(3 - 3^2) + (3^2 - 3^3) + (3^3 - 3^4) + \dots + (3^n - 3^{n+1})\} \\ &= \frac{-3 + 3^{n+1}}{2} = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1}\end{aligned}$$

$F(k) = \frac{3^k}{2}$ とおくと、 $a_k = 3^k = F(k+1) - F(k)$ だから、

$$\sum_{k=1}^n 3^k = \sum_{k=1}^n \{F(k+1) - F(k)\} = F(n+1) - F(n) = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3^n) \quad \text{となります.}$$

この結果は 等比数列の和の公式； $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ と一致します.

一般に $r^k - r^{k-1} = (r-1)r^{k-1}$ ですから, $r \neq 1$ のとき,

$$r^{k-1} = \frac{r^k}{r-1} - \frac{r^{k-1}}{r-1}$$

よって $F(k) = a \frac{r^{k-1}}{r-1}$ とおくと, $ar^{k-1} = F(k+1) - F(k)$. ゆえに,

$$\sum_{k=1}^n ar^{k-1} = \sum_{k=1}^n \{F(k+1) - F(k)\} = F(n+1) - F(1) = \frac{ar^n}{r-1} - \frac{ar^0}{r-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

例 5 ($\sum_{k=0}^n k^2$)

$k = 1, 2, 3, \dots$ のとき,

$$\begin{cases} (k+1)^3 - k^3 &= 3k^2 + 3k + 1 & \cdots \textcircled{1} \\ (k+1)^2 - k^2 &= 2k + 1 & \cdots \textcircled{2} \\ (k+1) - k &= 1 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times \frac{1}{3} - \textcircled{2} \times \frac{1}{2} + \textcircled{3} \times \frac{1}{6}$ より

$$\frac{(k+1)^3}{3} - \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{(k+1)}{6} - \left\{ \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} \right\} = \frac{3k^2 + 3k + 1}{3} - \frac{2k + 1}{2} + \frac{1}{6} = k^2$$

よって $F(k) = \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}$ とおくと, $k^2 = F(k+1) - F(k)$ だから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n \{F(k+1) - F(k)\} = F(n+1) - F(1) \\ &= \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} - \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right\} \\ &= \frac{n+1}{6} \{2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

このようにして, 高校の教科書で出てくる **全ての** 数列の和の公式を, 導くことができます.

練習 2 等差数列の和の公式 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ を, 上と同様にして導け.

1.4 定積分と数列の和の関係

1.4.1 原始関数が分かっているとき

先に見た関係は、定積分と微分の関係に似ています。

微分と積分の関係 (特別な場合)

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k$$

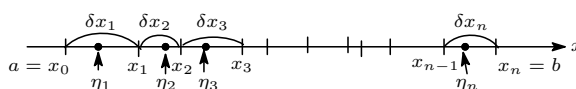
と定義する。(第1章参照) このとき、 $a \leq x \leq b$ において、

$$f(x) = F'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

となる $F(x)$ が存在すれば

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k = F(b) - F(a)$$

(但し、 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $x_{k-1} \leq \eta_k \leq x_k$, $\delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta x = \max\{\delta x_k\}$)



【証明】

平均値の定理と $F'(x) = f(x)$ より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ にたいし、

$$\begin{aligned} F(x_k) - F(x_{k-1}) &= F'(\bar{\eta}_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= f(\bar{\eta}_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= f(\bar{\eta}_k)\delta x_k \end{aligned}$$

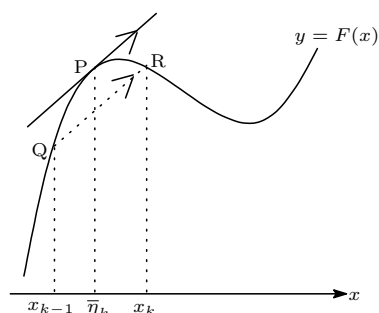
(ただし $\bar{\eta}_k$ は、区間 $[x_{k-1}, x_k]$ において **適当に定まる数**)

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ として、両辺を加えると

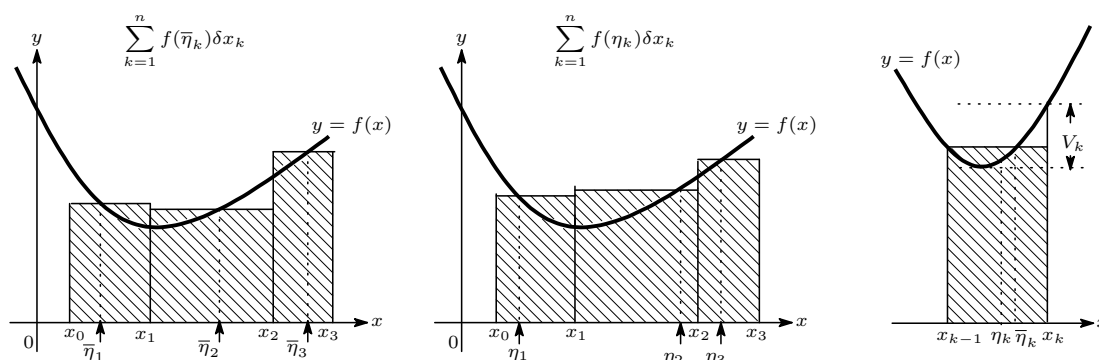
$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_0) &= f(\bar{\eta}_1)\delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(\bar{\eta}_2)\delta x_2 \\ F(x_3) - F(x_2) &= f(\bar{\eta}_3)\delta x_3 \\ &\vdots \\ + F(x_n) - F(x_{n-1}) &= f(\bar{\eta}_n)\delta x_n \\ \hline F(x_n) - F(x_0) &= \sum_{k=1}^n f(\bar{\eta}_k)\delta x_k \end{aligned}$$

$x_0 = a, x_n = b$ だから、

$$\sum_{k=1}^n f(\bar{\eta}_k)\delta x_k = F(b) - F(a) \quad \dots (*)$$



【点 P における接線 // 直線 QR】



これで証明できたような **気がする** かもしれませんが、実は η_k は、区間 $[x_{k-1}, x_k]$ において「**適当に定まる数**」であり、 η_k は、区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 内の「**任意の数**」ですから、まだ終わっていません。(つまり $f(x)$ と分割 Δ が決まってしまうと $\{\eta_k\}$ は自動的に定まるが、 $\{\eta_k\}$ の方は自分で勝手に取ってよい点が違います。) η_k を、区間 $[x_{k-1}, x_k]$ に含まれる「**任意の数**」とすると、

$$\sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k - \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k = \sum_{k=1}^n \{f(\eta_k) - f(\eta_k)\} \delta x_k$$

ここで区間 $[x_{k-1}, x_k]$ における $f(x)$ の最大値と最小値の差を V_k , V_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) の最大値を V とすると、 $|f(\eta_k) - f(\eta_k)| \leq V$ だから、三角不等式 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ も用いると

$$\left| \sum_{k=1}^n \{f(\eta_k) - f(\eta_k)\} \delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\eta_k) - f(\eta_k)| \delta x_k \leq V \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = V(b-a)$$

ここで、 $\Delta x \rightarrow 0$ (区間の幅を限りなく小さくする) のとき、 $V \rightarrow 0$ であるから^{注5)}

$$\sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k - \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k = \sum_{k=1}^n \{f(\eta_k) - f(\eta_k)\} \delta x_k \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0 \text{ のとき}) \quad \dots (**)$$

よって (*) より

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k = F(b) - F(a) \quad \dots (\text{証明終})$$

ご覧のように、数列の和と定積分には、非常に密接な関係があります。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = F(k+1) - F(k) \\ f(x) = F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n a_k = F(n+1) - F(1) \\ \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k = F(b) - F(a) \end{array} \right.$$

$a(k) = F(k+1) - F(k)$ をみたと $F(k)$ は、積分における「**原始関数**」のような働きをしています。

注5) $\Delta x \rightarrow 0$ のとき

$$V \rightarrow 0$$

となることは、図からはほとんど明らかですが、大学ではこれも証明します。(一様連続性)

例 6 $f(x) = 3x^2$, $F(x) = x^3$ として考えて見ます. 区間 $[0, 1]$ を $\{x_k\}$ で n 等分し $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ とすると, 分割の幅は $\Delta x = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} F(x_k + \Delta x) - F(x_k) &= (x_k + \Delta x)^3 - (x_k)^3 = 3(x_k)^2 \Delta x + 3x_k(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\ &= 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + 3\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^3} \end{aligned}$$

$\Delta F_k = F(x_k + \Delta x) - F(x_k) = F'(\bar{\eta}_k) \Delta x = f(\bar{\eta}_k) \Delta x$ とおくと

$$\Delta F_k = \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot 3(\bar{\eta}_k)^2. \quad \therefore \bar{\eta}_k = \sqrt{\frac{3k^2 + 3k + 1}{3n^2}}$$

$\frac{k}{n} < \bar{\eta}_k < \frac{k+1}{n}$ をみたすから, 確かに $\bar{\eta}_k$ は 区間 $[x_k, x_{k+1}]$ に含まれる. そして

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} 3(\bar{\eta}_k)^2 \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^3}{n^3} = 1 = F(1) - F(0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

これが (*) の式です. $\bar{\eta}_k$ は 区間 $[x_k, x_{k+1}]$ 内の **定まった** 点です. 今度は, 区間 $[x_k, x_{k+1}]$ 内の **任意の** 点 η_k をとって n 個の和 I_n を作ってみます.

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k) \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} 3(\eta_k)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

(*) と I_n の差を求めると

$$(*) - I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} - 3(\eta_k)^2 \right\} \cdot \frac{1}{n}$$

ところが $x_k < \eta_k < x_{k+1}$ だから $(\frac{k}{n})^2 < \eta_k^2 < (\frac{k+1}{n})^2$. よって

$$\begin{aligned} \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} - 3\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 &< \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} - 3(\eta_k)^2 < \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} - 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ \iff -\frac{3k+2}{n^2} &< \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} - 3(\eta_k)^2 < \frac{3k+1}{n^2} \end{aligned}$$

ゆえに

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{3k+2}{n^2} < (*) - I_n < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{3k+1}{n^2}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, 左辺と右辺は 0 に収束するので, ハサミウチより η_k の選び方によらず I_n は (*) に収束する. これが 前の (**) に当たります.

Comment

このやり方で気になるのは 「(*) や ① の式は分割の個数によらず完全に正確で $\Delta x \rightarrow 0$ は (**) の式が成り立つためにのみ使われている」という点でしょう. この点が気になるのならば次のような考え方もできます. (ただし厳密に証明するのはより難しい.)

簡単のために $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ のように $\{x_k\}$ を等間隔にとり区間 $[a, b]$ を n 等分したとする. $F'(x) = f(x)$ より

$$\begin{aligned}\Delta F_k &= f(x_k)\Delta x + \epsilon\Delta x \quad \left(\text{ただし, } F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_k}{\Delta x} = f(x_k) \text{ より } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon = 0 \right) \\ \therefore \sum_{k=0}^{n-1} \Delta F_k &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon\Delta x\end{aligned}$$

よって (各区間における) $|\epsilon|$ の最大値を E とおくと

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \Delta F_k - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon\Delta x \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\epsilon|\Delta x \leq E \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x = E(b-a)$$

$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta F_k = F(b) - F(a)$, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $E \rightarrow 0$ だから^{注6)}

$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

^{注7)} 誤差 $\epsilon\Delta x$ が Δx より高位の微小量であれば, その誤差の和は, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき限りなく 0 に近づき, したがって 積分和を考えると Δx より高位の微小量は無視してよい^{注8)} ことが良く分かります. 直感的にはこの方が納得しやすいかもしれません.

例 7 $f(x) = 3x^2$, $F(x) = x^3$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ のように $\{x_k\}$ を等間隔にとると,

$$\begin{aligned}F(x_{k+1}) - F(x_k) &= (x_k + \Delta x)^3 - (x_k)^3 = 3(x_k)^2\Delta x + 3x_k(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\ \therefore \sum_{k=0}^{n-1} \{F(x_{k+1}) - F(x_k)\} &= \sum_{k=0}^{n-1} 3(x_k)^2\Delta x + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k\Delta x \quad (\text{ただし } \epsilon_k = 3x_k\Delta x + (\Delta x)^2)\end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{n-1} \{F(x_{k+1}) - F(x_k)\} = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$, また $a \leq x_k \leq b$ だから

$$|\epsilon_k| = |\Delta x(3x_k + \Delta x)| \leq \Delta x(3|x_k| + \Delta x) \leq \Delta x(3\max(|a|, |b|) + (b-a)) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

ゆえに $E = (3\max(|a|, |b|) + (b-a))\Delta x$ とおくと

$$\begin{aligned}\left| \{F(b) - F(a)\} - \sum_{k=0}^{n-1} 3(x_k)^2\Delta x \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k\Delta x \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\epsilon_k|\Delta x \leq E \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x = E(b-a) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \\ \therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} 3(x_k)^2\Delta x &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

よって, 積分の定義より

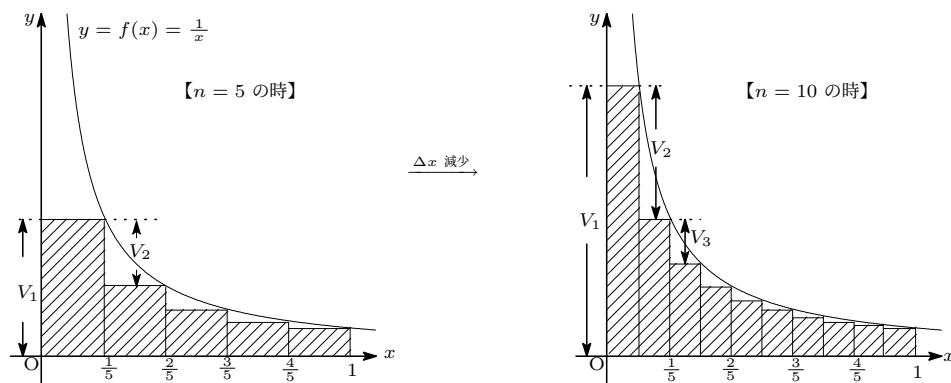
$$\int_a^b 3x^2 dx = F(b) - F(a)$$

^{注6)} 詳しく言うと x_k の取り方によらず E は 0 に収束すること (一様収束) を言わないといけませんが, 省略します.

^{注7)} ここで $[x_k, x_{k+1}]$ 内の任意の点をとっても積分和は同じ値に収束することは, 「 $f(x)$ の連続性」を使って説明したので右辺の等号が成り立ちます.

^{注8)} α, β がともに微小量で $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$ のとき, α が β より高位の微小量と言います. 微小量については「発展編」を参照してください.

－【参考】あなたは気づきましたか？－



V_k を「 $(k+1)$ 番目の区間 $[x_k, x_{k+1}]$ における $f(x)$ の最大値と最小値の差」と定めたとき、「 $V = \max\{V_k\} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ 」は殆ど明らかですが、これは $f(x)$ が連続なので成り立つ性質です。例えば、 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とすると、 $f(x)$ は $x = 0$ で不連続です。区間 $[0, 1]$ を $x_k = \frac{k}{n} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ と等間隔に分割するとその幅は $\Delta x = \frac{1}{n}$ 。 $f(x)$ は $0 < x \leq 1$ では単調減少だから

$$V_k = f(x_k) - f(x_{k+1}) = \frac{n}{k} - \frac{n}{k+1} = \frac{n}{k(k+1)}$$

$(0, 1]$ 内の点 $x = \frac{k}{n}$ を固定して 分割の幅 $\Delta x = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ とすると

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} V_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{k}{n} \cdot \left(\frac{k}{n} + 1\right)} = 0$$

このように x を止めておいて $\Delta x \rightarrow 0$ とするとき、 $V_k \rightarrow 0$ となります。ところが分割 Δ を固定したときの $(n$ を一定にしたときの) V_k は $k = 1$ のとき最大となるので

$$V = f(x_1) - f(0) = \frac{1}{x_1} = n$$

よってこの場合は「 $V_k \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ でも、 $V \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ 」とはなりません。これは x が一定でなく $n \rightarrow \infty$ のとき不連続点 (原点) に近づいて行っただけです。しかし「 $f(x)$ が連続なら $V \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ となる」というわけですが、 $f(x)$ の連続性だけを仮定したらその証明は難しい。しかし $f'(x)$ も連続と仮定すると、そんなに難しくありません。

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} V = 0$ ($f'(x)$ も連続のとき)

$f'(x)$ が $a \leq x \leq b$ において連続のとき $[a, b]$ を n 個の区間に $\{x_k\}$ で分けたとし、 $[x_k, x_{k+1}]$ における最大値と最小値の差を V_k 、 V_k の最大値を V とすると $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} V = 0$

【証明】 $x, x+h$ がともに区間 $[x_k, x_{k+1}]$ に含まれるとき、平均値の定理より

$$f(x+h) - f(x) = hf'(\bar{\eta}) \quad (\bar{\eta} \text{ は } x+h \text{ と } x \text{ の間の適当な数})$$

$f'(x)$ は連続関数なので $|f'(x)|$ は $[a, b]$ において最大値を持つ。これを M とすると

$$|f(x+h) - f(x)| = |h| |f'(\bar{\eta})| \leq |h| M \leq \Delta x M$$

すなわち $x, x+h$ が $[x_k, x_{k+1}]$ をくまなく動き回るとき、 $|f(x+h) - f(x)| \leq M \Delta x$ だから

$$V_k \leq M \Delta x. \quad \therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} V_k = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

このポイントは $V_k \leq M \Delta x$ のように定数 M を使って抑えることができた点です。 M が Δx や x_k の関数になっていると (先の例のように) $\Delta x \rightarrow 0$ のときでも、 $M \Delta x \rightarrow 0$ とは限りません。 $f(x)$ が連続なだけでもこの性質は成り立ちますが、その証明は難しいのでここでは省略します。

練習 3 例 6 において $J_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \Delta x$ とおく. $n = 1, n = 2, n = 3$ の各々の場合につき, $\bar{\eta}_k (k = 1, 2, \dots, n)$ の値を求めて J_n の式を書き, それが $F(1) - F(0)$ と一致していることを確かめよ.

練習 4
 $f(x) = e^x$, 区間 $[0, 1]$ を $\{x_k\}$ で n 等分し $x_k = \frac{k}{n} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$, $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ とする. さらに $\eta_k (k = 1, 2, 3, \dots, n)$ を区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の **任意の点** として $J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$, $I_n = \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x$ と定める. この時,

$$|I_n - J_n| \leq (e - 1) \Delta x$$

が成り立つことを示し $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |I_n - J_n| = 0$ を証明せよ.

この2つの問題はそれぞれ「 $F'(x) = f(x)$ をみたす $F(x)$ が存在すれば, $\sum_{k=1}^n f(\bar{\eta}_k) \delta x_k = F(b) - F(a)$ 」(11 頁の (*)) と「区間の幅 Δx を小さくすれば積分の和は同じ値に収束する」(12 頁の (**)) の例に当たっています.

1.4.2 原始関数が分かってないとき

－ この節は、高校の数学では余り扱っていないので、興味のある人のみ読んでください－

以上から **例題 2**, **練習 1** の問題は次のようにすぐ解けます. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, $(e^x)' = e^x$ なので, $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \\ \int_0^1 e^x dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(\eta_k) \delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = [e^x]_0^1 = e - 1\end{aligned}$$

しかし、これではまだ不完全です. というのも

$$\int_0^2 x^2 e^{x^2} \sin x dx \quad \dots \textcircled{1}$$

などの複雑な式 $f(x)$ が出てきたとき、果たして $F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ が存在するか明らかでないからです. 存在するかもしれないかわからないものを、「 $\textcircled{1}$ のように定義する」ことは不可能です. ところが、幸いにして、 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続ならば、任意の x ($a < x < b$) に対し、 $F'(x) = f(x)$ をみたす $F(x)$ が作れます. とりあえず一つ作れば良いので、例えば、次のようにします. いま、区間 $[a, x]$ 中に $\frac{1}{2^n}$ の整数倍となる点をできるだけ詰め込んで分割 Δ を作ります. すなわち、整数 N, M を

$$\frac{1}{2^n} \cdot N \leq a < \frac{1}{2^n} \cdot (N+1), \quad \frac{1}{2^n} \cdot M \leq x < \frac{1}{2^n} \cdot (M+1)$$

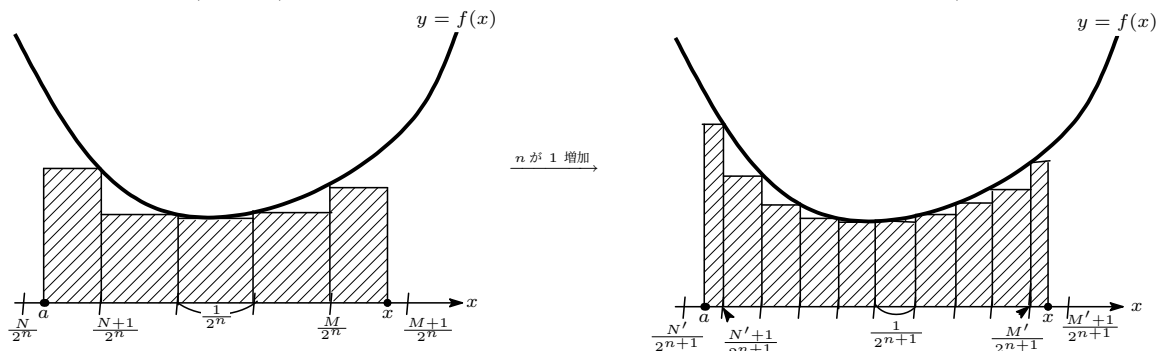
となる整数 N, M とし、さらに、分割点 $\{x_k\}$ を

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{1}{2^n} \times (N+1), \quad x_2 = \frac{1}{2^n} \times (N+2), \dots, x_{M-N} = \frac{1}{2^n} \times M, \quad x_{M-N+1} = x$$

ととります. そして区間 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, M-N+1$) における $f(x)$ の最小値を m_k とおくと、

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{M-N+1} m_k \delta x_k = \sum_{k=1}^{M-N+1} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{M-N+1} m_k \cdot \frac{1}{2^n}$$

と定義します. (これは有限個の和なので、定義できます.) このとき n が一つ増える毎に、分割 Δ は、今までの小区分 (短冊形) を、さらに 2 分することになります. (両端の小区分を除く)



ゆえに (x を固定して考えると) $F_n(x)$ は n の増加関数 となります. ($f(x) > 0$ のときは斜線部分の面積が増加することを表しています.) ところが明らかに $F_n(x)$ は x が一定のときは有界です (有限な値

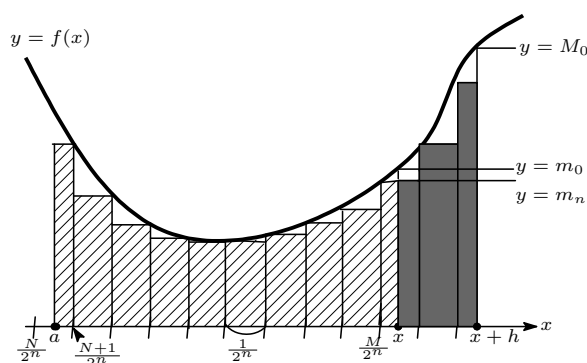
を超えない。) すなわち

$$F_n(x) \leq (b-a) \times (\text{区間 } [a, b] \text{ に於ける } f(x) \text{ の最大値})$$

ですから, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$ が存在します. 注9) よって

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{M-N+1} m_k \delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{M-N+1} m_k \cdot \frac{1}{2^n}$$

とすれば $F(x)$ が定義されます. この $F(x)$ に対して $F'(x) = f(x)$ がなりたつ事を見るのは, 高校の教科書とほとんど同様です. いま, $h > 0$ (ただし $x+h \leq b$) として, 区間 $[x, x+h]$ における $f(x)$ の最小値を m_0 , 最大値を M_0 , 区間 $[\frac{M}{2^n}, x+h]$ 注10) における $f(x)$ の最小値を m_n で表すと, 任意の n ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対し,



$$m_n \cdot h \leq F_n(x+h) - F_n(x) \leq M_0 \cdot h$$

各辺を h で割ると

$$m_n \leq \frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} \leq M_0$$

よって $n \rightarrow \infty$ の極限をとって

$$m_0 \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_0$$

注11)

m_0, M_0 は n にはよらず, x と h だけの関数になっています. つぎに $h \rightarrow +0$ の極限をとると, $f(x)$ は連続なので, $M_0 \rightarrow f(x)$ かつ $m_0 \rightarrow f(x)$. ゆえに, ハサミウチより

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

これは $h < 0$ のときも同様に成り立つので, 結局 $f(x)$ の原始関数の存在がいえたことになります. そして, 先の定理より,

$$f(x) = F'(x) \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k = F(b) - F(a)$$

$$(a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, x_{k-1} \leq \eta_k \leq x_k, \delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta x = \max\{\delta x_k\})$$

すなわち, 原始関数が1つでも存在すれば分割 (Δ) のとり方や, $\{\eta_k\}$ のとり方によらず上の数列の和は一定値に収束することがいえているので, 結局, 次の定理が成り立つことが証明されました.

注9) 有界な単調数列は収束します. すなわち,

$$a_n \leq M \text{ (定数) かつ } a_n \leq a_{n+1} \text{ (} n = 1, 2, 3, \dots \text{)} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ が存在する}$$

注10) この区間は, 区間 $[x, x+h]$ を含んでいて, 左端の座標がちょうど $\frac{1}{2^n}$ の整数倍になっています.

注11) $a_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき, $\{a_n\}, \{b_n\}$ の極限が存在すれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

微分と積分の関係 (一般の場合)

$f(x)$ が 区間 $[a, b]$ において連続なとき, $a \leq x \leq b$ をみたす任意の x に対し

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k$$

(但し $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x$, $x_{k-1} < \eta_k \leq x_k$, $\delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta x = \max\{\delta x_k\}$)

と定めると, 右辺の和は, 分割 (Δ) の選び方や, $\{\eta_k\}$ のとり方によらず一通りに定まる. すなわち $F(x)$ が定義できる. さらに,

$$F'(x) = f(x)$$

注12)

1.5 積分と数列の和の関係 (まとめ)

先に見たように, 数列の和と積分の間には, 非常に密接な関係があります. $f(x)$ が連続なとき,

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_k = F(k+1) - F(k) & \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k = F(n+1) - F(1) \\ f(x) = F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} & \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k = F(b) - F(a) \end{array} \right.$$

さらに, 次の関係も加わりました.

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_n = \sum_{k=1}^n a_k & \Rightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \\ F(x) = \int_a^x f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \delta x_k & \Rightarrow F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \end{array} \right.$$

注12) これを「微積分の基本定理」といいます. 大学では(多分), 「 $f(x)$ が連続なとき, 右辺の和が, 区間の分割 (Δ) の仕方や, $\{\eta_k\}$ のとり方によらず一通りに定まること」($\cdots(*)$) を証明してから, $S(x)$ を

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(x)dx$$

として定義し, $S'(x) = f(x)$ を証明します. 高校の教科書では, $(*)$ は証明が難しいので省略し, それは当たり前のものとして, $y = f(x)$ と $y = 0$, $t = a, t = x$ で囲まれた面積を $S(x)$ として, $S'(x) = f(x)$ の部分だけを証明しています. しかし, このやり方だと数列の和との関係がわかりにくいという欠点があります.

この本では, あくまでも, **数列の和で積分を定義**したかったのです. しかし, $(*)$ の証明は非常に難しいので,

(i) **特別な数列の和**として, 積分もどき: $F(x)$ を定めて, それが $F'(x) = f(x)$ をみたすことを証明.

(ii) $F'(x) = f(x)$ が成り立てば, 区間の分割 (Δ) の仕方や, $\{\eta_k\}$ のとり方によらず, 和は一通りに定まることの証明.

の2段階に分けて証明してみました. (実際の書く順序は逆にしました.) この方法も, もしかしたら, 解りにくいという欠点(ˆ;)があるかもしれません. 開き直るみたいですが, 「本なんて全部わかる必要ない」のです. 小説でさえ全ては分かりません. 筋だけ追ってもらえれば結構です. とにかくこの小冊子でやりたかったのは, 「教科書ではなく, 副読本を書く」, 「問題が並んでいるだけでなく, 筋のある本を書く」ということなので, 勘弁してください.

実際には 下のボックス内の

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \implies a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

という関係は、 a_n から S_n を求めるときには、余り役に立ちません。例えば、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2} = S_k - S_{k-1} (k=2, 3, 4, \dots)$$

という関係は正しいですが、これを使っても、 S_n が求まる (簡単になる) わけではありません。一般に $F'(x) = f(x)$ をみたく $F(x)$ や $a_{k+1} - a_k = F_k$ をみたく F_k が見つからないときは、 $\int f(x)dx$ や $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$ を求めることは困難です。^{注13)} しかし例外があります。すなわち、原始関数が分からなくても、 $\int_a^b f(x)dx$ や $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$ が求まる場合があります。

例 8

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) $t = \frac{\pi}{2} - x$ と置くことによって、 $I = J$ を示せ。

(2) I の値を求めよ。

【解答】 (次の章で述べる置換積分の公式を使います。)

(1) $t = \frac{\pi}{2} - x$ と置くと、

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

$$dt = -dx,$$

よって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - t)}{\sin(\frac{\pi}{2} - t) + \cos(\frac{\pi}{2} - t)} (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = J \end{aligned}$$

(2)

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

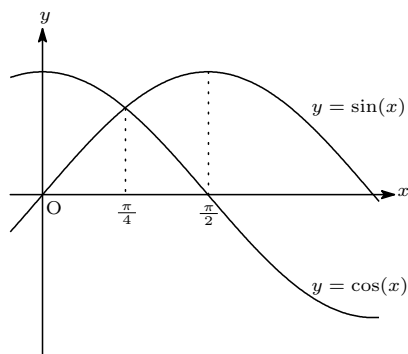
(1) より $I = J$ だから、

$$I = J = \frac{\pi}{4} \quad \dots (\text{答})$$

この問題では 原始関数を求めずに、 I と J が存在することだけを使って積分の値を求めました。数列に関しても同様の例が作れます。実は $\sin x$ と $\cos x$ が $x = \frac{\pi}{4}$ に関し対称であることを使っています。(次の頁参照) このような例外を除けば、 $F'(x) = f(x)$ をみたく $F(x)$ や $a_{k+1} - a_k = F_k$ をみたく F_k が見つからないときは、高校の範囲では $\int f(x)dx$ や $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$ を求めることは (おそらく) できません。

^{注13)} 以前述べたように等差数列や等比数列、 k^2, k^3 の和なども全て $a_{k+1} - a_k = F_k$ をみたく F_k が見つかります。

【参考】



一般に $t = \frac{\pi}{2} - x$ と置くと,

$$dt = -dx,$$

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx \end{aligned}$$

が成り立ちます。これは、つまるところ、 $\sin x$ と $\cos x$ が $x = \frac{\pi}{4}$ に関し対称であることを使っています。

練習 5 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ とする。 $S_n = 2^n - 3n^2 - 1$ のとき $\{a_n\}$ の一般項と S_n を最小にする n の値を求めよ。

練習 6 $F(x) = \int_0^x (2t - \pi) \sin^4 t \, dt$ とする。 $0 \leq x \leq \pi$ において $F(x)$ を最小にする x の値を求めよ。

練習 7

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3} dx$$

の値を求めよ。

練習 8 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$I = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2 + (n - k + 1)^2}$$

の値を求めよ。

第2章 置換積分

— これ以後は 被積分関数は全て連続とします. $g(x) = u$ と置換するときは $g'(x)$ も連続とします—

置換積分の公式は, 合成関数の微分法を使って証明します.

2.1 公式の証明と使い方

置換積分 (不定積分)

$g(x) = u$ とおくと

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

【証明】 $f(u)$ の原始関数の 1 つを $F(u)$ とする. すなわち, $F'(u) = f(u)$ とすると,

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF(u)}{dx} = F'(u) \frac{du}{dx} = f(u) \frac{du}{dx} = f(g(x))g'(x)$$

すなわち, $f(g(x))g'(x)$ の原始関数の 1 つが $F(g(x))$ であるから, 不定積分の定義より

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int f(u)du \quad (\text{証明終})$$

定積分 (置換積分 – A type)

$g(x) = u$, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$ とすると

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(u)du$$

x	α	$\longrightarrow$	β
u	a	$\longrightarrow$	b

【証明】

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

だから (右辺を微分して検算してみてください),

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \left[F(g(x)) \right]_{\alpha}^{\beta} = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)du \quad (\text{証明終})$$

覚え方は, 例えば「 $g(x) = u$ より $g'(x) = \frac{du}{dx}$ 」. この分母を**形式的に**払うと「 $g'(x)dx = du$ 」. そして,

$$\int f(g(x)) \boxed{g'(x)dx} = \int f(u) \boxed{du} \quad \text{のように} \quad \text{「} g'(x)dx \text{を} du \text{で形式的に置き換える」}$$

と覚えればよいです. さて, 証明はあっけないほど簡単ですが, もし「証明せよ」という問題を出せば, できない人はかなりいると思います. こういう時は, 例を考えて見ましょう.

例 9 (置換積分 – A type)

次の積分を求めよ.

(1) $\int \frac{\log x}{x} dx$

(2) $\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x} dx$

(1) $\int \frac{\log x}{x} dx = \int \log x (\log x)' dx$ だから, $\log x = u$ とおくと $\frac{1}{x} dx = du$. よって,

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\log x)^2}{2} + C$$

実際には, $u = \log x$ から, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$. この分母を払って 「 $\frac{1}{x} dx = du$ 」 と形式的に置き換えれば計算できます. 注1)(2) (1) より $\int \frac{\log x}{x} dx = \frac{(\log x)^2}{2} + C$ だから

$$\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x} dx = \left[\frac{(\log x)^2}{2} \right]_e^{e^2} = \frac{(\log e^2)^2}{2} - \frac{(\log e)^2}{2} = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 = \int_1^2 u du$$

実際の計算では, 不定積分を求めなくても, 積分変数の変換に注意さえすれば 計算できます.

$$\log x = u \text{ とおくと } \frac{1}{x} dx = du.$$

x	e	$\rightarrow$	e^2
u	$\log e$	$\rightarrow$	$\log e^2$

よって

$$\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x} dx = \int_1^2 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2} \quad \dots (\text{答})$$

置換積分 (A type) では, 被積分関数を $f(g(x))g'(x)$ の形に見ることができ $g(x)$ を見つけることが大切です.**例 10 (置換積分 – A type)**

(1) $\int \sin^2 x \cos x dx$

(2) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$

(3) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

注1) 検算してみましょう. 合成関数の微分法より,

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{(\log x)^2}{2} \right\} = \log x (\log x)' = \frac{\log x}{x}$$

置換積分を理解するには, 検算を何回もやるのが一番です.

【解答】

(1) $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x (\sin x)' \, dx$ だから, $\sin x = u$ とおくと, $\cos x \, dx = du$. よって,

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

(2) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} \, dx = \int \frac{1}{x^2-x+1} (x^2-x+1)' \, dx$ とかけるので, $x^2-x+1 = u$ とおくと $(2x-1) \, dx = du$. よって,

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} \, dx = \int \frac{1}{u} \, du = \log |u| + C = \log(x^2-x+1) + C$$

(3) $\int x\sqrt{1-x^2} \, dx = \int \left(-\frac{1}{2}\right) (1-x^2)\sqrt{1-x^2} \, dx$ とかけるので, $1-x^2 = u$ とおくと, $-2x \, dx = du$. よって,

$$\int x\sqrt{1-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int -2x\sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{u} \, du = \frac{2}{3}(\sqrt{u})^3 + C = \frac{2}{3}(\sqrt{1-x^2})^3 + C$$

注2)

置換積分の公式で $(x, u) \longrightarrow (t, x)$ と書き直してみます. 教科書にはこの形が書いてあります. 注3)

定積分 (置換積分 -B type)

$x = g(t)$, $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ とすると

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) \, dt$$

x	a	$\longrightarrow$	b
t	α	$\longrightarrow$	β

この見方のほうが役に立つのは, 次のような問題のときです.

例 11 (置換積分 -B type)

次の積分を求めよ.

(1) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} \, dx$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} \, dx$

【解答】

(1) $x = 2 \sin \theta (-\pi \leq \theta \leq \pi)$ とおくと, $dx = 2 \cos \theta$, $\frac{x}{\theta} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & 1 \\ 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{6} \end{matrix}$.

よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4(1-\sin^2 \theta)} \, 2 \cos \theta \, d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta = 2 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

注2) 検算してみてください. 一般に

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \{f(x)\}^n = n \{f(x)\}^{n-1} f'(x) \quad (n \neq 0) \\ \frac{d}{dx} \log |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \end{cases}$$

ですから

$$\begin{cases} \int \{f(x)\}^n f'(x) \, dx = \frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log f(x) + C \end{cases}$$

この公式を使うと, 例 10(2),(3) は, すぐ解けます.

注3) これは変数の名前だけを変えているのでもちろん成り立ちます.

(2) $x = \tan \theta (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ とおくと, $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, $\frac{x}{\theta} \Big|_0 \rightarrow \frac{1}{\frac{\pi}{4}}$. よって,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

このタイプの積分は「 $g(x)g'(x)$ を見つける」というよりは「暗記型」です. 特に重要なものは高校では次の2つです. (3つ目は参考です.) これらはそれぞれ

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta, \quad 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{1}{\tan^2 \theta}$$

と対応しています. 丸暗記する必要はありません.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ など} & \longrightarrow x = a \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ とおく.} \\ \sqrt{a^2 + x^2}, \frac{1}{a^2 + x^2} \text{ など} & \longrightarrow x = a \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{ とおく.} \\ \sqrt{x^2 - a^2} \text{ など} & \longrightarrow x = \frac{a}{\cos \theta} \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \right) \text{ とおく.} \end{array} \right.$$

注4)

Type A と Type B は, 変数が違うだけで実は同じ公式ですから, 置換積分に二つの公式があるわけではありません. 置換の見つけ方が違うだけです.

実際の計算では Type B であっても, 臨機応変に Type A とみて置き換えた方が速くできます. また $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ の計算は円の面積 (の一部) と見た方が速く計算できます.

練習 9 次の積分を求めよ.

$$(1) \int_0^a \sqrt{ax - x^2} dx$$

$$(2) \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

$$(4) \int_0^1 \left(x + \frac{1}{1+x^2} \right)^2 dx$$

— おねがい —

この本は「問題集」ではないので余り計算練習は入れていません. しかし, 入試では計算は大変重要なので, 最低でも 100 問ぐらいはやっておいてください. またこの本は「一度習った人向け」に書いたので部分積分も入れていません. これまた 50 問ぐらいはやっておいてください. (「流れ」と「話の筋」を最重要視した結果です.)

注4) 1 番目と 3 番目は $x = a \cos \theta$, $x = \frac{a}{\sin \theta}$ においても大丈夫です. このとき普通 θ の変域を上のように制限して θ と $\sin \theta, \tan \theta$ などが「一対一対応」するように定めますが, これは計算上のテクニックで, $x = a \sin \theta$ ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$) のように定めても良いし, 一対一でなく $x = a \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) のようにしても大丈夫です. この後の「積分区間の取り方」の節に詳しく書いてあります.

2.2 直感的な理解 (数列の和と見る)

置換積分 (定積分)

$x = g(t)$, $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

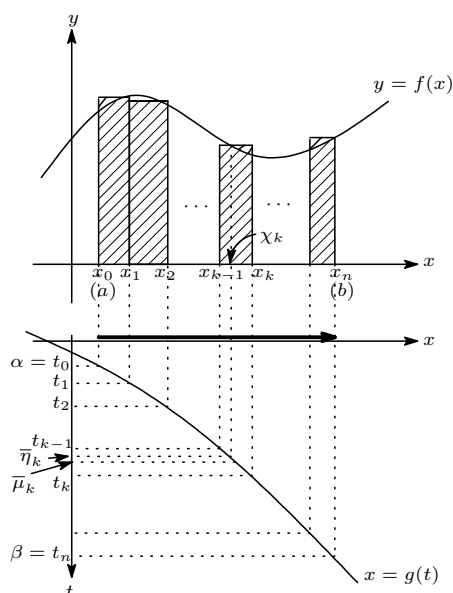
x	a	$\longrightarrow$	b
t	α	$\longrightarrow$	β

上の公式を直感的に理解してみましょう。

2.2.1 $g(t)$ が 増加関数の場合

まず, $g(t)$ が t の増加関数の場合です。

定義より (第1章参照)



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\chi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \cdots (*)$$

(ただし, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,
 χ_k は $x_{k-1} \leq \chi_k \leq x_k$ をみたす任意の点,
 $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ の最大値を Δx とする.)

$x_i = g(t_i)$, $\chi_i = g(\bar{\eta}_i)$ とすると, $g(t)$ は微分可能だから, 平均値の定理より

$$x_k - x_{k-1} = g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(\bar{\mu}_k)(t_k - t_{k-1})$$

となる $\bar{\mu}_k$ ($t_{k-1} < \bar{\mu}_k < t_k$) が存在する. 代入して

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(g(\bar{\eta}_k))g'(\bar{\mu}_k)(t_k - t_{k-1})$$

ところが, $f(x)$ は連続だから, $\Delta t = \max\{t_k - t_{k-1}\}$ とすると, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta t \rightarrow 0$. 注5) また $g(t)$ は連続だから, $f(g(t))$ も連続関数となる. よって, 区間 $[t_{k-1}, t_k]$ 内の任意の点を η_k とすると, $\Delta t \rightarrow 0$ のとき,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(g(\bar{\eta}_k))g'(\bar{\mu}_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(g(\eta_k))g'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}) \right| \rightarrow 0 \quad \cdots (*)$$

すなわち, 連続関数のときは「区間の幅が小さくなるときは, その区間の中のどの点を取っても, 積分の和は同じになる」ということです. したがって

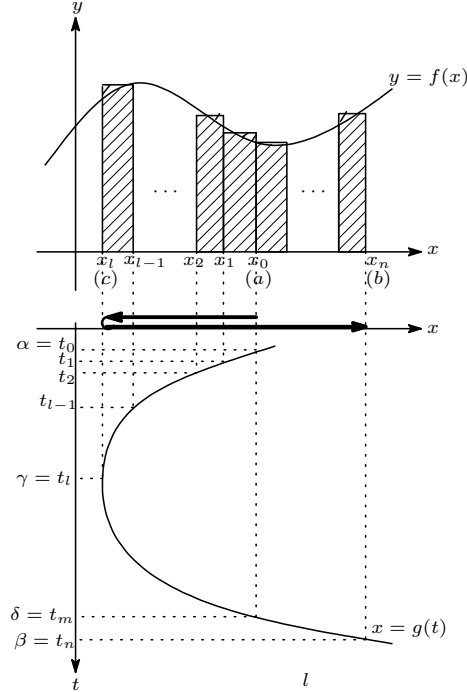
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(g(\bar{\eta}_k))g'(\bar{\mu}_k)(t_k - t_{k-1}) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(g(\eta_k))g'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt \end{aligned}$$

注5) 大学ではこれも証明します (一様連続性).

つまり 平均値の定理より $\Delta x_k = g'(\bar{\mu}_k)\Delta t_k$ であり, 右の対応関係があるので形式的に「 dx 」を「 $f'(t)dt$ 」で置き換えればよくなるわけです. また厳密な証明は先に済ませてあるので, (*) の部分は証明する必要はありません. (証明はできます.)

$\sum$	$f(\eta_k)$	δx_k
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\int$	$f(x)$	dx

2.2.2 $g(t)$ が 増加関数とは限らないとき



例として, $g(t)$ が $\alpha \leq t \leq \gamma$ で減少関数, $\gamma \leq t \leq \beta$ で増加関数で, $g(\alpha) = a, g(\gamma) = c, g(\beta) = b, a < b$ の場合を考える. さらに, 区間 $[\alpha, \gamma]$ を l 個の小区間にわけ, $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l = \gamma$. また, $g(t_0) = x_0, g(t_1) = x_1, \dots, g(t_l) = c$ と名づける. このとき, 積分の定義より,

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(g(t))g'(t)dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^l f(g(\eta_k))g'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$$

(ただし η_k は, 区間 $[t_{k-1}, t_k]$ に含まれる適当な数)

$g(t)$ は微分可能だから, 平均値の定理より

$$x_k - x_{k-1} = g'(\bar{\eta}_k)(t_k - t_{k-1})$$

となる $\bar{\eta}_k$ が $[t_{k-1}, t_k]$ 内に存在します. ここで, $g(t)$ が増加関数の場合と同様に,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^l f(g(\eta_k))g'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^l f(\chi_k)(x_k - x_{k-1})$$

(ただし χ_k は区間 $[x_k, x_{k-1}]$ に含まれる適当な数)

ところが $\alpha \leq t \leq \gamma$ において $g(t)$ は減少関数なので,

$$x_k - x_{k-1} < 0 \quad (k = 1, 2, \dots, l)$$

よって

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(g(t))g'(t)dt = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^l f(\chi_k)(x_{k-1} - x_k) = - \int_c^a f(x)dx \quad \left(= \int_a^c f(x)dx \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

一方, $\gamma \leq t \leq \beta$ においては, $g(t)$ は増加関数なので,

$$\int_{\gamma}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = \int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = - \int_c^a f(x)dx + \left(\int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \right) = \int_a^b f(x)dx$$

すなわち, 正と負が打ち消しあって, 結局は $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$ となります.

Comment

x が独立変数でなく $x = g(t)$ となるとき, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k > 0$ であっても $\Delta x_k > 0$ とは限りません. (「 $g'(t_k) > 0$ なら $\Delta x_k > 0$, $g'(t_k) < 0$ なら $\Delta x_k < 0$ 」) しかし ① から分かるように $g'(t) < 0$ の区間であっても置換積分の公式は成り立つことが分かります.

$$\begin{array}{c|c} x & a \rightarrow c \\ t & \alpha \rightarrow \gamma \end{array}, \quad \int_{\alpha}^{\gamma} f(g(t))g'(t)dt = \int_a^c f(x)dx \quad \dots \textcircled{1}'$$

そして t が $\alpha \xrightarrow{\text{増加}} \beta$ と変化するとき x が $a \xrightarrow{\text{減少}} c \xrightarrow{\text{増加}} a \xrightarrow{\text{増加}} b$ と変化したとし それぞれに対応して t の区間を分割して考えると, 平均値の定理より

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{k=0}^n f(g(t_k))g'(t_k)\delta t_k}_{\alpha \leq t \leq \beta \text{ を分割}} &= \underbrace{\sum_{k=0}^l f(g(t_k))g'(t_k)\delta t_k}_{\alpha \leq t \leq \gamma \text{ を分割}} + \underbrace{\sum_{k=l}^m f(g(t_k))g'(t_k)\delta t_k}_{\gamma \leq t \leq \delta \text{ を分割}} + \underbrace{\sum_{k=m}^n f(g(t_k))g'(t_k)\delta t_k}_{\delta \leq t \leq \beta \text{ を分割}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^l f(x_k)\delta x_k}_{\delta x_k \text{ は負}} + \underbrace{\sum_{k=l}^m f(x_k)\delta x_k}_{\delta x_k \text{ は正}} + \underbrace{\sum_{k=m}^n f(x_k)\delta x_k}_{\delta x_k \text{ は正}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=m}^n f(x_k)\delta x_k}_{a \leq x \leq b \text{ を分割}} \end{aligned}$$

第2行目で第一項と第2項は正と負が打ち消しあって「ほぼ0」となる. ここで分割の幅 δt_k を小さくした極限をとると「」が等号に変わり, 最初と最後の式は積分に変わるから

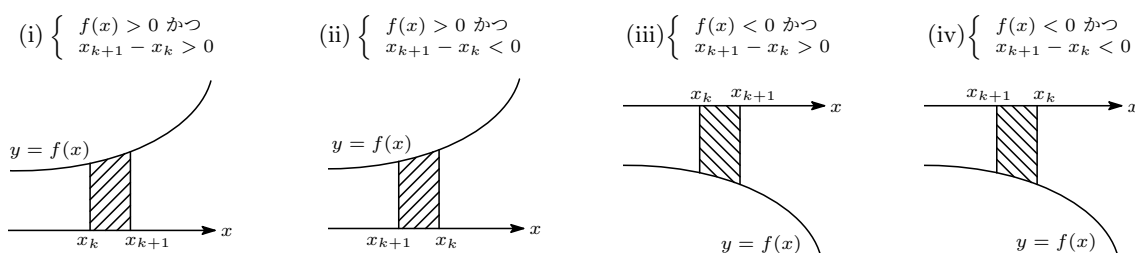
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = \int_a^b f(x)dx, \quad \begin{array}{c|c} t & \alpha \rightarrow \beta \\ x & a \rightarrow b \end{array}$$

結局 $P(g(t), 0)$ が x 軸上を左や右にゆらゆらしてから $a \rightarrow b$ に至ったとしても, まっすぐ $a \rightarrow b$ に行ったとしても積分の和は同じになる. (要するに「ぐるっと回って元に戻れば, 右向きに進んだ長さと左向きに進んだ長さは等しい」ということ.) そして $g(t)$ が単調増加でなくとも置換積分の公式が成り立つことが図からも分かる.

2.3 直感的な理解 (微小面積との関連)

以上のことは微小面積と関連させるともっと直感的に分かる. ただし $x = g(t)$ のときは x が独立でなく $\delta t_k = t_{k+1} - t_k > 0$ であっても $x_{k+1} - x_k > 0$ とは限らない. (ただし $x_{k+1} = g(t_{k+1}), x_k = g(t_k)$) ゆえに $f(x) > 0$ であっても $f(x)\delta x_k = f(x)(x_{k+1} - x_k)$ が面積を表すとは限らない. $x = x_k, x = x_{k+1}, y = f(x), y = 0$ で囲まれた斜線部分の面積を δS とおき, $\delta I = f(x)\delta x_k = f(x)(x_{k+1} - x_k)$ とおくと

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \begin{cases} f(x) > 0 \text{ かつ} \\ x_{k+1} - x_k > 0 \end{cases}, \text{(iv)} \begin{cases} f(x) < 0 \text{ かつ} \\ x_{k+1} - x_k < 0 \end{cases} \text{ のときは } \delta I = \delta S. \\ & \text{(ii)} \begin{cases} f(x) > 0 \text{ かつ} \\ x_{k+1} - x_k < 0 \end{cases}, \text{(iii)} \begin{cases} f(x) < 0 \text{ かつ} \\ x_{k+1} - x_k > 0 \end{cases} \text{ のときは } \delta I = -\delta S \end{aligned}$$



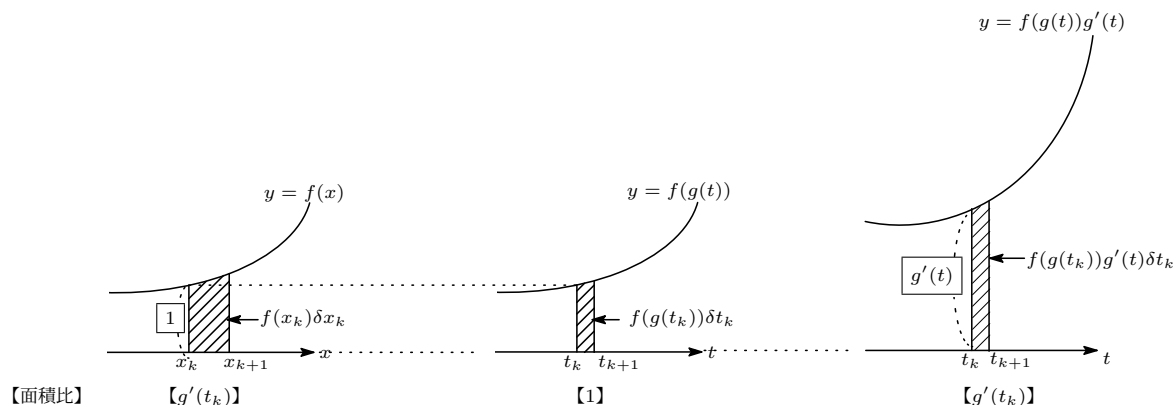
以上を前書きとして置換積分の公式を説明してみましょう. 例えば (i) $\begin{cases} f(x) > 0 \text{ かつ} \\ x_{k+1} - x_k > 0 \end{cases}$ のときは下図で $f(x_k) = f(g(t_k))$ ($\because x_k = g(t_k)$). ところが $\delta x = f'(t_k)\delta t_k$ だから左下図の斜線部と中央図の斜線部の面積の比は およそ $\delta x_k : \delta t_k = g'(t_k) : 1$ で一致しない. しかし $y = f(g(t))g'(t)$ のグラフを考え同様の斜線部を作ると, 高さの比が $1 : g'(t_k)$, 底辺の比が $g'(t_k) : 1$ となるから 左下図の斜線部と右下図の斜線部の面積はほぼ一致する. (例えば「横の長さを半分にし 縦の長さを 2 倍にしても, 長方形の面積は変わらない」) よって

$$f(x_k)\delta x_k = f(g(t_k))g'(t_k)\delta t_k$$

$\delta t, \delta x$ を小さくして集めた極限が積分で, このとき「 $\sim$ 」は「 $=$ 」に変わって

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

$f(x) < 0$ のときや $g'(t) < 0$ のときも 同様に説明できる.



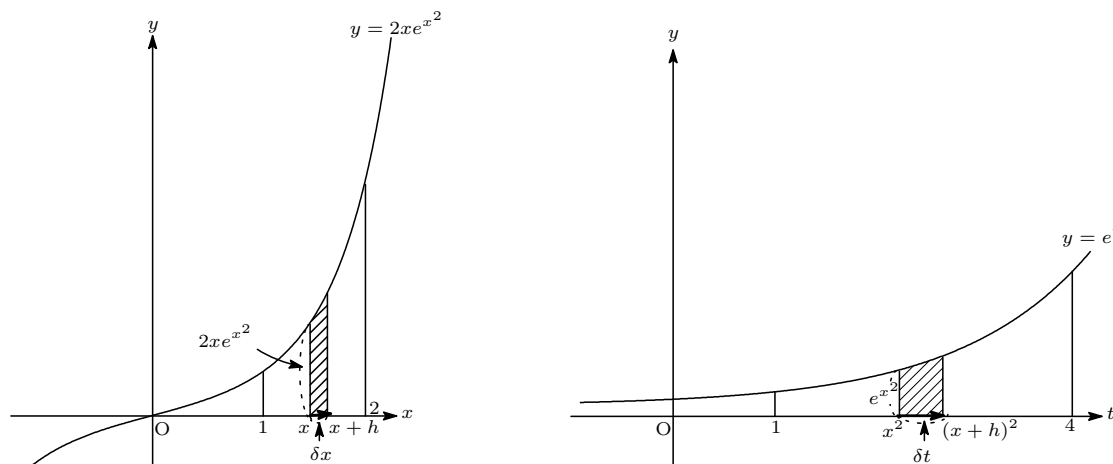
例 12 $I = \int_1^2 2xe^{x^2} dx$, $J = \int_1^4 e^t dt$ とする. $x^2 = t$ とおくと $2xdx = dt$, $\frac{x}{t} \left| \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 1 \rightarrow 4 \end{array} \right.$ だから $I = J$ のはず. ここで x が h ($h > 0$) 増加したときの t の増加分を δt とすると, h が非常に小さいとき

$$\delta t = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2 \quad 2xh$$

よって 右下図の微小細片の面積は

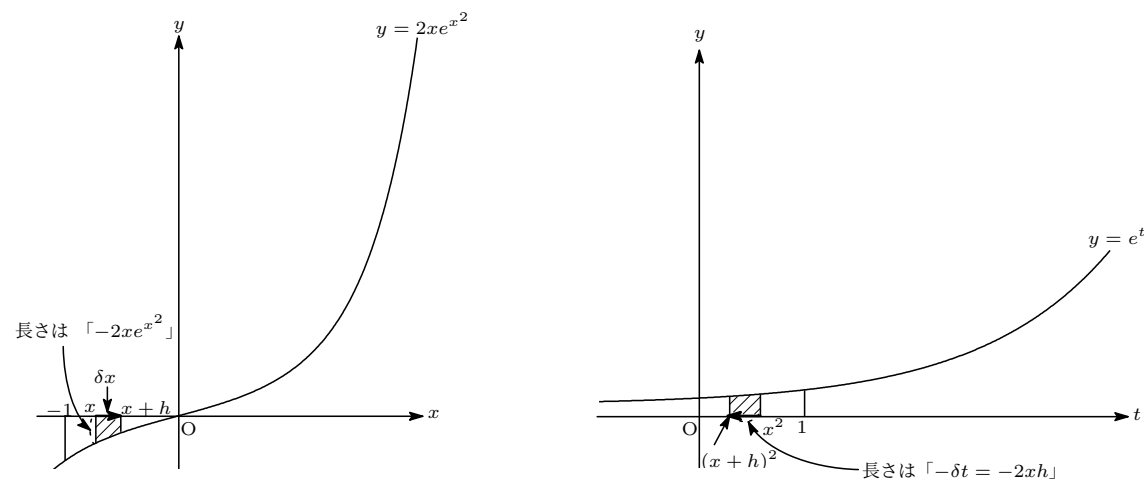
$$e^t \delta t \quad e^{x^2} 2xh = 2xe^{x^2} \delta x$$

となり 下図の2つの微小細片の面積は一致する. よって $I = J$ は当たり前.



例 13 $I = \int_{-1}^0 2xe^{x^2} dx$, $J = \int_1^0 e^t dt$ とする. $x^2 = t$ とおくと $2xdx = dt$, $\frac{x}{t} \left| \begin{array}{l} -1 \rightarrow 0 \\ 1 \rightarrow 0 \end{array} \right.$ 従っ

て今度も $I = J$ のはず. **例 12** と同様に x が h ($h > 0$) 増加したときの t の増加分を δt とすると, $\delta t = 2xh$. また $e^t \delta t = e^{x^2} 2xh = 2xe^{x^2} \delta x$. $\therefore \sum e^t \delta t = \sum 2xe^{x^2} \delta x$. ここで $\delta t, \delta x$ を小さくした極限が I, J だから確かに $I = J$ となる. ところが $-1 < x < 0$ の区間では $\delta x = h > 0$, $\delta t = 2xh < 0$ だから $e^t \delta t < 0$ かつ $2xe^{x^2} \delta x < 0$. よってこれらは下図の2つの微小細片の面積の (-1) 倍になっている. すなわち I は $y = 2xe^{x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$ で囲まれた面積の (-1) 倍, J は $y = e^t$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ で囲まれた面積の (-1) 倍となる. 先の頁で述べたように「積分 = 面積」とは限らない.



例 14 $I = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 1)e^{x^3-3x} dx$ とする. $x^3 - 3x = t$ とおくと $3(x^2 - 1)dx = dt$, $\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \sqrt{3} \\ \hline t & 0 \rightarrow 0 \end{array}$

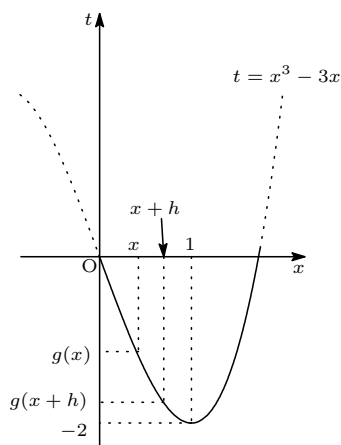
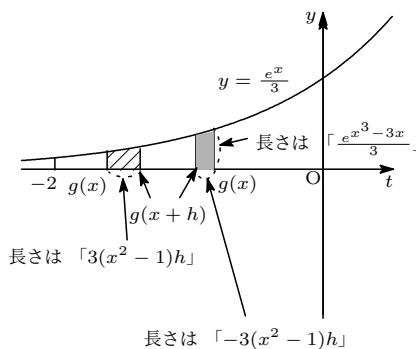
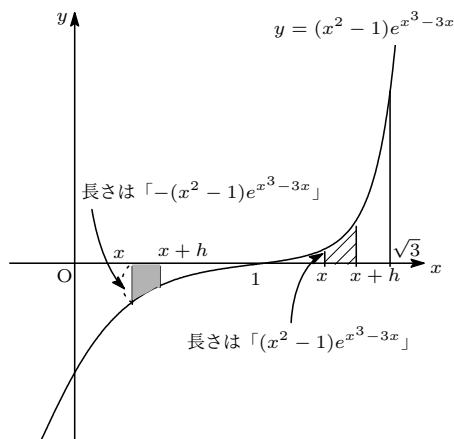
従って $J = \int_0^0 \frac{e^t}{3} dt$ とおくと $I = J = 0$ のはず. **例 13** と同様に x が h ($h > 0$) 増加したときの t の増加分を δt とすると, $3(x^2 - 1)dx = dt$ から, または次のように直接計算して

$$\delta t = \{(x+h)^3 - 3(x+h)\} - (x^3 - 3x) = 3(x^2 - 1)h$$

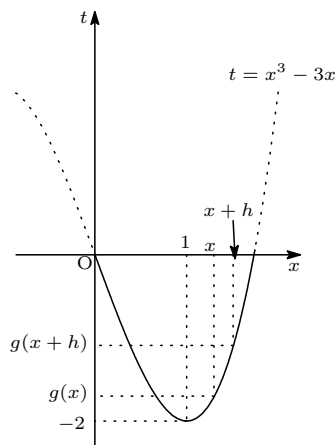
ゆえに

$$(x^2 - 1)e^{x^3-3x}\delta x = (x^2 - 1)e^{x^3-3x}h \cdot \frac{e^{x^3-3x}}{3} \cdot 3(x^2 - 1)h = \frac{e^t}{3}\delta t$$

この積分和が I と J だから 確かに $I = J$ となる. 次は面積を考えてみる. $0 < x < 1$ の区間では $x^2 - 1 < 0$, $\delta t = 3(x^2 - 1) < 0$ だから $(x^2 - 1)e^{x^3-3x}\delta x < 0$ かつ $\frac{e^t}{3}\delta t < 0$. すなわち これらは 下図の2つの微小細片 (塗りつぶし) の面積の (-1) 倍になっている. 一方 $1 < x < \sqrt{3}$ のときは $x^2 - 1 > 0$, $\delta t = 3(x^2 - 1) > 0$ だから $(x^2 - 1)e^{x^3-3x}\delta x > 0$ かつ $\frac{e^t}{3}\delta t > 0$. すなわち これらは 下図の2つの微小細片 (斜線部分) の面積と等しい. 即ち $y = \frac{e^t}{3}$, $y = 0$, $t = -2$, $t = 0$ で囲まれた面積を S とすると, $I = \underbrace{(-S)}_{0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}} + \underbrace{S}_{1 \leq x \leq \sqrt{3} \text{ のとき}} = 0$ となる.



【 $0 < x < 1$ のとき】

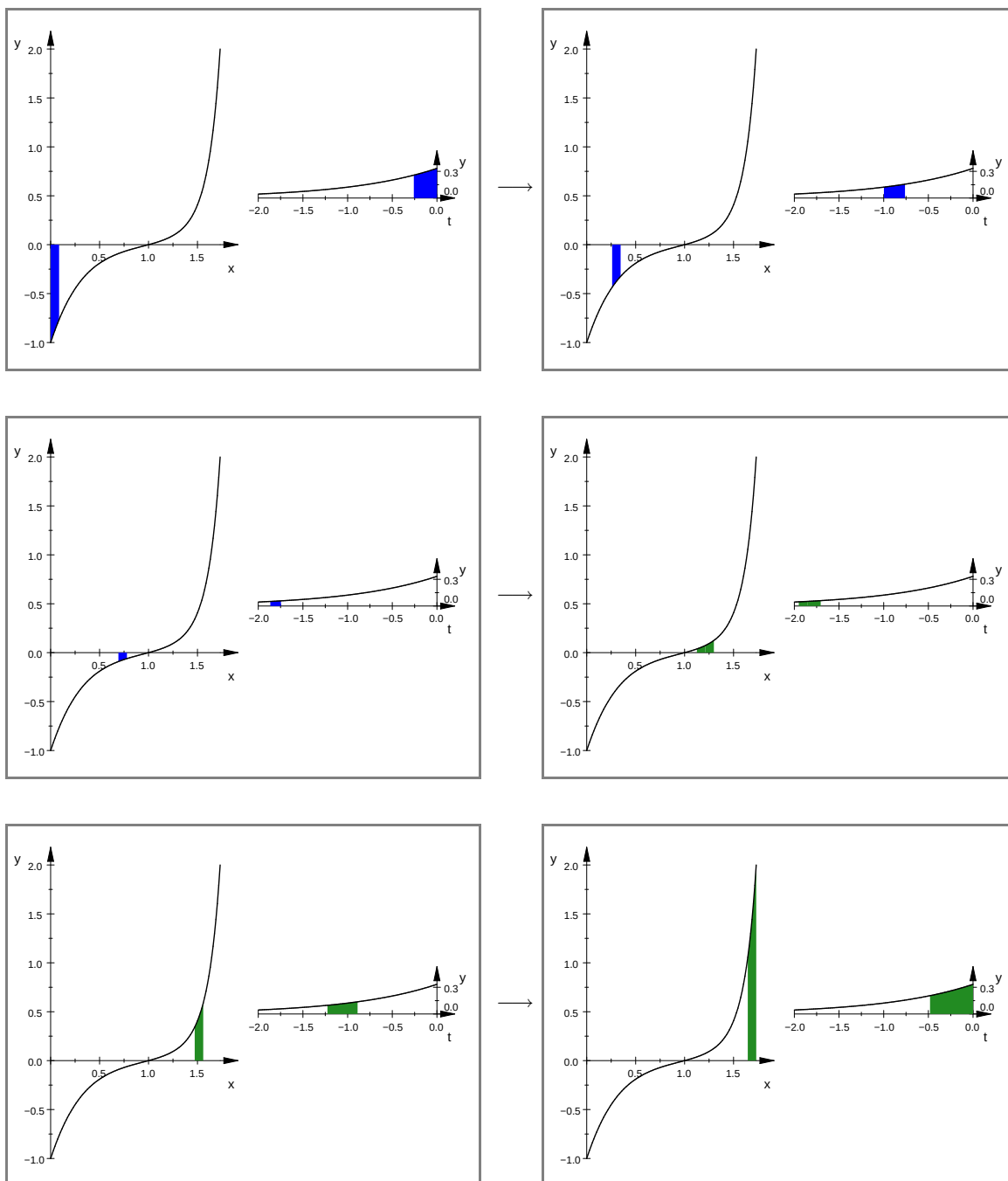


【 $1 < x < \sqrt{3}$ のとき】

【参考】

以上のことを CG で見てみよう. $\delta I = (x^2 - 1)e^{x^3 - 3x} \delta x$, $\delta J = \frac{e^t}{3} \delta t$, 微小細片の面積を δS としたとき $\delta I = \delta J = -\delta S$ となるときは青色で, $\delta I = \delta J = \delta S$ となるときは緑色で表してある. よく見て納得してください.

— 「 $(x^2 - 1)e^{x^3 - 3x} \delta x$ と $\frac{e^t}{3} \delta t$ の変化」 —



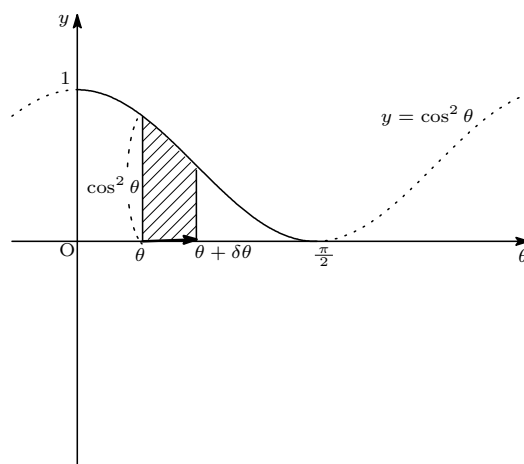
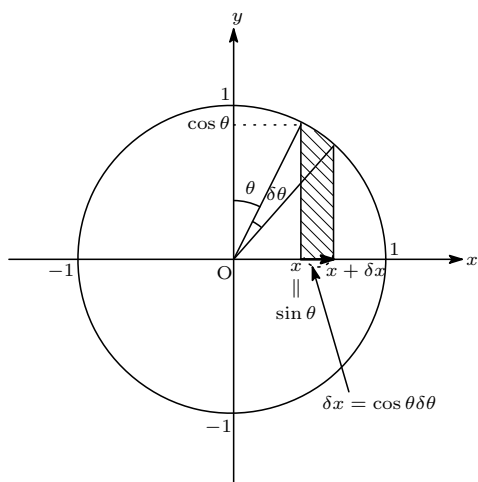
今度は Type B の積分を見てみましょう. Type A と基本的には同じです.

例 15 $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ とする. $x = \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと $dx = \cos \theta d\theta$, $\frac{x}{\theta} \Big|_0^1 \rightarrow \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$

従って $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$ とおくと $I = J$ のはず. ここで θ が $\delta \theta$ ($\delta \theta > 0$) 増加したときの x の増加分を δx とすると, $\cos \theta d\theta = dx$ から,

$$\delta x = \cos \theta \delta \theta$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $\delta x > 0, \cos \theta > 0$ だから, $\delta I = \sqrt{1-x^2} \delta x = \cos \theta \cdot \cos \theta \delta \theta$ と $\delta J = \cos^2 \theta \delta \theta$ はそれぞれ下の斜線部分の面積をあらわす. そして I は半径1の $\frac{1}{4}$ 円の面積と一致するので $I = J = \frac{\pi}{4}$.



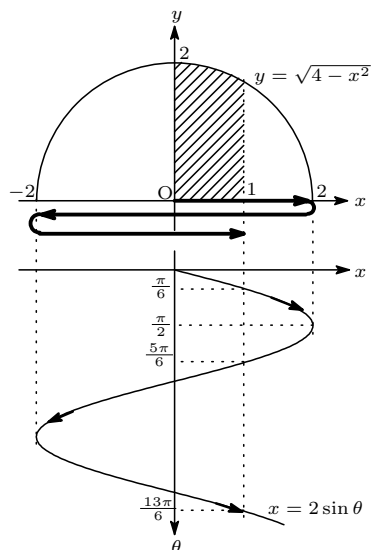
Comment

$x = \sin \theta$ とおいたときは円のパラメータ表示のときと異なり θ は y 軸と動径のなす角を表しています. この積分が計算できる人でも, どこが θ なのか分からずに計算している人が多いです. $x = \tan \theta$ とおくときは, 何処が θ なのか考えてみてください.

練習 10 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$, $J = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin t dt$ とする. このとき $y = f(x) = \sin 2x$ と $y = \frac{1}{2} \sin t$ のグラフを描き, $I = J$ となることを説明してみよう.

練習 11 $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ で $x = g(\theta) = \tan \theta$ とおくと $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ のグラフとそれを $\theta - y$ の関係に直した $y = f(g(\theta))$ および $y = f(g(\theta))g'(\theta)$ のグラフを描き, 同様の考察をしてみよう.

2.4 積分区間の取り方



$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ の積分で, $x = 2 \sin \theta$ とおくときに,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ とするのは何故ですか?}$$

という質問をよく受けますが, 結論から言って「 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に取らなくても大丈夫」です.

$x = g(t)$ の置換で, $g'(t)$ が連続で, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ となる限り, 置換積分の公式は成り立ちます. 例えば, $x =$

$$2 \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ とおくと } dx = 2 \cos \theta d\theta. \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{6} \end{array}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4(1-\sin^2 \theta)} 2 \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2\theta + 1) d\theta \\ &= \left[\sin 2\theta + 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となります. しかし, $\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{5\pi}{6} \end{array}$ でもありますから

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{4(1-\sin^2 \theta)} 2 \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} 2|\cos \theta| \cdot 2 \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (-\cos^2 \theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1) d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (-\cos 2\theta - 1) d\theta \\ &= \left[\sin 2\theta + 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin 2\theta - 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} = \pi + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{3} \right) - (-\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

とやっても求まります. ただし, このときに

$$\sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta| = \begin{cases} \cos \theta & (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ -\cos \theta & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}) \end{cases}$$

を使っています. このような場合分けを不要にするために $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ としていますが, 理論上はその必要はありません. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} f(g(\theta))g'(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} |\cos \theta| \cos \theta d\theta$ と $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} f(g(\theta))g'(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} |\cos \theta| \cos \theta d\theta$ が打ち消しあって, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(g(\theta))g'(\theta)d\theta = 0$ となるので, 2つの積分の値は等しくなります. また, θ の範囲を $0 \leq \theta \leq \frac{13\pi}{6}$ などに選んでも積分の値は同じです.

$x = g(\theta) = 2 \sin \theta$ とおくときは、区間は何処にとっても良いですが、これは $g'(\theta) = \cos \theta$ が連続なためです。 $x = g(\theta) = \tan \theta$ とおくときは $g'(t) = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ が $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$ で連続でないで、注意しないといけません。 例として次の積分: $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ を考えましょう。 $x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

とおくと、 $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$. $\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$ よって

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

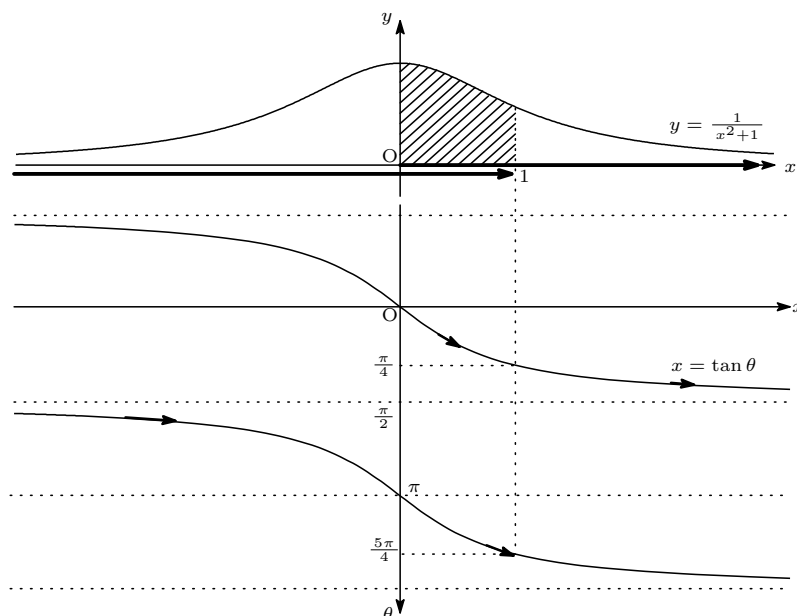
ところが、 $g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$ ですから、 $\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{5\pi}{4} \end{array}$ も正しいです。しかし、このとき、

$$I = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} d\theta = \frac{5\pi}{4}$$

となり、一致しません! これは、 $x = \tan \theta$ が $x = \frac{\pi}{2}$ で連続でないためです。そのため $d\theta = \theta_k - \theta_{k-1} > 0$ のとき、それに対応する $dx = x_k - x_{k-1} > 0$ (ただし、 $g(\theta_k) = \tan \theta_k = x_k$) となり、正と負が打ち消しあうことができなくなっています。すなわち、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(g(\theta))g'(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} > 0 \\ I_2 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} f(g(\theta))g'(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta = \left[\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} > 0 \end{aligned}$$

ですから、 $I_1 + I_2 = \pi \neq 0$ となり、値が違ってしまいました。もし、 $g'(\theta)$ が連続ならば、 $d\theta = \theta_k - \theta_{k-1} > 0$ であっても、 $dx = x_k - x_{k-1} < 0$ となる部分ができて、 I_1 と I_2 は打ち消しあうことができます。注6)



注6) 実は、 $\tan \theta$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で連続でないで、 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cos^2 \theta d\theta$ は広義積分といって、高校の積分の範囲外です。厳密には $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cos^2 \theta d\theta = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cos^2 \theta d\theta = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} d\theta = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ とします。また「正の項と負の項が消えるには $g(t)$ が連続であれば良いんじゃない?」と思うかも知れませんが、それだけでは、積分できない可能性があります。

第3章 面積

3.1 面積の基本

$f(x) > 0$ のとき $S = \int_a^b f(x)dx$, $f(x) < 0$ のとき $S = \int_a^b \{-f(x)\} dx, \dots$ などいろいろありますが, 結局, 次の1つの公式にまとめられます.

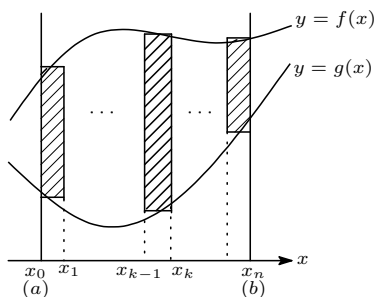
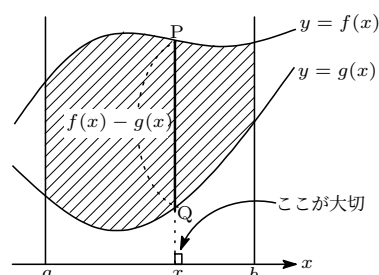
面積

$a \leq x \leq b$ において $f(x) \geq g(x)$ で, かつ $f(x)$ と $g(x)$ は連続とする. このとき, $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ で囲まれる面積を S とすると

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \{f(\eta_k) - g(\eta_k)\} (x_k - x_{k-1})$$

(ただし $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $x_{k-1} < \eta_k < x_k$, $\Delta x = \max\{x_k - x_{k-1}\}$)



「左の斜線の長方形の面積の和 S_Δ において, 分割の幅の最大値 (Δx) を小さくした極限が面積と一致する」ということから明らかです. このとき, 被積分関数の $\{f(x) - g(x)\}$ は x 軸に垂直な直線で切った時の, 切り口の長さ (PQ) を表しています. すなわち俗に言う「長さを積分すると面積」という訳です. 注1)

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれる面積では $f(x), g(x)$ そのものではなく $f(x) - g(x)$ が大切で, 特に整式の積分では

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = \alpha$ の点で接する

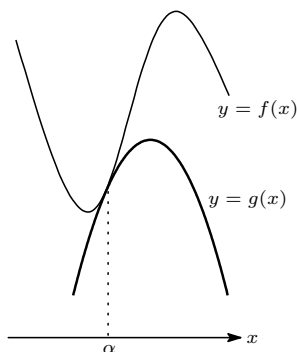
$$\iff \begin{cases} f(\alpha) = g(\alpha) \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases}$$

注2)

$\iff f(x) - g(x) = (x - \alpha)^2 h(x)$ ($h(x)$ は整式) とかける.

$\iff f(x) - g(x) = 0$ が重解 $x = \alpha$ をもつ.

の性質が大切です.



注1) よく「 $3x^2$ の積分は x^3 」という言い方をするのでそれに合わせました. しかし「積分」の日常生活的日本語(?)での意味は「細かく分けたものを集める」という意味ですから, 数学でも「小長方形の面積: $PQ \times \delta x_k$ を積分すると面積」と言うべきかもしれません. すると「 $PQ \delta x_k$ を積分すると面積」という表現になります. (ただし $\delta x_k = x_k - x_{k-1}$)

注2) $f(x) - g(x) = F(x)$ とおく. (i) $F(\alpha) = F'(\alpha) = 0 \implies F(x)$ は $(x - \alpha)^2$ で割り切れる」の証明

$F(x)$ を $(x - \alpha)^2$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax + b$ とおくと,

$$F(x) = (x - \alpha)^2 Q(x) + ax + b$$

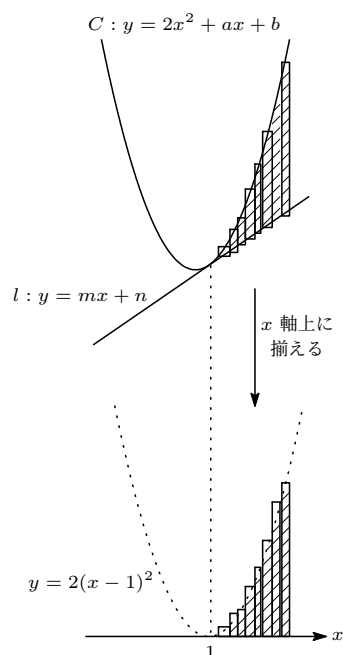
両辺を x で微分して

$$F'(x) = 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2 Q'(x) + a \quad \dots (*)$$

例 16

$C: y = f(x) = 2x^2 + ax + b$ と $l: y = g(x) = mx + n$ が x 座標が $x = 1$ の点 P で接している. このとき, $y = f(x), y = g(x), x = 1, x = 3$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ. ただし, a, b, m, n は実数とする.

【解答】



$y = f(x)$ と $y = g(x)$ は $x = 1$ の点で接するので, $f(x) = g(x)$ は $x = 1$ を重解にもつ. さらに, x^2 の係数が 2 だから,

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + ax + b - (mx + n) = 2(x - 1)^2$$

とかける. よって,

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_1^3 2(x - 1)^2 dx = \left[\frac{2(x - 1)^3}{3} \right]_1^3 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Comment

「上左図の小長方形を平行移動して, その下の辺を x 軸上に揃えて集めると, 下左図のように, 小長方形の上の辺は $y = 2(x - 1)^2$ 上に載る.」ということです. 論理的に納得するのも大切ですが, このように「目で納得する (百聞は一見にしかず)」ということも大切です. (ちなみに, a, b, m, n の値は 1 つに決まりません.)

このように 整式のときは「接する」 $\iff$ 「重解を持つ」ですから, 接すれば逆に簡単になります. しかし $f(x), g(x)$ が整式でないときは, $x = \alpha$ の点で接していても $f(x) = g(x)$ が重解を持つとは言えません. 注3) したがって,

$$y = f(x) \text{ と } y = g(x) \text{ が } x = \alpha \text{ の点で接する} \iff \begin{cases} f(\alpha) = g(\alpha) \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases}$$

を使います.

練習 12 $C: y = f(x) = 2x^3 + ax + b$ と $l: y = g(x) = px^2 + qx + r$ が x 座標が $x = 1$ の点 P で接し, $x = 3$ の点 Q で交わっている. このとき, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ. ただし, a, b, p, q, r は実数とする.

練習 13 $0 \leq x < 3\pi$ で定義される 2 つの関数 $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = a - \cos x$ があり, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は接しているという. このとき, a の値と, $y = f(x), y = g(x)$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ. ただし, a は正の定数とする.

(続き) よって $F(\alpha) = F'(\alpha) = 0$ のとき,

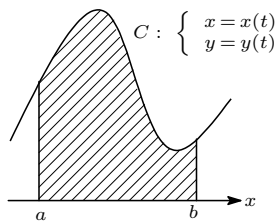
$$\begin{cases} a\alpha + b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \iff a = b = 0 \iff F(x) \text{ は } (x - \alpha)^2 \text{ で割り切れる.}$$

逆に $F(x) = (x - \alpha)^2 h(x)$ とかけるとき, (*) より, $F'(\alpha) = F(\alpha) = 0$ Q.E.D.

注3) そもそも重解が存在しません.

3.2 パラメーター表示された関数の面積

曲線 C が $C: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ と表されているとき,



$\frac{dx}{dt} \geq 0$ または $\frac{dx}{dt} \leq 0$ ならば x は単調増加, または単調減少しますから, x と t は 1 対 1 に対応して, x が定まると t の値が定まり, ($t = f^{-1}(x)$ が存在する) y の値も定まります. すなわち, $y = f(x)$ と一通りに表せます. あとは, $x = x(t)$ と置換して置換積分をします. すなわち, $y(t) > 0, a < b$ のとき, $x = a, x = b, x$ 軸 と C で囲まれる面積 S は

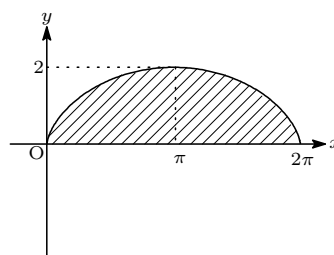
$$S = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta y \frac{dx}{dt} dt, \quad \text{ただし } x(\alpha) = a, x(\beta) = b \quad \dots (*)$$

例 17

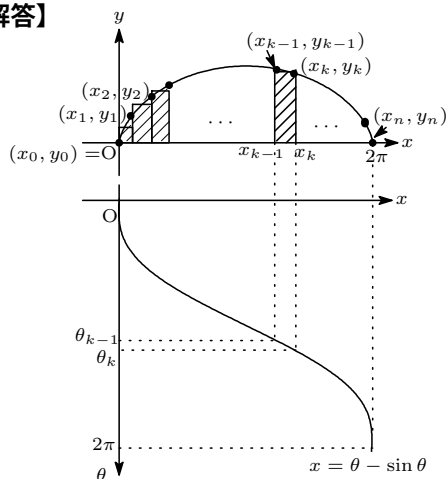
円を x 軸上で転がしたときにできる図形 (サイクロイド)

$$\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた領域の面積 S を求めよ.



【解答】



$x = \theta - \sin \theta$ とおくと,

$$dx = (1 - \cos \theta) d\theta. \quad \begin{array}{l|l} x & 0 \rightarrow 2\pi \\ \theta & 0 \rightarrow 2\pi \end{array}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) \cdot (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi \end{aligned}$$

Comment

θ 軸上の区間 $[0, 2\pi]$ 上に $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = 2\pi$ をみたす n 個の点を取り, θ_k に対する x, y を x_k, y_k とすると, 平均値の定理より, $x_k - x_{k-1} = x'(\bar{\eta}_k)(\theta_k - \theta_{k-1})$ ($\theta_{k-1} < \bar{\eta}_k < \theta_k$) となるから

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n y_k (x_k - x_{k-1}) = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n y(\theta_k) x'(\bar{\eta}_k) (\theta_k - \theta_{k-1}) = \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

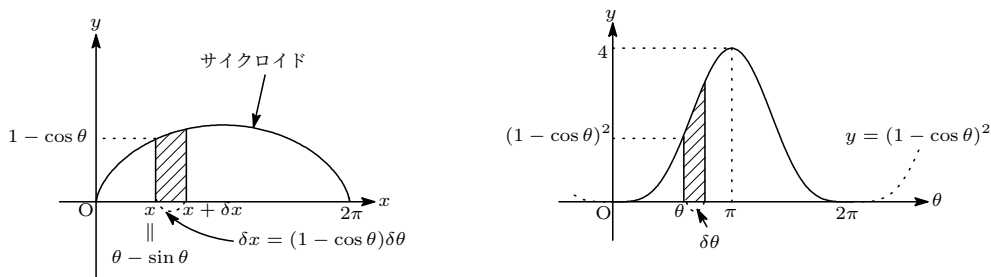
となります. (詳しくは, 置換積分の章参照)

【参考】今度は微小細片の面積と結び付けて考えてみましょう。

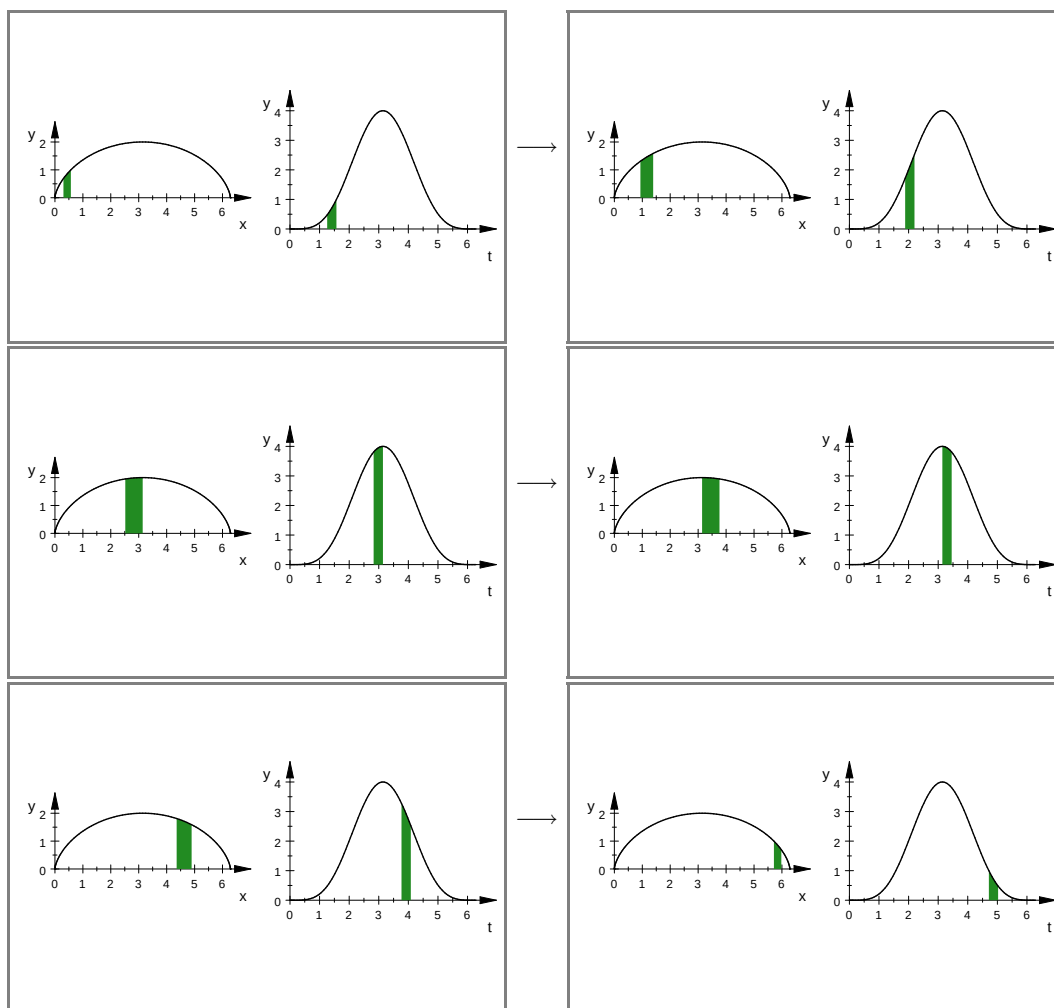
θ が $\delta\theta$ ($\delta\theta > 0$) 増加したときの x の増加分を δx とすると, $(1 - \cos\theta)d\theta = dx$ から,

$$\delta x = (1 - \cos\theta)\delta\theta$$

$\delta x > 0, 1 - \cos\theta \geq 0$ だから, $\delta I = y\delta x = (1 - \cos\theta) \cdot (1 - \cos\theta)\delta\theta$ と $\delta J = (1 - \cos\theta)^2\delta\theta$ はそれぞれ下の斜線部分の面積とほぼ等しい. この微小面積を集めて, δx の幅を限りなく小さくした極限が求める面積なので $S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \delta I = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sum \delta J = \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta$ となる.



— $y\delta x$ と $(1 - \cos\theta)^2\delta\theta$ は, 下の細片の面積と等しい (右図の細片の幅 $\delta\theta$ は一定) —

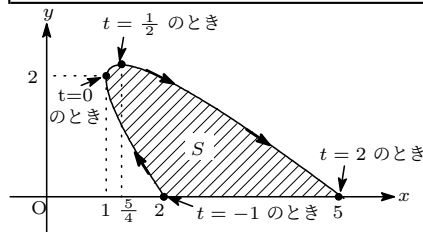


今度は, $\frac{dx}{dt}$ が一定符号でないときです. このときは $P(x, 0)$ は x 軸上を行ったり来たりします.
($\frac{dx}{dt} > 0$ なら「右向き」に, $\frac{dx}{dt} < 0$ なら「左向き」に動く.)

例 18

$$C: \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = -t^2 + t + 2 \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 2)$$

で表される曲線 C と x 軸で囲まれる領域の面積 S を求めよ.

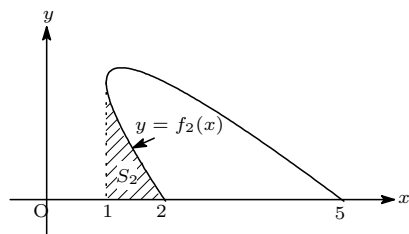


$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = -2t + 1$$

t	-1	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...	2
$\frac{dx}{dt}$		-	0	+	+	+	
$\frac{dy}{dt}$		+	+	+	0	-	
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

増減表より C の概形は図のようになる. $0 \leq t \leq 2$ に対応する C を $y = f_1(x)$, $-1 \leq t \leq 0$ に対応する C を $y = f_2(x)$, 図のような領域の面積をそれぞれ S_1, S_2 とすると

$$S_1 = \int_1^5 f_1(x) dx, \quad S_2 = \int_1^2 f_2(x) dx$$



$$y = f_1(x) \text{ 上の点を } (x, y) \text{ とすると, } \begin{array}{c|c} x & 1 \rightarrow 5 \\ \hline t & 0 \rightarrow 2 \end{array}$$

$$y = f_2(x) \text{ 上の点を } (x, y) \text{ とすると, } \begin{array}{c|c} x & 1 \rightarrow 2 \\ \hline t & 0 \rightarrow -1 \end{array}$$

$S = S_1 - S_2$ だから

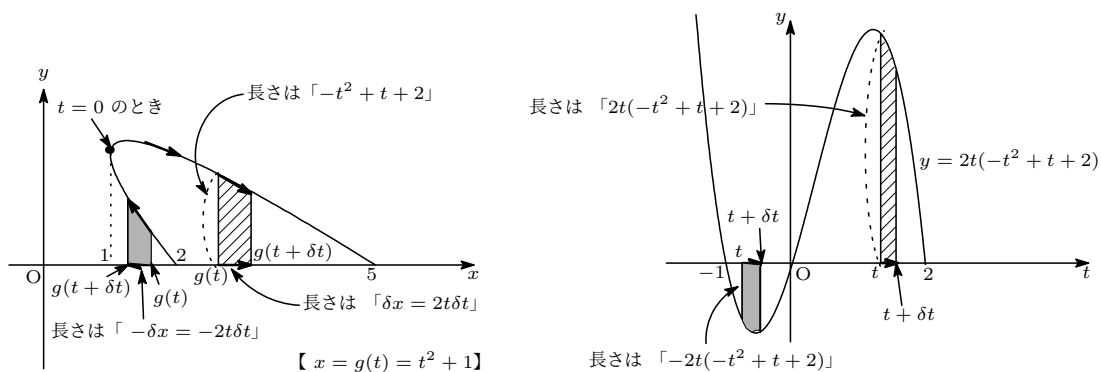
$$S = S_1 - S_2 = \int_0^2 y \cdot \frac{dx}{dt} dt - \int_0^{-1} y \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int_{-1}^2 y \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int_{-1}^2 (-t^2 + t + 2) \cdot 2t dt = \frac{9}{2}$$

Comment

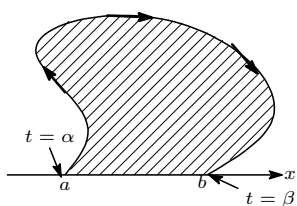
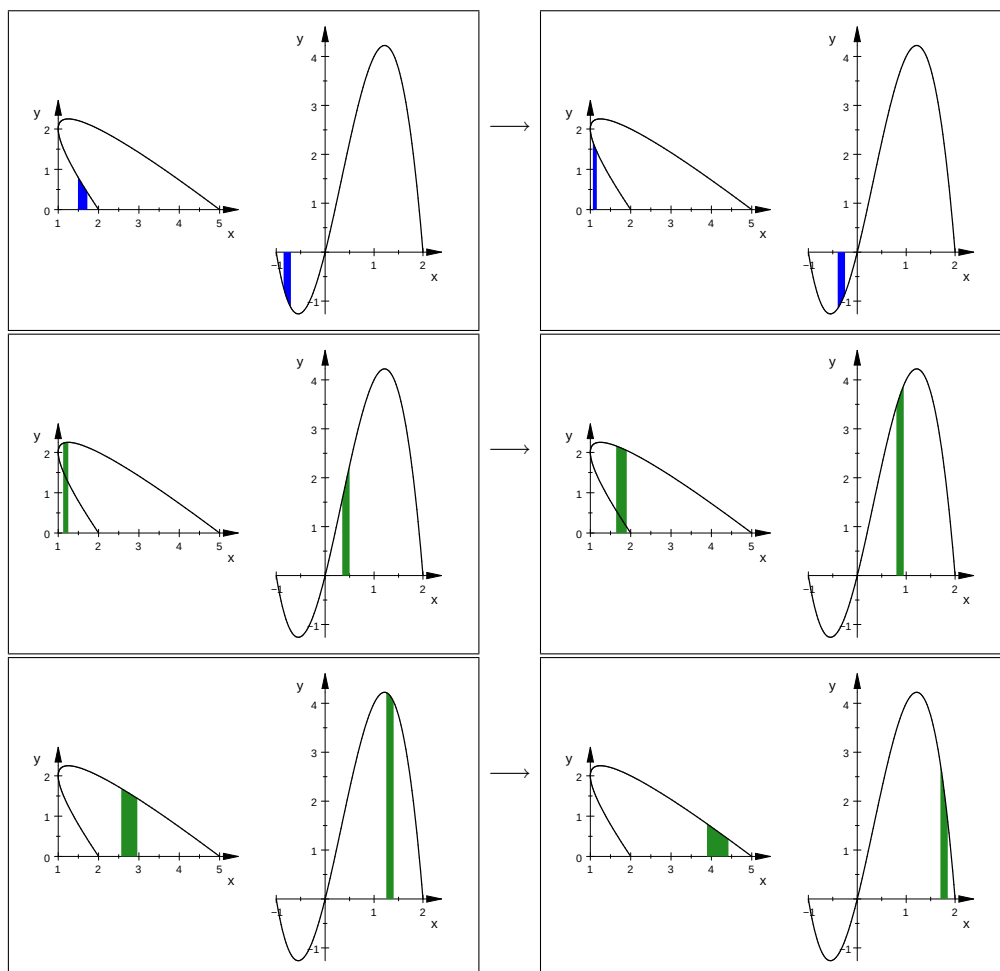
微小面積と結び付けて考えて見ましょう. t が δt ($\delta t > 0$) 増加したときの x の増加分を δx とすると, $2x\delta t = \delta x$ から,

$$\delta x = 2t\delta t$$

$-1 < t < 0$ のとき, $\delta x < 0, y \geq 0$ だから, $\delta I = y\delta x = (-t^2 + t + 2) \cdot 2t\delta t$ と $\delta J = (-t^2 + t + 2) \cdot 2t\delta t$ はそれぞれ次の頁の小片 (塗りつぶし) の面積の (-1) 倍とほぼ等しい. 一方 $0 < t < 2$ のとき, $\delta x > 0, y \geq 0$ だから, δI と δJ はそれぞれ次の頁の小片 (斜線) の面積とほぼ等しい. よって, δI を $-1 \leq t \leq 0$ の区間で集めると $-S_2$, δI を $0 \leq t \leq 2$ の区間で集めると S_1 となるので $\lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum \delta I = \int_{-1}^2 (-t^2 + t + 2) \cdot 2t dt$ は求める面積 S と一致する.



—「 $\delta I = y\delta x$ と $\delta J = (-t^2 + t + 2)2t\delta t$ は下図の小片の面積、または面積の (-1) 倍となる」—



同様に考えて、 $y(t) > 0$ 、かつ t が増えるにつれて $P(x, y)$ が曲線上を時計回りに回るとき、 x 軸と $C: x = x(t), y = y(t)$ で囲まれる面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt, \quad \text{ただし, } x(\alpha) = a, x(\beta) = b, \alpha < \beta \quad \cdots (**)$$

また反時計回りに回るときは、右辺の積分は $(-S)$ を表す。

最後に曲線で囲まれた領域の面積を求めてみましょう。

例 19

$$C: \begin{cases} x = \sin \theta - \cos \theta \\ y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta + 3 \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

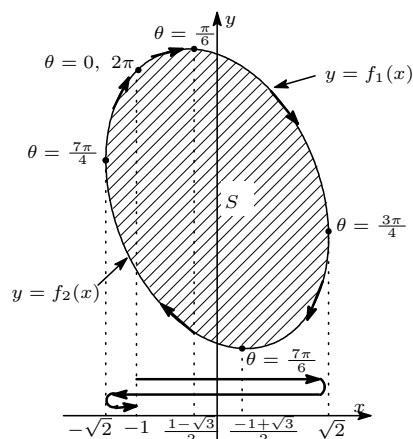
によって囲まれる領域の面積 S を求めよ。

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right), \quad \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{5\pi}{6} \right)$$

θ	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{3\pi}{4}$	...	$\frac{7\pi}{6}$	...	$\frac{7\pi}{4}$	...	2π
$\frac{dx}{d\theta}$		+	+	+	0	-	-	-	0	+	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	-	-	0	+	+	+	
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3}+3 \end{pmatrix}$	$\nearrow$	$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+6}{2} \end{pmatrix}$	$\swarrow$	$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\nwarrow$	$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+6}{2} \end{pmatrix}$	$\nearrow$	

C のうち, $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$ の部分を $y = f_1(x)$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}$ の部分を $y = f_2(x)$ とすると,

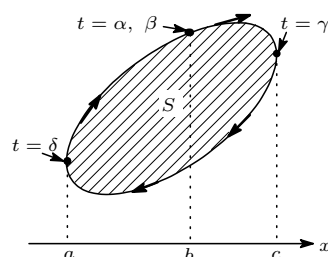
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\sqrt{2}} f_1(x) dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f_2(x) dx + \int_{-\sqrt{2}}^{-1} f_1(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} y \frac{dy}{d\theta} d\theta - \int_{\frac{7\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} y \frac{dy}{d\theta} d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} y \frac{dy}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} y \frac{dy}{d\theta} d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} y \frac{dy}{d\theta} d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} y \frac{dy}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} y \frac{dy}{d\theta} d\theta \quad \dots \textcircled{1} \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta + 3)(\sin \theta + \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \sin^2 \theta + \sqrt{3} \cos^2 \theta + (\sqrt{3} + 1) \sin \theta \cos \theta + 3 \sin \theta + 3 \cos \theta \right\} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \sin 2\theta + 3 \sin \theta + 3 \cos \theta \right) d\theta \\ &= \left[\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \theta + \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \sin 2\theta - \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \cos 2\theta - 3 \cos \theta + 3 \sin \theta \right]_0^{2\pi} = (\sqrt{3} + 1)\pi \end{aligned}$$



今度もまた ① のように, 1つの積分にまとまりました。

いま C を右の図のような閉曲線 (閉じた曲線) とし, C は $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) とパラメーター表示され, t が $\alpha \rightarrow \beta$ と変化するとき, $P(f(t), g(t))$ が C 上を時計回りに1周するものとし, また, $\alpha \leq t \leq \gamma$ のとき, $\frac{dx}{dt} \geq 0, \gamma \leq t \leq \delta$ のとき, $\frac{dx}{dt} \leq 0, \delta \leq t \leq \beta$ のとき, $\frac{dx}{dt} \geq 0$ とします。このとき, C で囲まれた面積: S を求めてみましょう。

— この CG を web site に置いてあります。ご覧ください。—

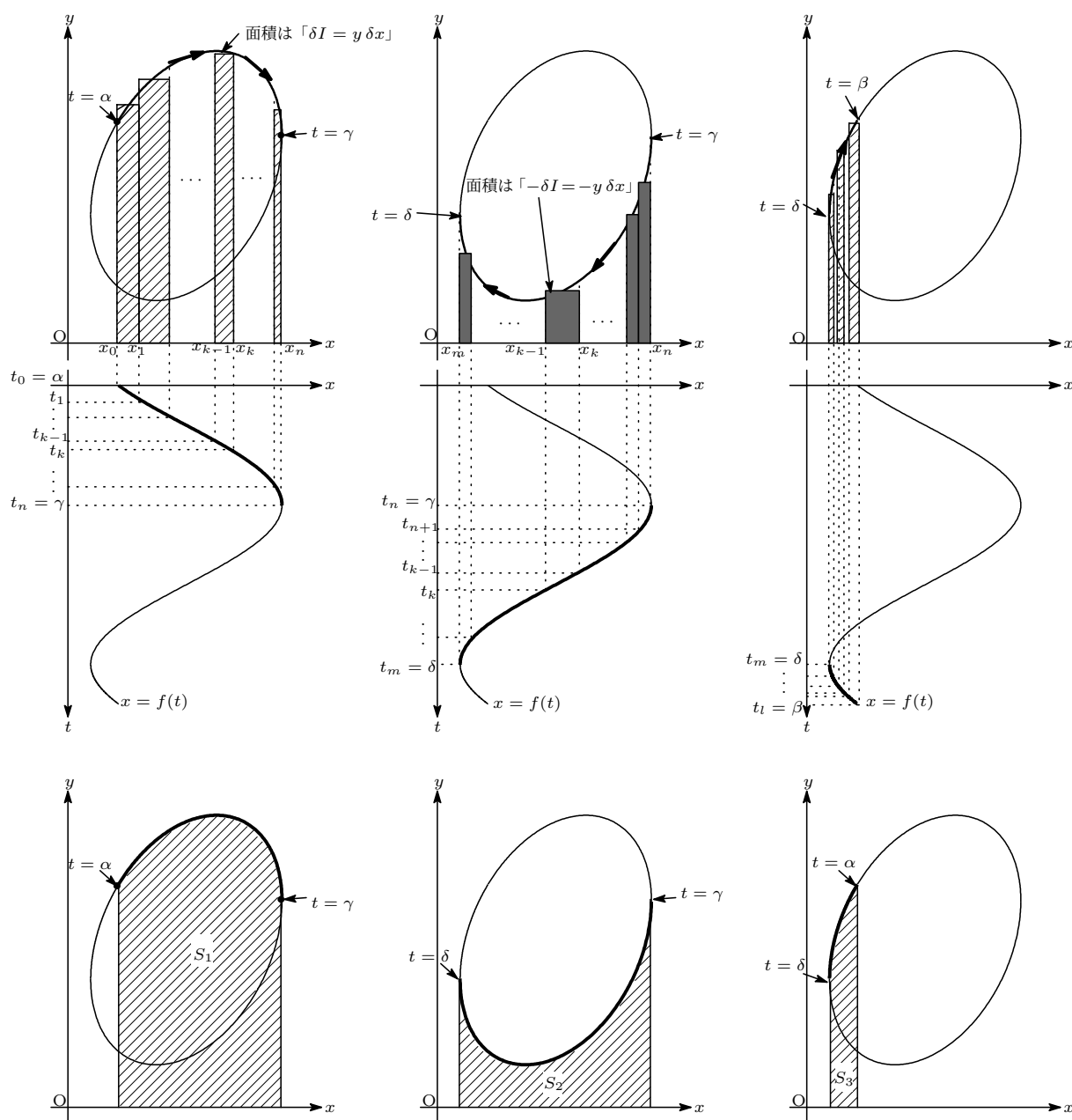


— この節の終わりまでは【参考】です．興味のある人は読んでみてください．分かれば「目から鱗」？—

細片の面積と関連づけて見ます．簡単のため $y = g(t) \geq 0$ とします．さらに t が $\delta t (\delta t > 0)$ 増加したときの x の増加量を δx , $\delta I = y \delta x$ とおく． $x = g(t)$ より $dx = g'(t)dt$. ゆえに δt が非常に小さいとき

$$\delta x \approx g'(t)\delta t \quad \therefore \delta I = y \delta x \approx y g'(t)\delta t$$

- (i) $\alpha < t < \gamma$ のとき, $g'(t) > 0$ だから $\delta x > 0$. よってこのとき δI は左下図の細片の面積とほぼ等しい.
(ii) $\gamma < t < \delta$ のとき, $g'(t) < 0$ だから $\delta x < 0$. よってこのとき δI は中央図の細片の面積の (-1) 倍とほぼ等しい. (iii) $\delta < t < \beta$ のとき, $g'(t) > 0$ だから (i) と同様に δI は右下図の細片の面積とほぼ等しい.

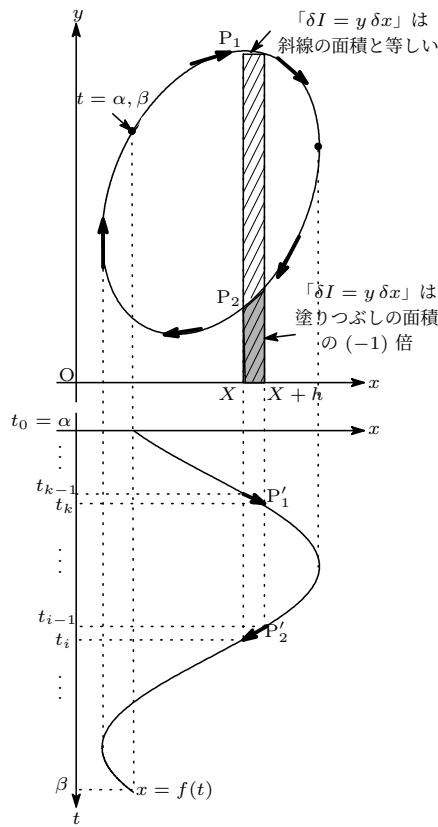


よって 図のように面積 S_1, S_2, S_3 を定めると

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^l yg'(t_k)\delta t_k &= \sum_{k=0}^n yg'(t_k)\delta t_k + \sum_{k=n}^m yg'(t_k)\delta t_k + \sum_{k=m}^l yg'(t_k)\delta t_k \\ &= \sum_{k=0}^n y\delta x_k + \sum_{k=n}^m y\delta x_k + \sum_{k=m}^l y\delta x_k \\ &= S_1 + (-S_2) + S_3 \end{aligned}$$

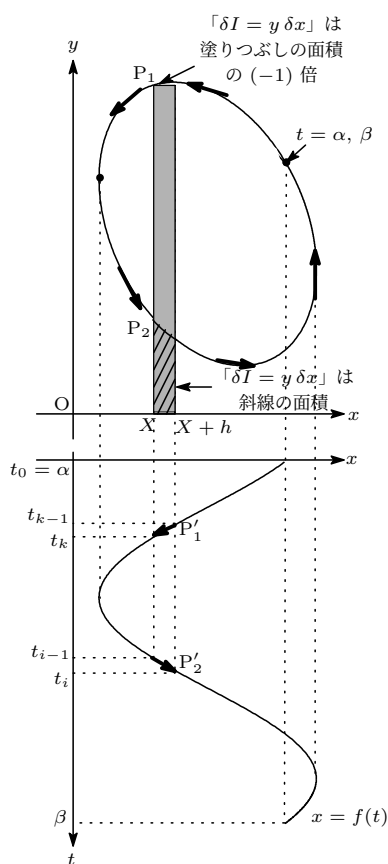
δt を小さくした極限をとると「 $\sum$ 」は「 $\int$ 」に変わり、左辺は積分に変わるので

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} yg'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt = S_1 + (-S_2) + S_3 = S$$



以上のことは、ある x の区間に注目するとさらによく分かります。 $P(x, y)$ が C 上を一周するとき $P'(x, 0)$ は x 軸上を左右に動きながら元の点に戻ってきます。 よって $[X, X + h]$ ($h > 0$) を その移動する範囲に含まれるある区間とすると、 t が増加するにつれて $P'(x, 0)$ はこの区間を、まず「左から右へ」次に「右から左へ」通過します。 そして「左から右へ通過するとき」は $g'(t)\delta t = \delta x > 0$ ですから $\delta J = yg'(t)\delta t = y\delta x > 0$ となり、 δJ は細片(斜線)の面積とほぼ等しくなります。 ところが「右から左へ通過するとき」は $g'(t)\delta t = \delta x < 0$ ですから $\delta J = yg'(t)\delta t = y\delta x < 0$ となり、 δJ は細片(塗りつぶし)の面積の (-1) 倍とほぼ等しくなります。 従って 図で $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ と $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ に対応する δJ の和は「 C と $x = X, x = X + h$ で囲まれる微小細片の面積 δS 」と一致します。 そして t が α から β まで変化するときの δJ を集め δt を小さくした極限が積分 J ですから

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} yg'(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum yg'(t) \delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \delta J = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \delta S = S$$



今度は $P(x, y)$ が反時計回りに C 上を一周するとき C の囲む面積 S を求めてみましょう. 先の例と同様に $[X, X + h]$ ($h > 0$) を x 軸上にとると, t が増加するにつれて $P'(x, 0)$ はこの区間を, まず「右から左へ」, 次には「左から右へ」通過します. そして「右から左へ通過するとき」は $g'(t)\delta t = \delta x < 0$ で $\delta J = y g'(t)\delta t = y \delta x < 0$ となり, δJ は細片 (塗りつぶし) の面積の (-1) 倍とほぼ等しくなります. 「左から右へ通過するとき」は $g'(t)\delta t = \delta x > 0$ で $\delta J = y g'(t)\delta t = y \delta x > 0$ となり, δJ は細片 (斜線) の面積とほぼ等しくなります. ここまでは先の例と大体同じです. しかし, 先と異なり「左から右へ」動くときの P の高さ (y 成分) より, 「右から左へ」動くときの P の高さの方が高いです. よって $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ と $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ に対応する δJ の和は, 「 C と $x = X, x = X + h$ で囲まれる微小細片の面積 δS 」の (-1) 倍になります. そして t が α から β まで変化するときの δJ を集め δt を小さくした極限が積分 J ですから

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} y g'(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum y g'(t) \delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \delta J = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum (-\delta S) = -S$$

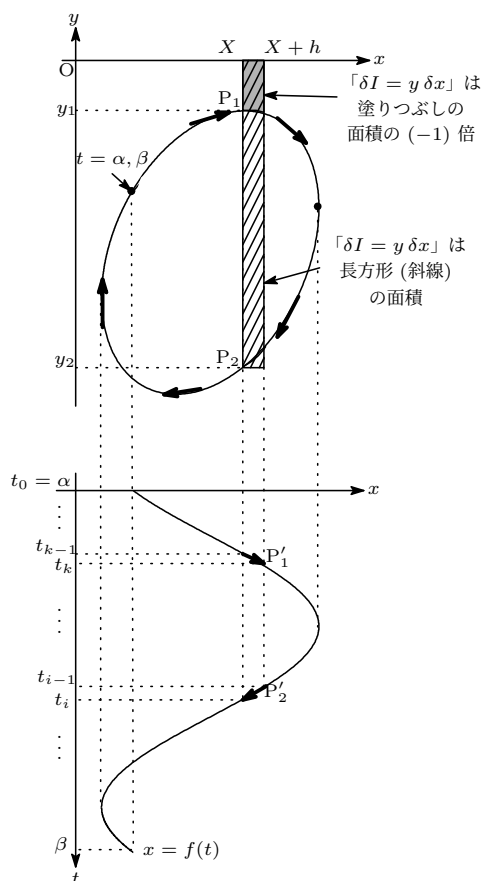
$$\therefore S = -J = - \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt$$

結局, 反時計回りと時計回りでは積分の符号がちょうど逆になります. これは

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{時計回りのとき} \\ \quad \rightarrow \text{「左から右へ」動くときの } P \text{ の } y \text{ 成分} > \text{「右から左へ」動くときの } P \text{ の } y \text{ 成分} \\ \text{反時計回りのとき} \\ \quad \rightarrow \text{「左から右へ」動くときの } P \text{ の } y \text{ 成分} < \text{「右から左へ」動くときの } P \text{ の } y \text{ 成分} \end{array} \right.$$

のためです. しかしこれを「証明」するのは, ちょっと大変そうです. (此処ではやらない.)

今までは C が $y > 0$ に含まれると仮定しましたが本当は $y < 0$ に含まれる場合や、 x 軸をまたがっているときでも大丈夫です。(これは $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれる部分の面積と同様です。)



$y(t) < 0$ の場合を考えてみます。上図のように C は $y < 0$ の領域に含まれ、 $P(x, y)$ は C を **時計回り** に一周するものとし、 $[X, X + h]$ ($h > 0$) を x 軸上にとり $x = X$ と C の交点を図の様に P_1, P_2 . P_1 の y 成分を $y = y_1$, P_2 の y 成分を $y = y_2$. さらに δS を「 C と $x = X, x = X + h$ で囲まれる微小細片の面積」とします。先程と同様、 P が P_1 を通過するとき $\delta x = g'(t)\delta t > 0$, P_2 を通過するとき $\delta x = g'(t)\delta t < 0$ です。さらに $\delta t_1 = t_k - t_{k-1}$, $\delta t_2 = t_i - t_{i-1}$ とおくと、 δt_1 と δt_2 に対応する δJ の和は

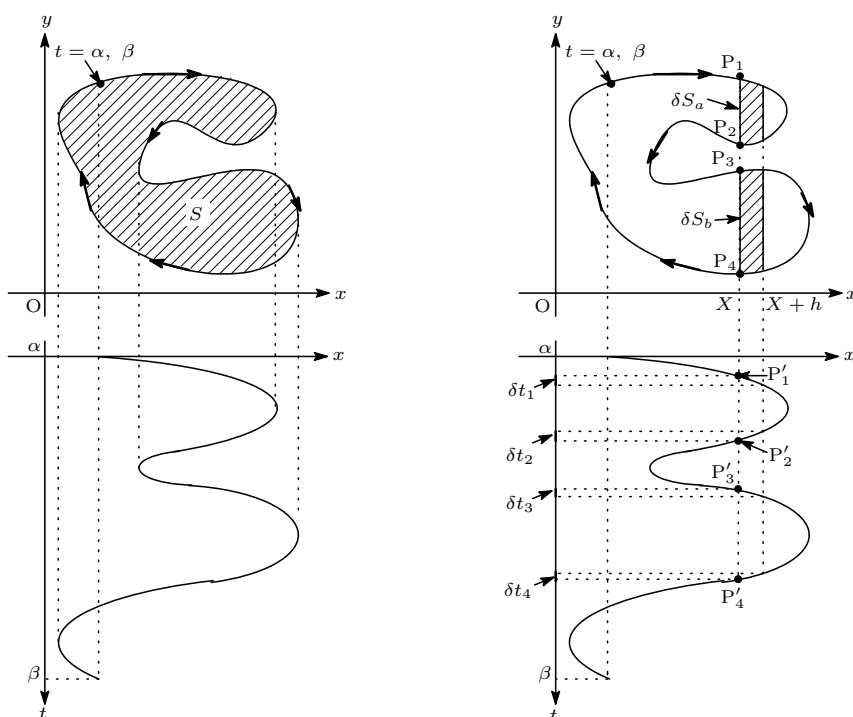
$$\delta J_1 + \delta J_2 = y_1 g'(t_k) \delta t_1 + y_2 g'(t_i) \delta t_2 \quad y_1 \delta x + y_2 \delta x = y_1 h + y_2 (-h) = (y_1 - y_2) h \quad \cdots (*)$$

「 $y_1 - y_2$ 」は最上図の $\overline{P_1 P_2}$ と等しいから 結局 $\delta J_1 + \delta J_2 = \delta S$ となります。 δJ を集めて Δt を小さくした極限が 積分 J だから

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} y g'(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum y g'(t) \delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \delta J = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \delta S = S$$

(*) が δS を表すと言うのは $y > 0$ や $y < 0$ によらず成り立つので 上の性質は **時計回り** のときはいつでも成り立つことが分かります。 また **反時計回り** のときは 前頁と同様に 符号が逆になります。 注4)

注4) 二つの微小細片の面積と関連させて説明して見ましょう。 前々問の例と違い「 $y < 0$ 」ですから「左から右へ通過するとき」は $\delta J = y g'(t) \delta t = y \delta x < 0$ となり、 δJ は細片 (塗りつぶし) の面積の (-1) 倍とほぼ等しくなります。 一方「右から左へ通過するとき」は $\delta J = y g'(t) \delta t = y \delta x > 0$ となり、 δJ は細片 (斜線) の面積とほぼ等しくなります。 したがって δt_1 と δt_2 に対応する δJ の和は「 C と $x = X, x = X + h$ で囲まれる微小細片の面積 δS 」と一致します。 しかし面積を用いた説明は直感的な反面、場合分けが煩雑になるという欠点があるので、 此処では上のように説明しました。



最後に「くびれ」がある場合も考えてみましょう。 $P(x, y)$ は図の C 上を **時計回りに**一周するものとします。 x 軸上に区間 $[X, X+h]$ ($h > 0$) をとり、 C と $x = X$ の交点を図のように順に P_1, P_2, P_3, P_4 と定め、それぞれの y 成分を y_1, y_2, y_3, y_4 。 また $[X, X+h]$ に対応する t の区間を $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3, \delta t_4$ とします。 このとき、 C で囲まれた面積 S を求めてみましょう。

「 C と $x = X, x = X+h$ で囲まれる微小細片の面積」を δS とし、これを図のように $\delta S_a, \delta S_b$ に分けます。 先程と同様、 P が P_1 を通過するとき $\delta x = g'(t)\delta t > 0$, P_2 を通過するとき $\delta x = g'(t)\delta t < 0$ だから δt_1 と δt_2 に対応する $\delta J = y g'(t)\delta t$ の和は

$$\delta J_1 + \delta J_2 = y_1 \delta x + y_2 (-\delta x) = (y_1 - y_2) \delta x = \overline{P_1 P_2} \times h = \delta S_a \quad \dots \textcircled{1}$$

δt_3 と δt_4 に対応する δJ の和は

$$\delta J_3 + \delta J_4 = y_3 \delta x + y_4 (-\delta x) = (y_3 - y_4) \delta x = \overline{P_3 P_4} \times h = \delta S_b \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3, \delta t_4$ に対応する δJ を集めると ほぼ $\delta S_a + \delta S_b = \delta S$ となります。 δJ を集めて Δt を小さくした極限が積分 J だから

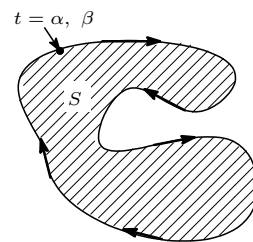
$$J = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} y g'(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum y g'(t) \delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \delta J = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \delta S = S$$

反時計回りに進むときは 符号が逆になります。 結局、「くびれ」がある場合でも C の**囲む**面積は パラメータに関する1つの積分にまとめられます。 以上をまとめると次のページの公式になります。(しかしこれを覚える必要はありません。「わざわざ x の積分で表してから変形する必要はない」ということと「1つにまとめられる」ということさえ分かっているれば、符号はすぐ決められます。)

閉曲線 (時計回り) に囲まれる領域の面積

いま C を右の図のような閉曲線 (閉じた曲線) とし, C は $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) とパラメーター表示され, t が $\alpha \rightarrow \beta$ と変化するとき, $P(f(t), g(t))$ が C 上を「時計回りに」1周するものとします. このとき, C で囲まれた面積を S とすると,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt$$

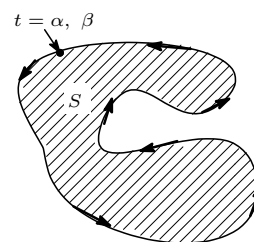


また, 反時計回りに回転するときは, 符号が逆になります.

閉曲線 (反時計回り) に囲まれる領域の面積

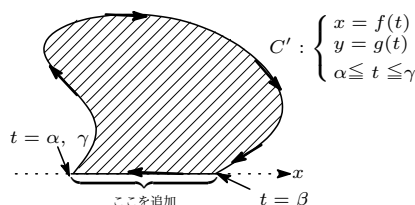
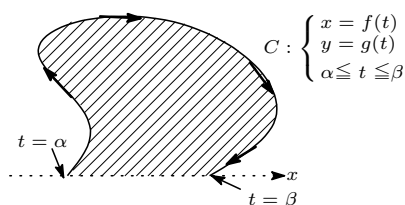
いま C を右の図のような閉曲線 (閉じた曲線) とし, C は $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) とパラメーター表示され, t が $\alpha \rightarrow \beta$ と変化するとき, $P(f(t), g(t))$ が C 上を「反時計回りに」1周するものとします. このとき, C で囲まれた面積を S とすると,

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt$$



C が閉曲線でなく, 例 18, 例 19 のように x 軸と C によって囲まれているときも, この公式が使えます. 注5) 例えば, C が左下図のような曲線のとき, さらに t の変域を延長して $\beta \leq t \leq \gamma$ のとき, $(x(t), y(t)) = (h(t), 0)$ とすれば, C' は閉曲線になります. ($h(t)$ は $h(\beta) = f(\beta), h(\gamma) = f(\alpha)$ をみたす適当な関数) すると, 「 $\beta \leq t \leq \gamma$ に対応する積分は 0」になりますから,

$$S = \int_{\alpha}^{\gamma} y \frac{dx}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt + \int_{\beta}^{\gamma} y \frac{dx}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt + \int_{\beta}^{\gamma} 0 \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt$$



練習 14 双曲線 $C: x^2 - y^2 = 4$ と直線 $l: y = -x + t$ ($t \neq 0$) の交点を P とする.

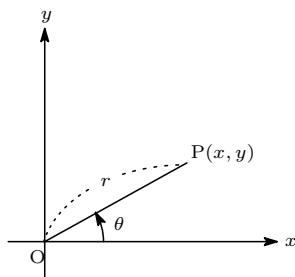
(1) P の座標を t の式で表せ.

(2) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ と x 軸, 直線 $x = \frac{10}{3}$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ.

練習 15 $C: \begin{cases} x = -\sin \theta + \cos \theta \\ y = \sin \theta + 2 \cos \theta \end{cases}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) で囲まれる領域の面積を求めよ.

注5) $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ で囲まれる面積 S までも, 上の公式で扱うこともできます.

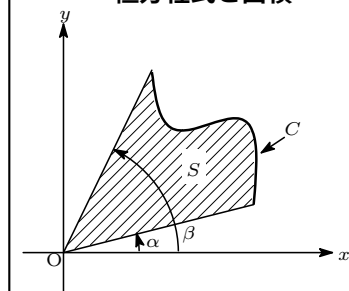
3.3 極表示された曲線の囲む面積



点 P の極座標 (r, θ) とは、原点からの距離 r と、偏角 θ によって、点 P の位置を表すことです。これに対し普通の座標 (x, y) を直交座標といいます。直交座標と極座標の間には次の関係があります。

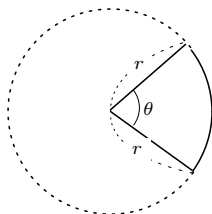
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

極方程式と面積



いま、曲線 C が、極方程式: $r = f(\theta)$ の形で表されていて C 上の点を P 、 P の偏角 θ が、 $\alpha \leq \theta \leq \beta$ の間を変化するとき 動径 OP の通過する領域の面積を S とすると、

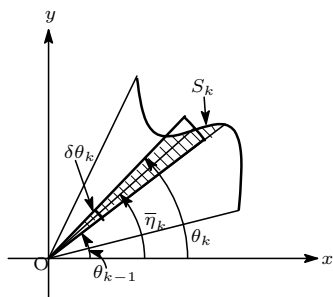
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \{r(\theta)\}^2 d\theta$$



【証明】まず、扇形の面積を復習しておきます。半径 r で中心角 θ の扇形の面積を S とすると、

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

さて、証明は、 $S =$ 「小扇形の面積の和」と考えます。



$\alpha \leq \theta \leq \beta$ 上に、 $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = \beta$ の点を取り、 $[\alpha, \beta]$ を n 個の小区間に分割します。さらに、 θ が $\theta_{k-1} \leq \theta \leq \theta_k$ の範囲で変化するとき、動径 OP の通過領域の面積を S_k とおくと

$$S_k = \frac{1}{2} \{r(\bar{\eta}_k)\}^2 \delta \theta_k \quad (\text{ただし } \delta \theta_k = \theta_k - \theta_{k-1})$$

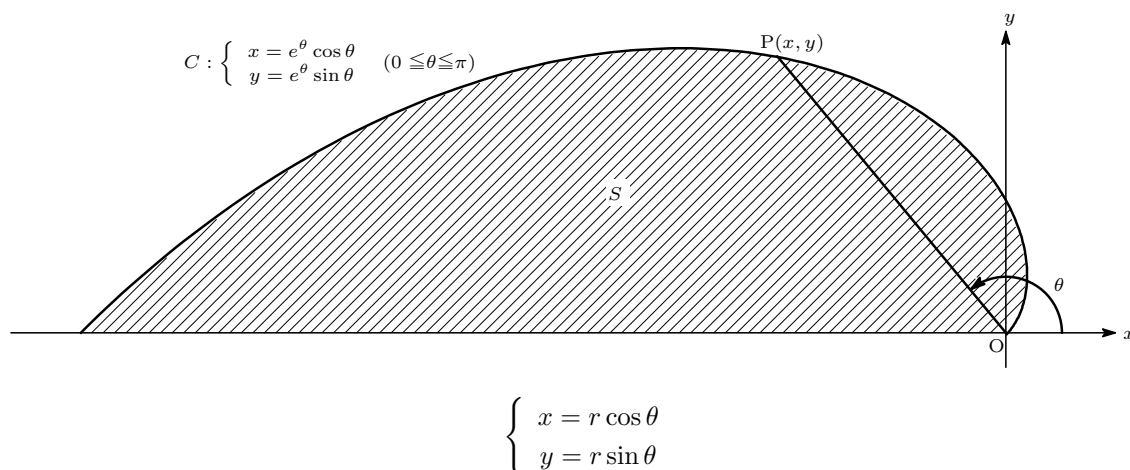
となる $\bar{\eta}_k$ ($\theta_{k-1} < \bar{\eta}_k < \theta_k$) が存在します。(左図) よって、

$$S = \sum_{k=1}^n S_k = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \{r(\bar{\eta}_k)\}^2 \delta \theta_k = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \{r(\bar{\eta}_k)\}^2 (\theta_k - \theta_{k-1}) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \{r(\theta)\}^2 d\theta \quad (\text{証明終})$$

極方程式は、パラメーター表示の特別な形ですから、パラメーター表示された曲線の大海の中から、極方程式であることを見抜く必要があります。

例 20

$C: \begin{cases} x = e^\theta \cos \theta \\ y = e^\theta \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ とする. C と x 軸で囲まれる領域の面積 S を求めよ.



の形をしているので, $r(\theta) = e^\theta$ という極方程式に直せます. よって,

$$S = \int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2} (e^\theta)^2 d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2} e^{2\theta} d\theta = \left[\frac{1}{4} e^{2\theta} \right]_0^\pi = \frac{1}{4} (e^{2\pi} - 1)$$

これを パラメーター表示の曲線としか見ないと, 計算が大変です. 点 P は C 上を反時計回りに回転しますから,

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^\pi y \frac{dx}{d\theta} d\theta = - \int_0^\pi e^\theta \sin \theta (e^\theta \cos \theta)' d\theta = - \int_0^\pi e^\theta \sin \theta (e^\theta \cos \theta - e^\theta \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi e^{2\theta} (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) d\theta = \int_0^\pi e^{2\theta} \frac{1 - \cos 2\theta - \sin 2\theta}{2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} e^{2\theta} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2\theta} (\cos 2\theta + \sin 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[e^{2\theta} \right]_0^\pi - \frac{1}{4} \left[e^{2\theta} \sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{1}{4} (e^{2\pi} - 1) \end{aligned}$$

答えは求まりますが, 非常に面倒です. この計算量の違いは, 領域を「扇形の和とみるか」, 「 y 軸に平行な長方形の和」と見るかの違いです. 適切に領域を分割すれば, 計算量を大幅に減らすことができます. (逆に下手な分割をすると 計算量が膨大になります.)

練習 16 $C: \begin{cases} x = \theta(\sin \theta + \cos \theta) \\ y = \theta(\sin \theta - \cos \theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ と 直線 $y = -x$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ.

第4章 体積

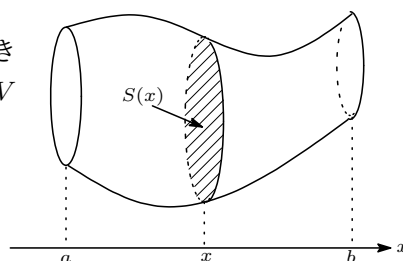
4.1 基本公式

次の公式が基本になります.

断面積と体積

立体を x 軸に垂直な平面で切った断面積を $S(x)$ とする. このとき 2 平面: $x = a, x = b$ (ただし $a \leq b$) ではさまれた立体の体積を V とすると

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

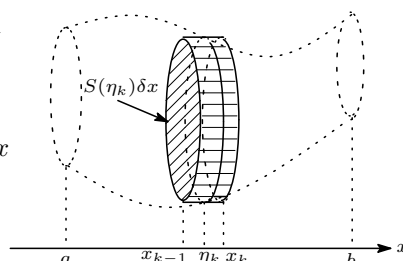


【証明】図の斜線のような小柱体の体積の和を考え, 区間の幅を限りなく小さくしていった極限が体積だから

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n S(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n S(\eta_k) \delta x = \int_a^b S(x) dx$$

(ただし, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $x_{k-1} < \eta_k \leq x_k$,

$$\delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta x = \max\{\delta x_k\})$$



この公式の簡単な応用が x 軸や y 軸の周りに回転した立体の体積です. 断面は円や円環になります.

x 軸の周りの回転体の体積

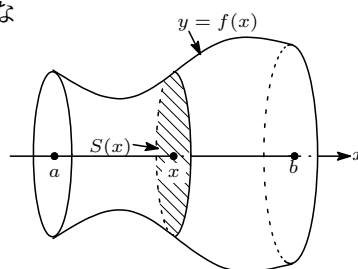
$y = f(x)$ と $x = a, x = b$ ($a < b$) で囲まれた図形を x 軸の周りに回転した立体の体積では, 断面は半径が $|f(x)|$ の円とその内部となるので,

$$S(x) = \pi |f(x)|^2 = \pi \{f(x)\}^2$$

よって体積を V_x とおくと

$$V_x = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx$$

(ただし $y = f(x)$)



回転体の公式は $y = f(x)$ と x 軸の間が「ぎっしり詰まっている」領域を回転させるとき使えます. $f(x)$ は正でも負でも関係ありません. 同様にして, y 軸の周りの回転体の体積も求まります.

y 軸の周りの回転体の体積

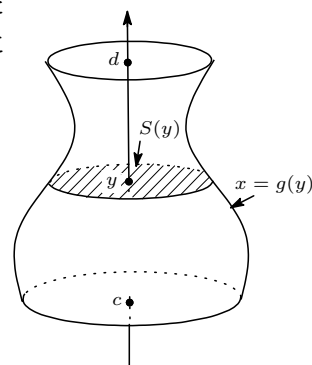
$x = g(y)$ と $y = a, y = b (a < b)$ で囲まれた図形を y 軸の周りに回転した立体の体積では、断面は半径が $|g(y)|$ の円とその内部となるので、 y 軸に垂直な平面による断面積を $S(y)$ とすると、

$$S(y) = \pi |g(y)|^2 = \pi \{g(y)\}^2$$

よって体積を V_y とおくと

$$V_y = \int_c^d \pi \{g(y)\}^2 dy = \int_c^d \pi x^2 dy$$

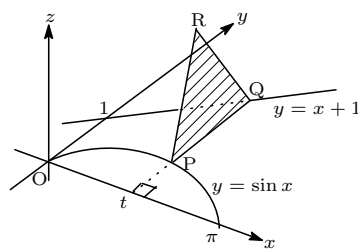
(ただし $x = g(y)$)



体積の基本は、断面積さえ求めればよい」ということです。立体の概形は、必ずしも解らなくても大丈夫です。そして回転体では 平面による断面を求めてから、それを回転させた方が楽です。（「廻してから切る」より「切ってから廻す」）

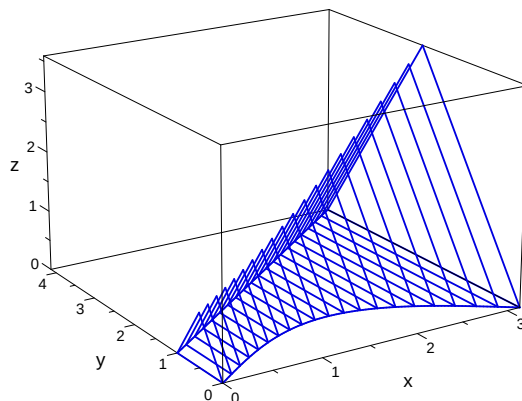
例 21

点 P は xy 平面上の曲線 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 上を動くものとする。さらに、点 P を通り y 軸に平行な直線と $y = x + 1$ の交点を Q とし、線分 PQ を含み xy 平面に垂直な平面上に点 R をとり、正三角形 PQR を作る。点 P が原点から点 $(\pi, 0)$ まで動くとき $\triangle PQR$ が通過してできる立体の体積を求めよ。ただし R の z 成分は負にならないものとする。



立体の概形は右図のようになりますが、体積には必要ありません。断面積 $S(x) = \triangle PQR$ ですから

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi S(x) dx = \int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4} PQ^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^\pi (x+1 - \sin x)^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^\pi \{(x+1)^2 - 2(x+1)\sin x + \sin^2 x\} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{(\pi+1)^3}{3} - \frac{1}{3} - 2(\pi+2) + \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\pi^3}{3} + \pi^2 - \frac{\pi}{2} - 4 \right) \end{aligned}$$



注1) このように軸に垂直に領域が通過してできる立体の体積は、概形を求める必要がありません。

注1) 【注】ここで、部分積分の公式より

$$\int (x+1) \sin x dx = \int (x+1)(-\cos x)' dx = (x+1)(-\cos x) - \int (x+1)'(-\cos x) dx = -(x+1)\cos x + \sin x + C$$

また

$$\int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C, \quad \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

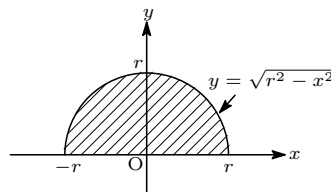
を使いました。

例 22

半径 r の球の体積 V を、回転体の面積の公式を用いて求めよ。

$x^2 + y^2 = r^2 \iff y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. よって 領域: $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} (-r \leq x \leq r)$ を x 軸の周りに回転すると半径 r の球になるので、

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$



回転体の公式を使うときは、曲線 $y = f(x)$, $x = g(y)$ と座標軸 x , y 軸の間が詰まっていることを確認しましょう。もし x , y 軸との間に隙間があるときは、回転すると中空部分ができるので、その分の体積を引かないといけません。次の問題では、 x 軸との間に隙間があるので、断面が円になりません。

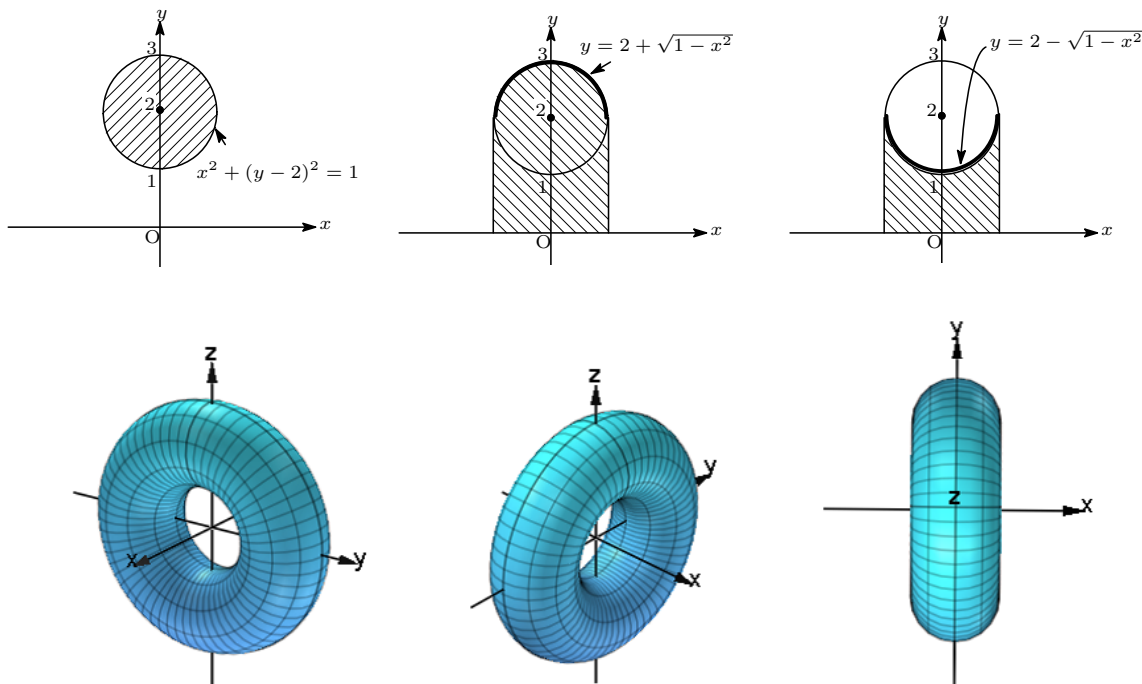
例 23

円とその内部: $x^2 + (y-2)^2 \leq 1$ を、 x 軸の周りに回転した立体の体積 V を求めよ。

概形は下図のようなドーナツ (トーラス) になります。さて、今度は $x^2 + (y-2)^2 = 1 \iff y = 2 \pm \sqrt{1-x^2}$ と x 軸の間には隙間があります。したがって、 $0 \leq y \leq 2 + \sqrt{1-x^2} (-1 \leq x \leq 1)$ を回転してできる立体の体積から、 $0 \leq y \leq 2 - \sqrt{1-x^2} (-1 \leq x \leq 1)$ を回転してできる立体の体積を引きます。すなわち

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi (2 + \sqrt{1-x^2})^2 dx - \int_{-1}^1 \pi (2 - \sqrt{1-x^2})^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 \left\{ (2 + \sqrt{1-x^2})^2 - (2 - \sqrt{1-x^2})^2 \right\} dx \\ &= 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 8\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi^2 \end{aligned} \quad \dots (*)$$

注2)



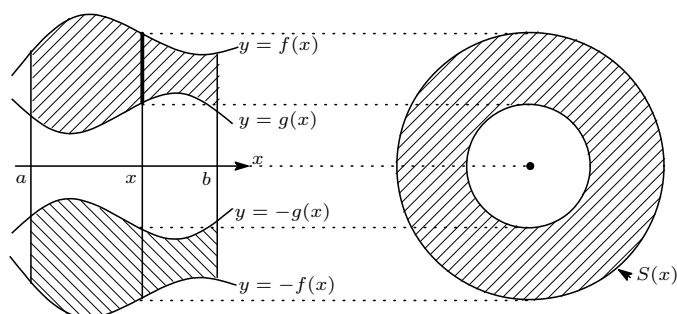
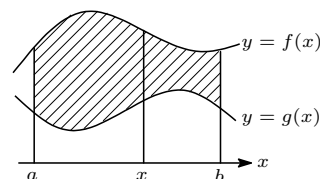
注2) (*) では、 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は半径 1 の円の面積の $\frac{1}{2}$ であることを使いました。もちろん $x = \sin \theta$ と置換しても O.K. です。

先の例題と同様に考えると、次の準公式が得られます。

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ ではさまれた領域の回転体の体積

$a \leq x \leq b$ において $f(x) \geq g(x) \geq 0$ の時、 $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ で囲まれる領域を x 軸の周りに回転した立体の体積 V は、 $0 \leq y \leq f(x) (a \leq x \leq b)$ を x 軸の周りに回転してできる立体の体積 $V_{\text{外}}$ から $0 \leq y \leq g(x) (a \leq x \leq b)$ を回転した立体の体積 $V_{\text{内}}$ を引いて、

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi \{f(x)\}^2 dx - \int_a^b \pi \{g(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_a^b [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] dx \end{aligned}$$



断面が半径 $f(x)$ の円と半径 $g(x)$ の円ではさまれたドーナツ状の領域になるので、断面積 $S(x)$ は

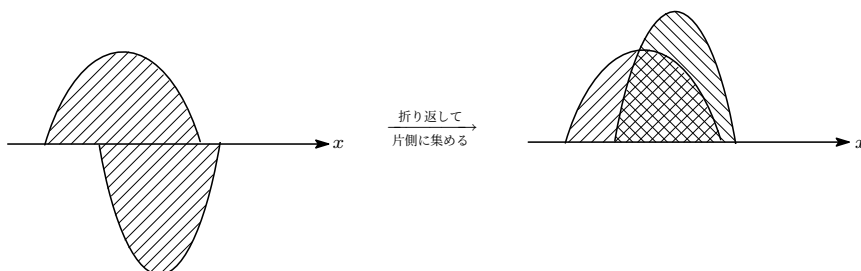
$$S(x) = \pi \{f(x)\}^2 - \pi \{g(x)\}^2 = \pi [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2]$$

よって

$$V = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] dx$$

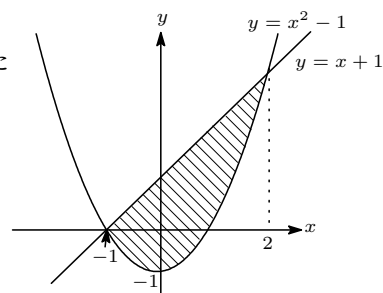
と考えても良いでしょう。また、 $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$ と間違えることが多いので、注意しましょう。(「2乗してから差をとる」のであって、「差をとってから2乗する」のではない。) また y 軸に関する回転体のときも同様の公式が作れますが、省略します。

上の準公式は $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が x 軸を横切っていたりすると使えません。($f(x) \leq g(x) \leq 0$ のときは使えます。) そのような時は、**グラフの $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返して、 x 軸の片側に集めて考えると良いでしょう。** 例えば下の図で、左下図の領域を x 軸の周りに回転した回転体と、右下図の領域を x 軸の周りに回転した回転体は合同になります。



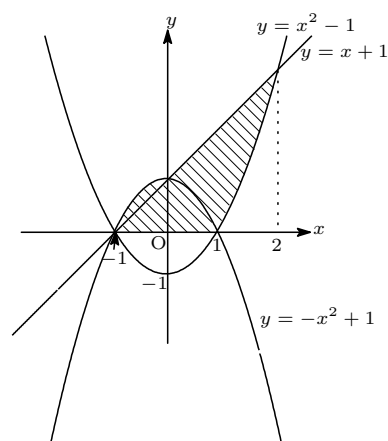
例 24

$y = x^2 - 1$ と $y = x + 1$ で囲まれる領域を x 軸の周りに回転した立体の体積 V を求めよ.



$y = x^2 - 1$ を x 軸に関して対称移動すると $y = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$.
 よって右図の斜線部分の領域を x 軸に関し回転した立体の体積を求めればよい. $y = -x^2 + 1$ と $y = x - 1$ の交点の x 成分は $x = -1, 0$ なので

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^0 (-x^2 + 1)^2 dx + \pi \int_0^2 (x + 1)^2 dx - \pi \int_1^2 (x^2 - 1)^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^0 + \pi \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_0^2 - \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{15}\pi + \frac{26}{3}\pi - \frac{38}{15}\pi = \frac{20}{3}\pi \end{aligned}$$



いろいろ細かな注意を述べましたが、結局、回転体の体積においても、立体の概形ではなく、回転軸に垂直な断面積を考えることがポイントです.

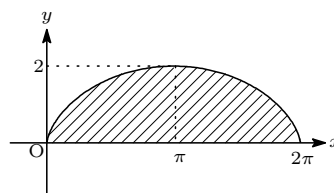
練習 17 $y = \sin x$ と $y = \cos x$ で囲まれる 1 つの領域を x 軸の周りに回転した立体の体積を求めよ.

4.2 パラメーター表示曲線の回転体

例 25 (サイクロイドの回転体)

$$\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた領域を x 軸の周りに回転させた立体の体積 V を求めよ.



x 軸の周りの回転体ですから

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx$$

ここで $x = \theta - \sin \theta$ と置換すると, $dx = (1 - \cos \theta)d\theta$. $\frac{x}{\theta} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & 2\pi \\ 0 & \rightarrow & 2\pi \end{matrix}$. さらに, (x, y) は曲線 C 上にあるから, $y = 1 - \cos \theta$. よって, 置換積分の公式より

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \cdot (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^3 d\theta = \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos \theta + 3\cos^2 \theta - \cos^3 \theta) d\theta \end{aligned}$$

ここで $\int \cos^3 \theta d\theta = \int (1 - \sin^2 \theta)(\sin \theta)' d\theta$ であるから, $\sin \theta = u$ とおくと, $\cos \theta d\theta = du$, $\frac{\theta}{u} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & 2\pi \\ 0 & \rightarrow & 0 \end{matrix}$.
ゆえに $\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = 0$. となるので, (これは $y = \cos^3 \theta$ のグラフを考えても分かる)

$$V = \pi \int_0^{2\pi} \left\{ 1 - 3\cos \theta + \frac{3}{2}(1 + \cos 2\theta) \right\} d\theta = \pi \left[\theta - 3\sin \theta + \frac{3}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = 5\pi^2$$

結局, 面積と同様に, 置換積分の応用になります.

Comment

微小円柱の体積と 直接 結び付けて考えて見ましょう.

θ が $\delta\theta$ ($\delta\theta > 0$) 増加したときの x の増加分を δx とすると,
 $(1 - \cos \theta)d\theta = dx$ から,

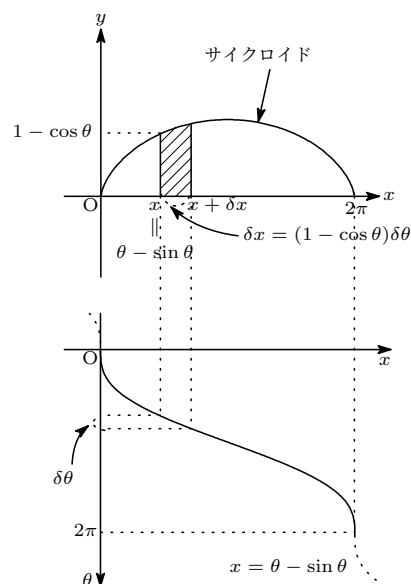
$$\delta x = (1 - \cos \theta)\delta\theta$$

$\delta x > 0$ だから, θ が $\delta\theta$ 増加するときの体積の増加分を δV とおくと,

$$\delta V = \pi y^2 \delta x = \pi (1 - \cos \theta)^2 \cdot (1 - \cos \theta) \delta\theta$$

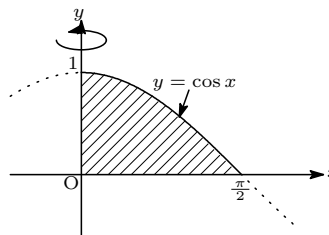
この微小体積を集めて, $\delta\theta$ の幅を限りなく小さくした極限が求める体積なので

$$V = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sum \delta V = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^3 d\theta$$



例 26 ($y = \cos x$ の回転体)

$y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と x 軸, y 軸で囲まれた領域を y 軸の周りに回転させた立体の体積 V を求めよ.



$$V = \pi \int_0^1 x^2 dy$$

ただし, $y = \cos x$ より $x = \cos^{-1} y$ ($\cos^{-1} x$ は $\cos x$ の逆関数) ですが, $\cos^{-1} x$ の積分は, 高校の数学の範囲ではありません. そこで 積分変数のほうを変換してみます. すなわち, $y = \cos x$ と置換すると, 置換積分の公式より, $dy = -\sin x dx$, $\frac{y}{x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \rightarrow \frac{1}{0}$. よって,

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2 (-\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

ここで, 部分積分の公式を繰り返し使って

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (-\cos x)' dx = \left[x^2 (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x (-\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x (\sin x)' dx = \left[2x \cdot \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = \pi - 2 \\ &\therefore V = \pi(\pi - 2) \end{aligned}$$

Comment

1 この問題は「 $x = t$, $y = \cos t$ 」とパラメーター表示されている曲線の回転体と考えることもできます. このとき

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dy. \quad y = \cos t \text{ とおくと, } x = t$$

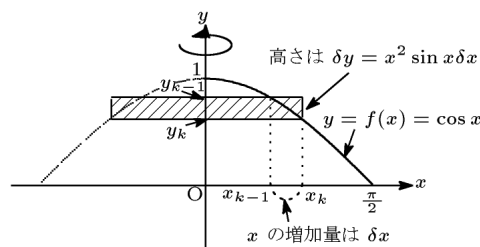
と考えると, 先のサイクロイドの回転体の体積と全く同じです.

2 微小円柱の体積と直接結び付けて考えてみましょう. x が δx ($\delta x > 0$) 増加したときの y の増加分を δy , 体積の増加分を δV とおくと, $dy = -\sin x dx$ から,

$$\delta y = -\sin x \delta x$$

$\delta y < 0$ だから,

$$\delta V = -\pi x^2 \delta y = -\pi x^2 \cdot (-\sin x) \delta x = \pi x^2 \sin x \delta x$$



この微小体積を集めて, δx の幅を限りなく小さくした極限が求める体積なので

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \delta V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \pi x^2 \sin x \delta x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2 \sin x dx$$

今度は曲線によって囲まれる領域を回転させて見ます。

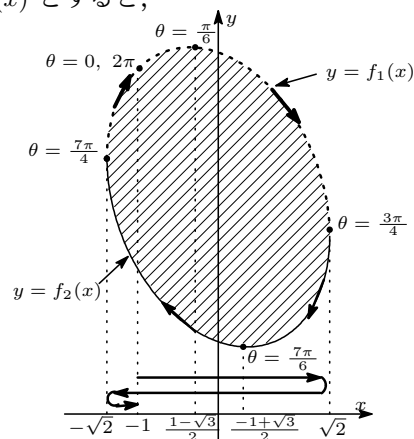
例 27 (閉曲線の回転体)

$$C: \begin{cases} x = \sin \theta - \cos \theta \\ y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta + 3 \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

によって囲まれる領域を x 軸の周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

実は **例 3** (42 頁) の曲線と同じです。したがって C の概形は図のようになります。 C のうち、 $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$ の部分を $y = f_1(x)$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}$ の部分を $y = f_2(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{\sqrt{2}} \{f_1(x)\}^2 dx - \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \{f_2(x)\}^2 dx + \pi \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \{f_1(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{3\pi}{4}} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta - \pi \int_{\frac{7\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta + \pi \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \pi \int_0^{\frac{3\pi}{4}} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta + \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta + \pi \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta \quad \dots \textcircled{1} \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta + 3)^2 (\sin \theta + \cos \theta) d\theta \\ &= \pi \int_0^{2\pi} \left\{ \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \cos^2 \theta + 6 \sin \theta + 6\sqrt{3} \cos \theta \right\} (\sin \theta + \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$



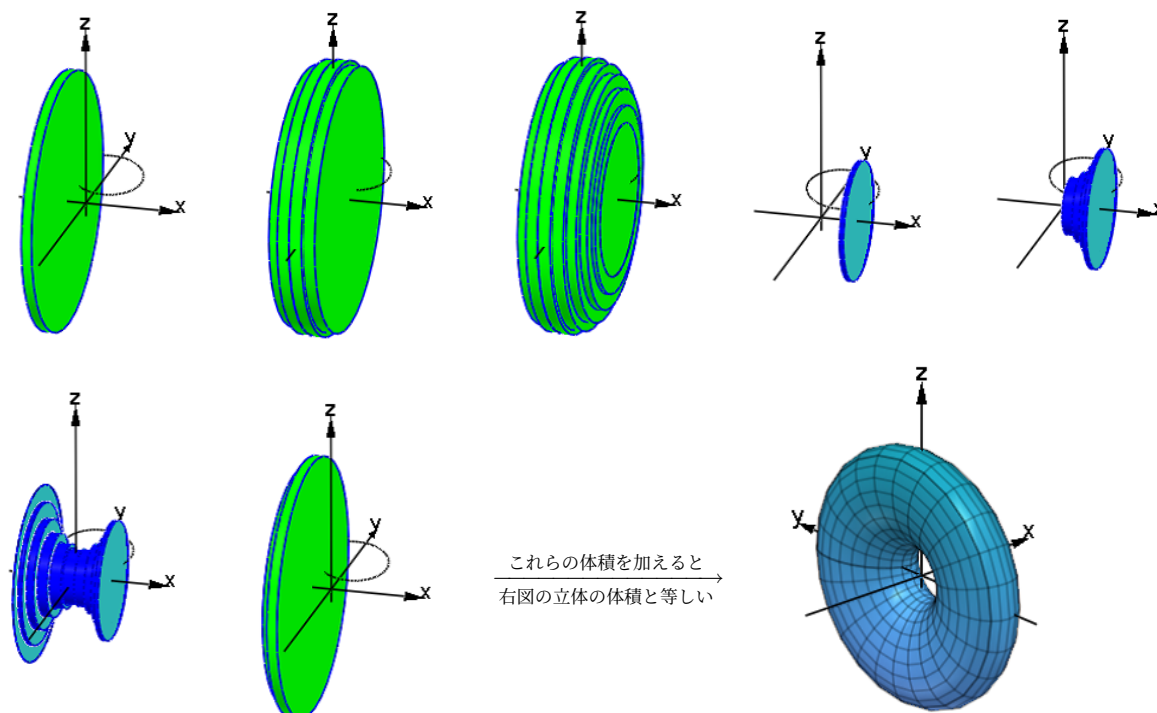
点 $(\pi, 0)$ に関しグラフが点対称になるから $\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$.
よって, $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta = 0$.
したがって,

$$V = \pi \int_0^{2\pi} (6 \sin^2 \theta + 6\sqrt{3} \cos^2 \theta) d\theta = \pi \int_0^{2\pi} \{3(1 - \cos 2\theta) + 3\sqrt{3}(1 + \cos 2\theta)\} d\theta = 6(\sqrt{3} + 1)\pi^2$$

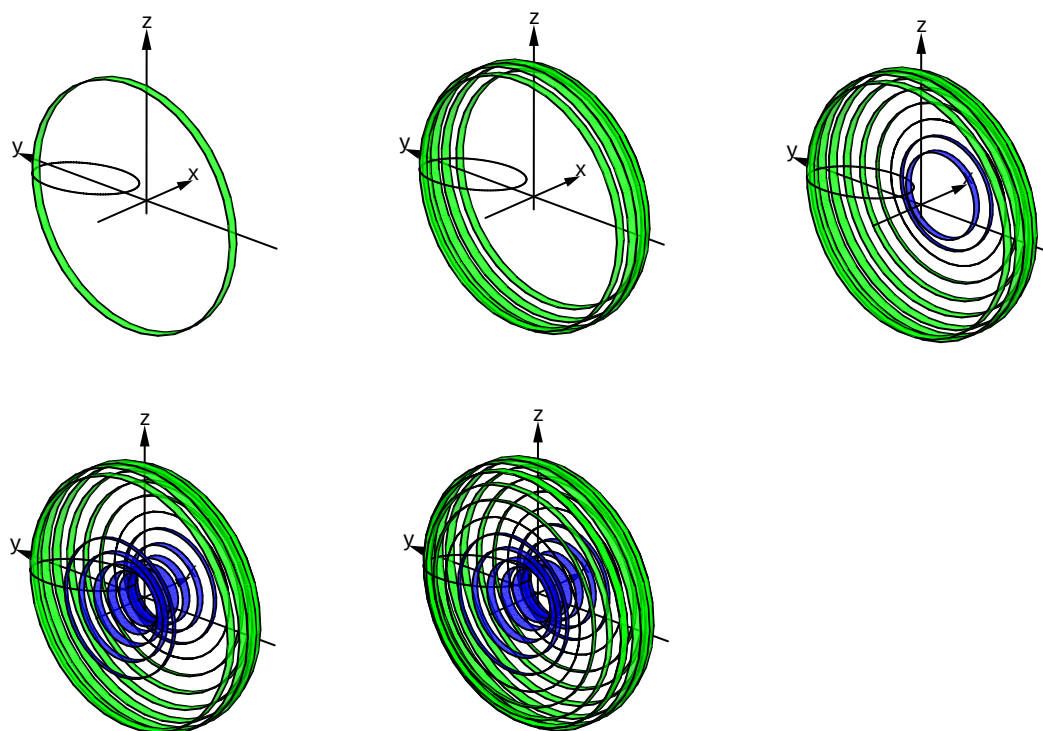
Comment

この問題も、置換積分の応用です。しかも、 $\textcircled{1}$ のように、**例 3** (42 頁) と同様、積分はひとつにまとまりました。パラメーター表示された曲線の面積と同様にして、回転軸の片側に集まっている領域の回転体の体積は、簡単な式で表されます。

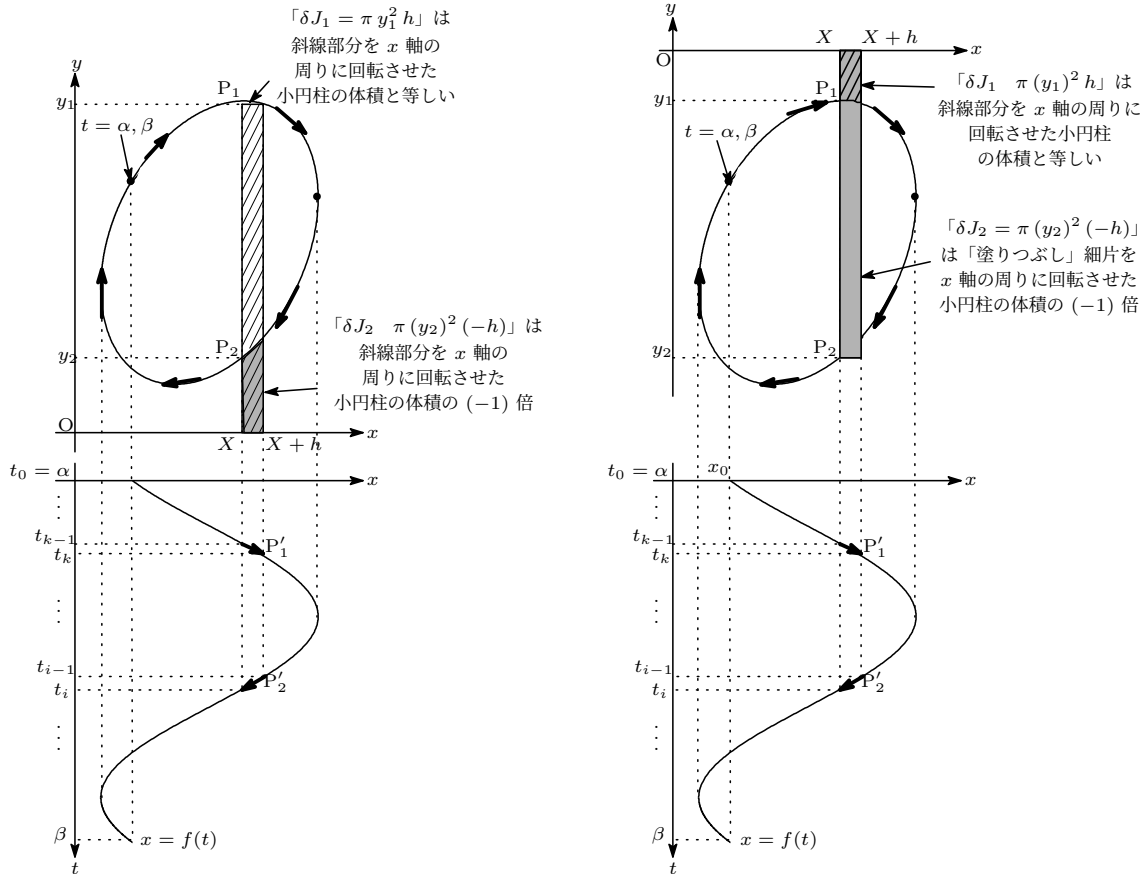
【参考】 t が δt ($\delta t > 0$) 増加したとき体積 V の増加量を δV とすると, $\delta x = (\cos \theta + \sin \theta)\delta\theta > 0$ のとき V は増加 ($\delta V > 0$) , $\delta x = (\cos \theta + \sin \theta)\delta\theta < 0$ のとき V は減少 ($\delta V < 0$) する. 下図ではその増加量に対応する小円柱を, 「 $\delta V > 0$ のとき緑色」で, 「 $\delta V < 0$ のときは 青色」で表してある. この小円柱の体積を加えたものが, 求める体積 V となる.



次の図は, 円柱の側面を省略して描いたもの.



— 閉曲線で囲まれた図形の回転体の体積について考えます。興味の有る人だけ読んでください。 —



いま $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) を上図のような閉曲線（閉じた曲線）とし、 t が $\alpha \rightarrow \beta$ と変化するとき、 $P(f(t), g(t))$ が C 上を**時計回りに**1周するものとします。このとき、 $P'(x, 0)$ は x 軸上を動きますが $[X, X+h]$ ($h > 0$) をその中に含まれるある区間とし、 C で囲まれた領域を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を V 、 $x = X, x = X+h$ で切り取られたその立体の体積を δV とします。このとき、 t が増加するにつれて $P'(x, 0)$ はこの区間を、まず「左から右へ」次に「右から左へ」通過します。そして「左から右へ通過するとき」は「 $g'(t)\delta t = \delta x > 0$ 」ですから「 $\delta V = \pi y^2 \delta x = \pi y^2 g'(t)\delta t$ 」。しかし「右から左へ通過するとき」は「 $g'(t)\delta t = \delta x < 0$ 」ですから「 $\delta V = \pi y^2 (-\delta x) = -\pi y^2 g'(t)\delta t$ 」。さらに $\delta J = \pi y^2 g'(t)\delta t$ 、 P_1, P_2 の y 成分を y_1, y_2 、 $\delta t_1 = t_k - t_{k-1}$ 、 $\delta t_2 = t_i - t_{i-1}$ とおくと、 δt_1 と δt_2 に対応する δJ の和は

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = \pi (y_1)^2 g'(t_k) \delta t_1 + \pi (y_2)^2 g'(t_i) \delta t_2 = \pi (y_1)^2 h + \pi (y_2)^2 (-h) = \pi (y_1^2 - y_2^2) h = \delta V \quad \dots (*)$$

よって $J = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 g'(t) dt = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt$ と定めると、

$$J = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 g'(t) dt = \pi \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum y^2 g'(t) \delta t = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum \delta J = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \delta V = V$$

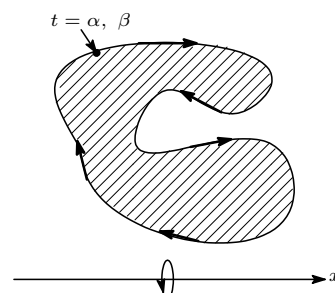
ただし、面積とは異なり、 C が $y < 0$ の領域にあるときは時計回りの場合でも符号が逆になります。
(右上図)^{注3)} また、**反時計回り**のときは、面積のときと同様に符号が逆になります。そして面積のときと同様にして、次の公式が成り立ちます。ただし、面積と異なり C は x 軸を横切ってははいけません。

注3) (*) は成り立つが C が $y < 0$ に含まれるときは $(y_1)^2 - (y_2)^2 < 0$ となる。

閉曲線 (時計回り) に囲まれる領域の回転体

いま C を右の図のような閉曲線 (閉じた曲線) とし, C は $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) とパラメーター表示され, t が $\alpha \rightarrow \beta$ と変化するとき, $P(f(t), g(t))$ が C 上を「時計回りに」1周し, かつ C は x 軸の上側にあるものとします. このとき, C で囲まれた領域を x 軸の周りに回転した回転体の体積を V とすると,

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt$$

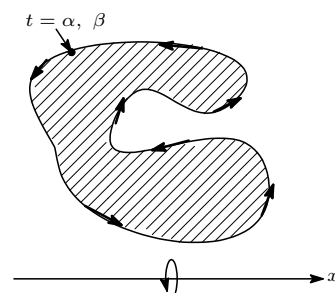


また, 反時計回りに回転するときは, 符号が逆になります. すなわち,

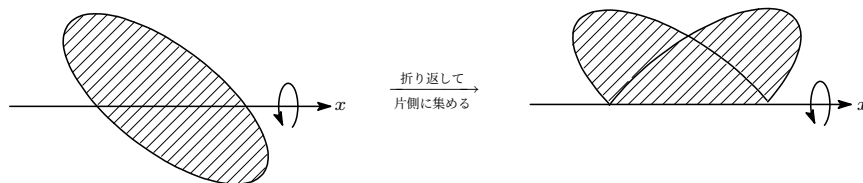
閉曲線 (反時計回り) に囲まれる領域の回転体

いま C を右の図のような閉曲線 (閉じた曲線) とし, C は $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) とパラメーター表示され, t が $\alpha \rightarrow \beta$ と変化するとき, $P(f(t), g(t))$ が C 上を「反時計回りに」1周し, かつ C は x 軸の上側にあるものとします. このとき, C で囲まれた領域を x 軸の周りに回転した回転体の体積を V とすると,

$$V = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt$$

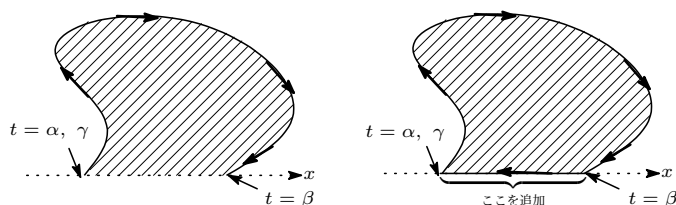


この公式は, 無理に覚える必要はありません. 「 x に関する積分を始めに書く必要はない」, 「積分は1つにまとめられる」という事さえ分かっていたら十分です. また, C が x 軸を横切っているときは $y = f(x)$ の場合と同様, x 軸の片側に折り返してから回転させます.



さらに, 面積と同様に, C が閉じていないときでも, 無理やり閉じさせることによって, C と x 軸や y 軸で囲まれた領域の回転体にも応用できます. 例えば下の図のような領域を x 軸の周りに回転した立体の体積を V とすると

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt$$



練習 18 $y = f(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) と x 軸で囲まれる部分を y 軸の周りに回転した立体の体積 V を求めよ.

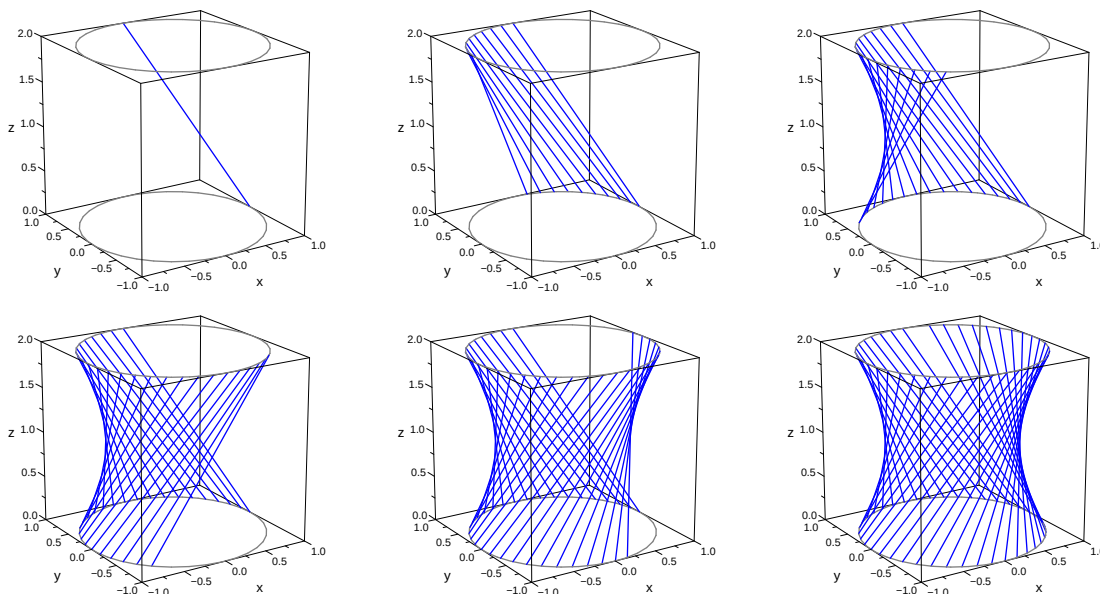
練習 19 極表示された曲線 $C: r = a(1 + \cos \theta)$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) で囲まれる領域を x 軸の周りに回転した立体の体積を求めよ.

4.3 空間における回転体の体積

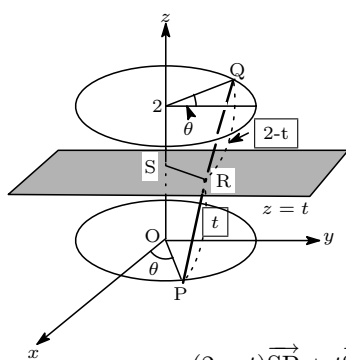
空間における回転体では、お手軽な「回転体の公式」は使えません。断面積を求めて積分することになります。そして「廻してから切る」のではなく「切ってから廻せ」です。

例 28 (線分の回転体)

xyz 空間に 2 点 $P(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $Q(\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2}), 2)$ がある。 θ が 0 から 2π まで変化するとき、線分 PQ の通過してできる曲面と、平面 $z = 0$ と $z = 2$ で囲まれる領域の体積 V を求めよ。



仮定より、点 P は原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を反時計回りに動き、点 Q は点 $A(0, 0, 2)$ を中心とする $z = 2$ 上の半径 1 の円上を反時計回りに動く。かつ点 Q の方が点 P より $\frac{\pi}{2}$ 先行して回転するので、上図のようになる。しかし、この概形は必ずしも解らなくとも大丈夫です。



まずは、平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 2$) による線分 PQ の切り口を求めてみましょう。 $z = t$ と線分 PQ の交点を R とすると、 R の z 成分は、もちろん t となる。 よって

$$\overline{PR} : \overline{RQ} = |R_z - P_z| : |Q_z - R_z| = t : (2 - t)$$

(ただしここで、例えば P_z は、 P の z 成分を表すものとする.)

ゆえに $z = t$ と z 軸との交点を $S(0, t)$ とすると、内分の公式より

$$\overrightarrow{SR} = \frac{(2-t)\overrightarrow{SP} + t\overrightarrow{SQ}}{(2-t) + t} = \frac{2-t}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -t \end{pmatrix} + \frac{t}{2} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 2-t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2-t)\cos \theta - t\sin \theta \\ (2-t)\sin \theta + t\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって 平面 $z = t$ による断面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = \pi |\overrightarrow{SR}|^2 = \frac{\pi}{4} \{(2-t)^2 + t^2\}$$

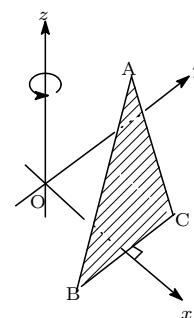
したがって求める体積 V は

$$V = \int_0^2 S(t) dt = \frac{\pi}{4} \int_0^2 \{(2-t)^2 + t^2\} dt = \frac{\pi}{4} \left[\frac{(t-2)^3}{3} + \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3} \pi$$

先の問題では、「線分の切り口は点」なので、結局、軸とその点との距離を求めれば大丈夫でした。今度は、「切り口が線分」になる場合です。この場合は、軸からの距離の最大値と最小値が大事になります。

例 29 (平面図形の回転体)

xyz 空間に三点 $A(1, 1, 4), B(3, -1, 0), C(3, 1, 0)$ がある。三角形 ABC を z 軸の周りに回転させたとき、その通過する領域の体積 V を求めよ。



平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 4$) と z 軸の交点を P , 辺 AB との交点を Q , 辺 AC との交点を R , 点 P から直線 QR に下ろした垂線の足を H , 平面 $z = t$ による立体の断面積を $S(t)$ とする。先の問題と同様に,

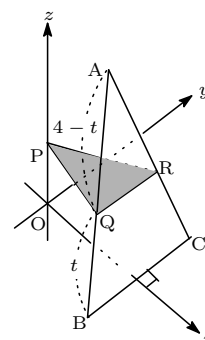
$$\overline{AQ} : \overline{QB} = (A \text{ と } Q \text{ の } z \text{ 成分の差}) : (Q \text{ と } B \text{ の } z \text{ 成分の差}) = (4 - t) : t$$

よって内分の公式から

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{t\overrightarrow{OA} + (4-t)\overrightarrow{OB}}{(4-t) + t} = \frac{t}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{4-t}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6-t}{2} \\ \frac{t-2}{2} \\ t \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$$

同様にして, (または $R_x = Q_x, R_y = A_y = C_y = 1$ だから)

$$\overrightarrow{OR} = \frac{t\overrightarrow{OA} + (4-t)\overrightarrow{OC}}{(4-t) + t} = \frac{t}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{4-t}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6-t}{2} \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \dots \textcircled{2}$$



線分 QR 上に垂線の足 H があるか, ないかで, 場合分けします。

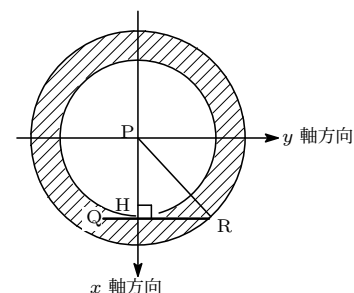
(i) $Q_y = \frac{t-2}{2} \leq 0 \iff 0 \leq t \leq 2$ のとき,

H は線分 QR 上にあるから, 断面は, 半径が $\overline{PH}$ の円と半径が $\overline{PR}$ の円で囲まれたトーラスとなる。よって,

$$S(t) = \pi (\overline{PR}^2 - \overline{PH}^2)$$

ところが 三平方の定理より $\overline{PR}^2 - \overline{PH}^2 = \overline{HR}^2$ だから

$$S(t) = \pi \overline{HR}^2 = \pi (R_y)^2 = \pi$$



(ii) $Q_y = \frac{t-2}{2} \geq 0 \iff 2 \leq t \leq 4$ のとき, H は線分 QR 上にないから, 断面は, 半径が $\overline{PQ}$ の円と半径が $\overline{PR}$ の円で囲まれたトーラスとなる. よって,

$$S(t) = \pi (\overline{PR}^2 - \overline{PQ}^2)$$

三平方の定理より $\overline{PR}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HR}^2$, $\overline{PQ}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HQ}^2$ だから

$$\overline{PR}^2 - \overline{PQ}^2 = (\overline{PH}^2 + \overline{HR}^2) - (\overline{PH}^2 + \overline{HQ}^2) = \overline{HR}^2 - \overline{HQ}^2$$

ゆえに

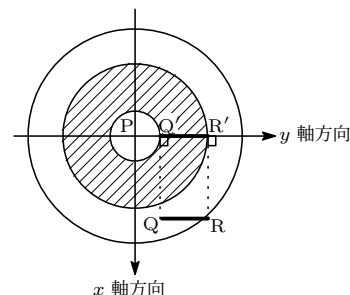
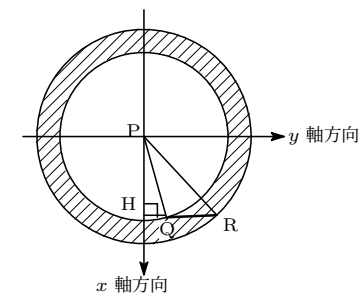
$$S(t) = \pi \{(R_y)^2 - (Q_y)^2\} = \pi \left\{ 1^2 - \left(\frac{t-2}{2} \right)^2 \right\} = \pi \left(t - \frac{t^2}{4} \right)$$

よって求める体積は

$$V = \int_0^2 S(t) dt + \int_2^4 S(t) dt = \pi \int_0^2 dt + \pi \int_2^4 \left(t - \frac{t^2}{4} \right) dt = \frac{10}{3} \pi$$

Comment

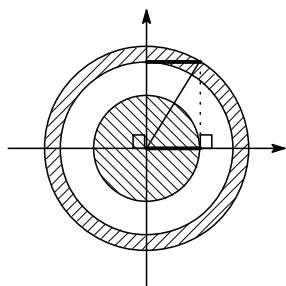
【別解】例えば (ii) のとき, $S(t) = \pi(\overline{HR}^2 - \overline{HQ}^2)$ ですから, 点 Q, R を yz 平面に正射影した点をそれぞれ Q', R' とすると, $S(t)$ が, 点 Q' を通る円と点 R' を通る円にはさまれたトーラスの面積に等しいことを表しています. 結局, 平面 $x = t$ 上で, **線分と直交する方向に平行移動してから回転しても, 線分の通過領域の面積は同じです.** 例えば【図1】で, 2つの斜線部分の面積は同じです.【図2】の, 2つの斜線部分の面積も同じです. (【図1】のタイプに関しては,「発展編 接線の描く面積」の章でもっと一般的な説明をしてあります.)



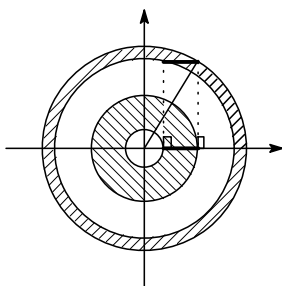
したがって, 点 A, B, C を yz 平面に正射影した点を, それぞれ A', B', C' とすると, 三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ の $z = k$ による断面積は一致します. よって, **三角形 ABC を z 軸の周りに回転した立体の体積 V と三角形 $A'B'C'$ を z 軸の周りに回転した立体の体積 V' は一致するはず**です. 実際,

$$V' = (\text{円柱の体積}) - (\text{円錐の体積}) = \pi \cdot 1^2 \cdot 4 - \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = \frac{10}{3} \pi = V$$

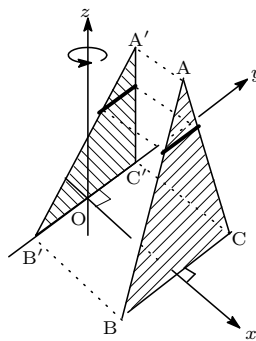
となっています. 二つの立体は合同ではないですが, 断面積が等しいので体積も等しくなっています.



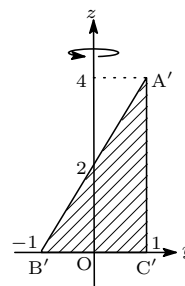
【図1】



【図2】

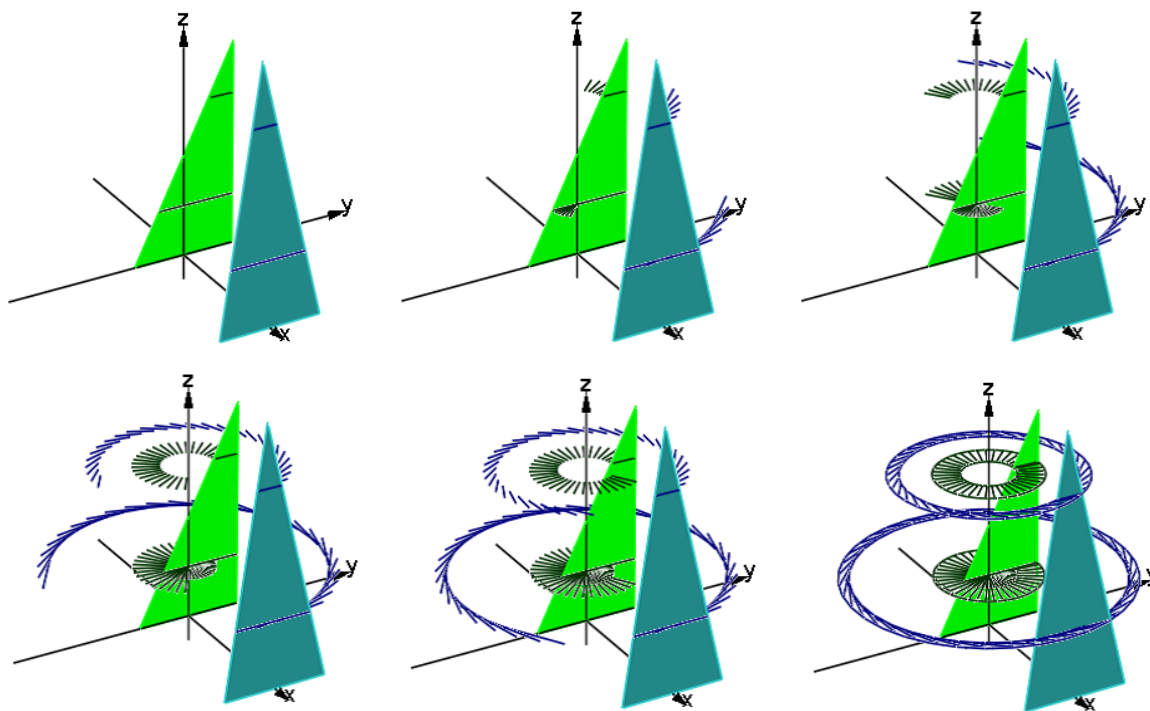


【図3】

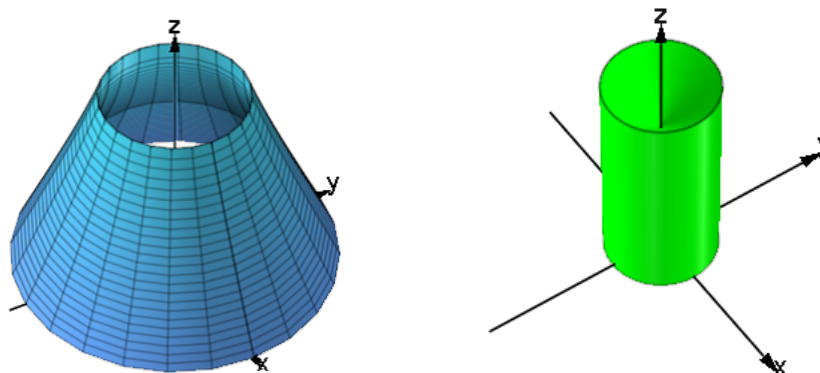


【図4】

【参考】点 A, B, C を yz 平面に正射影した点を、それぞれ A', B', C' とすると三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ の $z = k$ による断面積は一致して、三角形 ABC を z 軸の周りに回転した立体の体積 V と三角形 $A'B'C'$ を z 軸の周りに回転した立体の体積 V' は一致する。(下図は 平面 $z = 1, z = 3$ による切り口。)



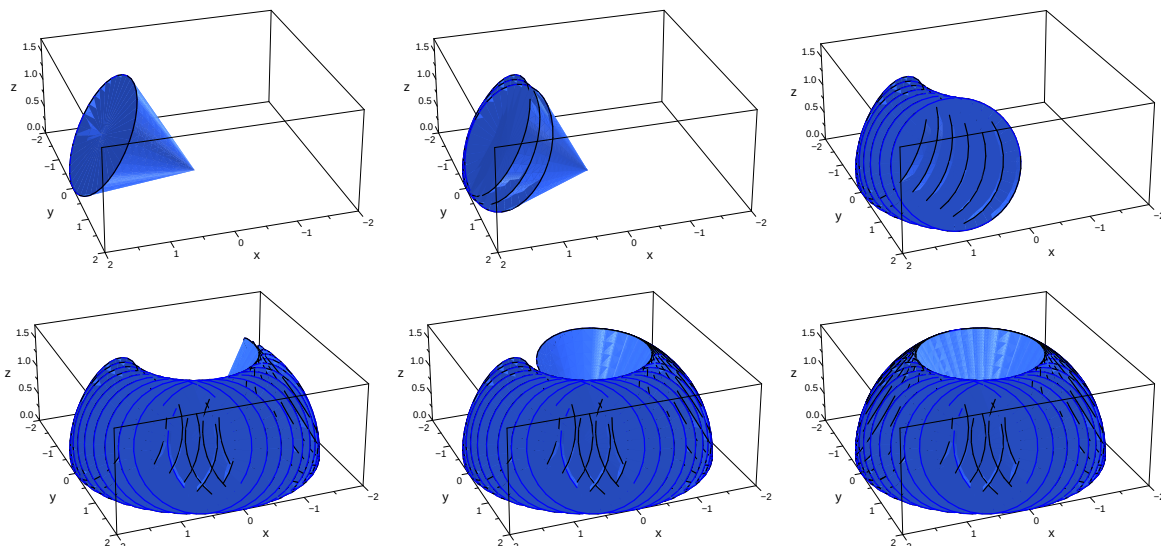
また、それぞれの概形は下ようになる。形は違うが体積は等しい。



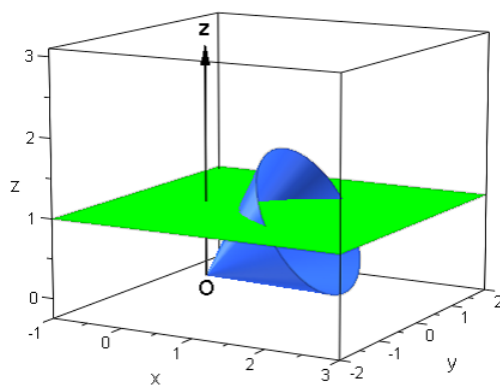
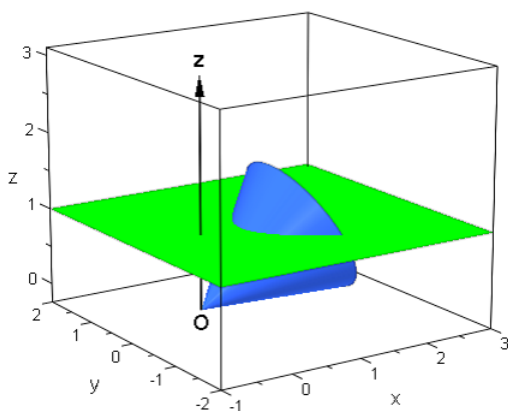
例 30 (立体図形の回転体)

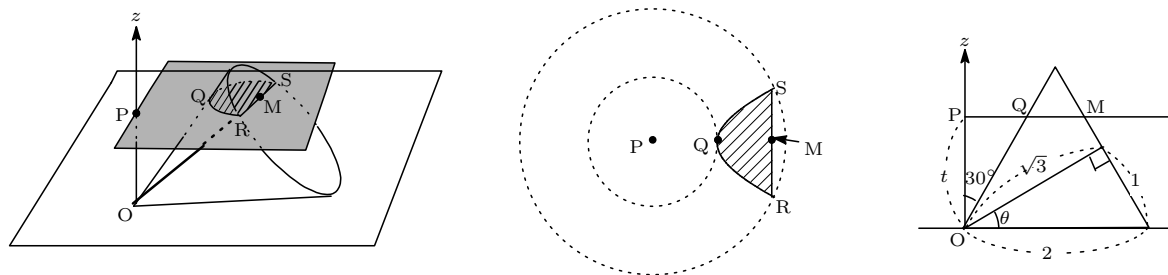
半径 1, 高さ $\sqrt{3}$ の直円錐を, 頂点を原点に固定して, xy 平面上を図のようにすべることなく転がす. 円錐の中心軸が一周して元の位置に戻るとき, 円錐が通過する領域の体積 V を求めよ.

(類題 東京電気大)



原則は「廻してから切るのではなく, 切ってから廻せ」です. 円錐を平面 $z=t$ で切った断面を考えます. (下の図は, 交線が見やすいように底面を抜いてあります.) 図からもわかりますが, 平面と円錐の交線は双曲線になります. (数 C の範囲)





上の図のように、平面 $z = t$ と円錐との交線のうち、 z 軸に最も近い点を Q 、遠い点を R と S 、さらに線分 RS の中点を M とします。平面 $z = t$ による立体の断面積を $S(t)$ とすると、

$$S(t) = \pi(\overline{PR}^2 - \overline{PQ}^2) \quad \dots ①$$

ところが、うまいことに、線分 OR は円錐の母線に当たります から、 $\overline{OR} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ 。さらに、 $P(0, 0, t)$ とおくと $\angle OPR = 90^\circ$ だから

$$\overline{PR}^2 = \overline{OR}^2 - \overline{OP}^2 = 4 - t^2 \quad \dots ②$$

今度は、 z 軸と円錐の軸を含む断面を考える。半径が 1、高さが $\sqrt{3}$ だから、 $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ より、断面は正三角形になる。よって、右上の図より

$$\overline{PQ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{OP} = \frac{1}{\sqrt{3}} t \quad \dots ③$$

よって断面積は

$$S(t) = \pi \left\{ (4 - t^2) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} t \right)^2 \right\} = \pi \left(4 - \frac{4}{3} t^2 \right)$$

t の変域は、右上図より、 $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ だから、求める体積は

$$V = \int_0^{\sqrt{3}} S(t) dt = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4 - \frac{4}{3} t^2 \right) dt = \frac{8}{3} \sqrt{3} \pi$$

Comment

立体の回転体では、「膨らみ」があるので、右上図の「三角形の内部を z 軸の周りに回転したものとは異なる」ことに注意してください。また、平面 $z = t$ 上では、断面は線分 QS を回転してできる円環と同じですが、(従って線分 QS を QS と直行する方向に平行移動しても断面積 $S(t)$ は同じですが) 先の問題と異なり、線分 QS は t の値により向きが変わります。従って先の【別解】のような「裏技」は使いづらいでしょう。

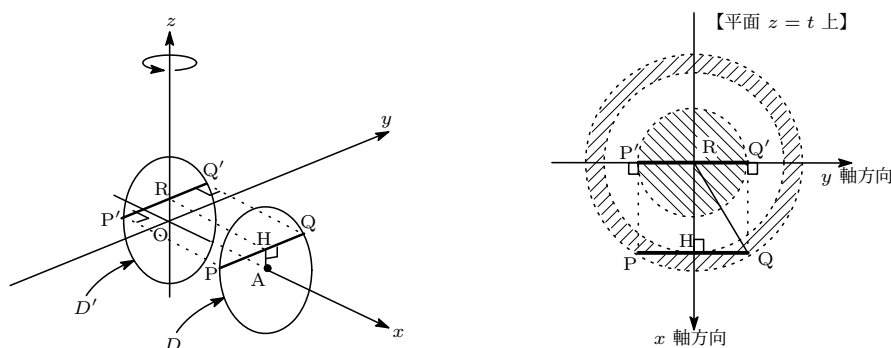
結局、空間の回転体では、「廻してから切るのではなく 切ってから廻す」ということと「軸からの距離の最大値と最小値を求める」(その平方の差を π 倍すると断面積になる)ということがポイントになります。

4.3.1 演習

この手の問題は慣れていない人が多いと思うので、簡単な問題をたくさん練習してみましょう。まず自分で考えてみてください。

例 31 (平面図形の回転体)

xyz 空間内に中心が $A(2, 0, 0)$, 半径が 1 の円盤 D が置かれている。この円盤 D が平面 $\pi: x = 2$ 上に置かれているとき, D を z 軸の周りに回転した立体 E の体積 V を求めよ。



平面 $z = t$ ($-1 < t < 1$) による円盤の切り口は線分になる。この線分を線分 PQ , P, Q の平面 $x = 0$ への正射影をそれぞれ P', Q' , さらに $z = t$ と z 軸の交点を $R(0, 0, t)$, R から直線 PQ に下ろした垂線の足を H , 立体の断面積を $S(t)$ とおく。このとき $S(t)$ は図の円環の面積と等しいから

$$S(t) = \pi(\overline{RQ}^2 - \overline{RH}^2) = \pi \overline{HQ}^2 = \pi \overline{RP'}^2$$

よって $S(t)$ は斜線の円の面積とも等しい。すなわち D を平面 $x = 0$ に正射影した円盤を D' , D' を z 軸の周りに回転してできる立体を E' とおくと, $z = t$ による E' の切り口の面積と E の切り口の面積は等しいから, E の体積は, E' の体積と等しい。よって

$$V = (\text{半径 } 1 \text{ の球の体積}) = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$$

【別解】 三平方の定理より $\overline{PH}^2 = \overline{AP}^2 - \overline{AH}^2 = 1 - t^2$. よって

$$S(t) = \pi \overline{PH}^2 = \pi(1 - t^2)$$

ゆえに

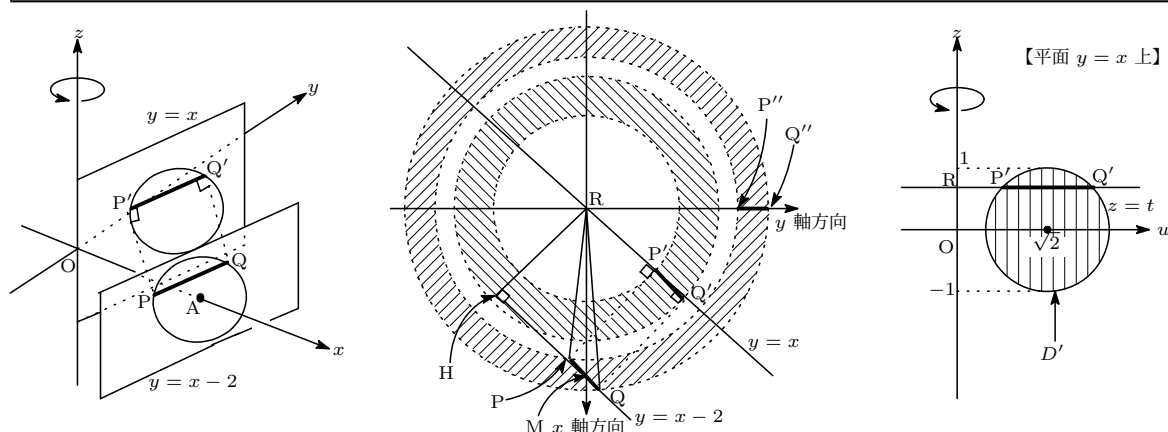
$$V = \int_{-1}^1 S(t) dt = \pi \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = 2\pi \int_0^1 (1 - t^2) dt = 2\pi \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi$$

Comment

例題 (63 頁) で述べたように, 平面図形 D を平面で切ると, 切り口は線分になる。これを 線分 PQ , 線分 PQ を **断面上で PQ と直交する方向に平行移動** した線分を線分 $P'Q'$ とすると, 線分 PQ を回転したときの断面積と線分 $P'Q'$ を回転したときの断面積は等しい。よって D を **線分 PQ と直交し, かつ断面と平行な方向に平行移動** した図形を D' とすると, D と D' を回転させた立体の体積は同じになる。しかし, この方法はよく射影の方向を間違うので, 「普通に断面上で軸からの距離の最大値と最小値を求めてやる」か, 「断面上で, 実際に 線分 $P'Q'$ を作図してやる」のが良いと思う。

例 32 (平面図形の回転体)

xyz 空間内に中心が $A(2, 0, 0)$, 半径が 1 の円盤 D が置かれている. この円盤 D が平面 $\pi: y = x - 2$ 上に置かれているとき, D を z 軸の周りに回転した立体 E の体積 V を求めよ.



点 P, Q, R, H , 断面積 $S(t)$ などは先の **例 31** と同じに定める. ただし P, Q の平面 $y = x$ への正射影をそれぞれ P', Q' と定める. 今度は H は線分 PQ の外側に来るので,

$$S(t) = \pi(\overline{RQ}^2 - \overline{RP}^2) = \pi \left\{ (\overline{RQ'}^2 + \overline{QQ'}^2) - (\overline{RP'}^2 + \overline{PP'}^2) \right\} = \pi (\overline{RQ'}^2 - \overline{RP'}^2)$$

しかし 今度も 二つの斜線の円環の面積は等しい. よって D を平面 $y = x$ に正射影した円盤を D' , D' を z 軸の周りに回転してできる立体を E' とおくと, E の体積は, E' の体積と等しい. 図のように直線 $y = x, z = 0$ に沿り u 軸を取ると, $u - z$ 平面で D' の境界は 中心 $(\sqrt{2}, 0)$, 半径 1 の円となり

$$(u - \sqrt{2})^2 + z^2 = 1 \iff u = \pm \sqrt{1 - z^2} + \sqrt{2}$$

よって

$$\overline{RQ'}^2 - \overline{RP'}^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{1 - t^2})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{1 - t^2})^2 = 4\sqrt{2}\sqrt{1 - t^2} \quad \dots (*)$$

$$\therefore V = \int_{-1}^1 S(t) dt = \int_{-1}^1 \pi (\overline{RQ'}^2 - \overline{RP'}^2) dt = 4\sqrt{2}\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = 4\sqrt{2}\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}\pi^2$$

【別解】 正射影しなくともできます. 線分 PQ の中点を M とおく.

$$\overline{HQ}^2 - \overline{HP}^2 = (\overline{HQ} + \overline{HP})(\overline{HQ} - \overline{HP}) = 2 \cdot \overline{HM} \cdot \overline{PQ} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{1 - t^2}$$

これは (*) の式に当たる. (略)

Comment

今度は PQ は $y = x - 2$ と平行なので, 線分 PQ を $y = x - 2$ に垂直に移動させた線分を考えないといけない. またこの問題では D' の回転体の体積がすぐ求まらないので, 結局は「 $\overline{HP}$ や $\overline{HQ}$ を求めるために $y = x$ に正射影しているだけ」です. 射影を使った方法は何時も「鮮やかに決まる」という訳ではない. また図の線分 $P''Q''$ を回転させた立体の体積と一致することを使っても解けます. 結局, 射影を使った方法のポイントは「断面積が同じで簡単な立体の体積に直す」ということです. 注4)

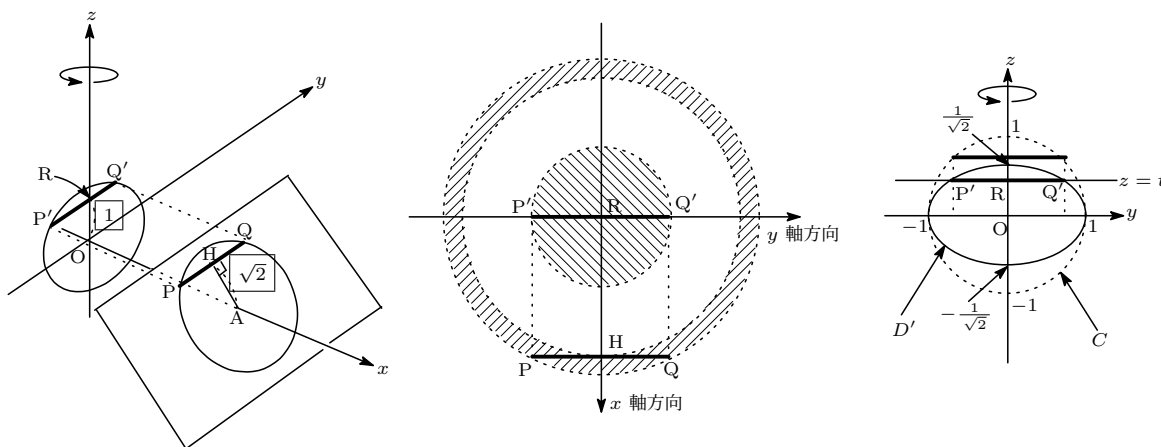
注4) 実は「平面図形の回転体の体積は, 重心の描く曲線の長さ $\times$ その面積」という公式を使えばすぐ求まる. もしこれを使うのならば

$$V = 2\pi\sqrt{2} \cdot \pi = 2\sqrt{2}\pi^2$$

と鮮やかに決まる.

例 33 (平面図形の回転体)

xyz 空間内に中心が $A(2, 0, 0)$, 半径が 1 の円盤 D がある. この円盤 D が平面 $\pi: z = -x + 2$ 上に置かれているとき, D を z 軸の周りに回転した立体 E の体積 V を求めよ.



点 P, Q, R, H, P', Q' , 断面積 $S(t)$ などは例 31 と同様に定める. このとき $S(t)$ は図の円環の面積と等しいから

$$S(t) = \pi(\overline{RQ}^2 - \overline{RH}^2) = \pi \overline{HQ}^2 = \pi \overline{RP'}^2$$

よって例 33 と同様に $S(t)$ は斜線の円の面積とも等しいから, D を平面 $x = 0$ に正射影した円盤を D' , D' を z 軸の周りに回転してできる立体を E' とおくと, E の体積は, E' の体積と等しい. ところが, 平面 π と xz 平面のなす角は 45° だから, 任意の P, Q に対し

$$\overline{OR} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AH}, \quad \overline{P'Q'} = \overline{PQ}$$

よって「 yz 平面上の中心を O , 半径 1 の円」を C とおくと, D' の境界は, C を y 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍拡大した楕円となる. 注5) ゆえに D' の回転体は, 「 C の回転体を z 軸に平行な方向に $\sqrt{2}$ 倍圧縮した楕円体」となり,

$$V = (\text{半径 1 の球の体積}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

【別解】 三平方の定理より $\overline{PH}^2 = \overline{AP}^2 - \overline{AH}^2 = 1 - (\sqrt{2}t)^2 = 1 - 2t^2$. よって

$$V = \int_{-1}^1 S(t) dt = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2t^2) dt = 2\pi \int_0^1 (1 - 2t^2) dt = 2\pi \left[t - \frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

Comment

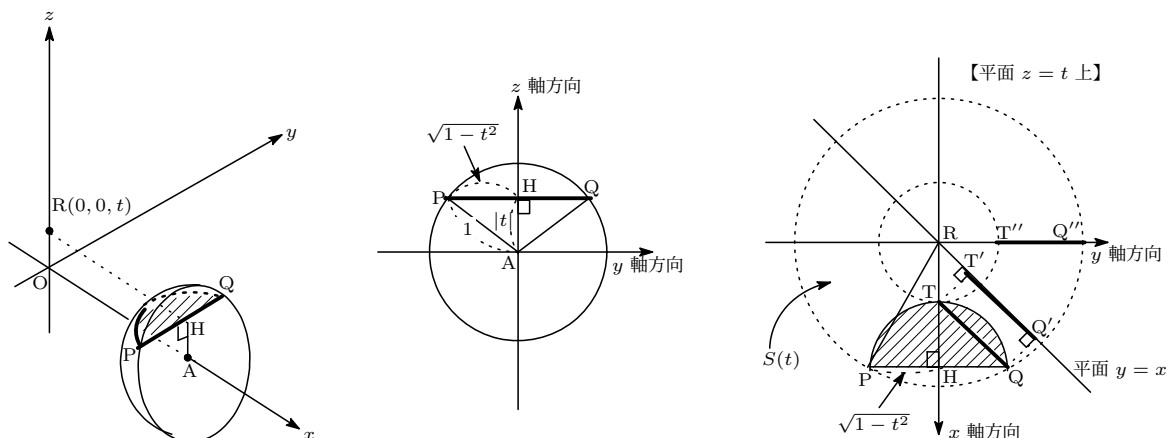
射影の方向を D に垂直に取らない様にしましょう. そしてこの問題も, 射影を使わなくとも問題なく解けた. 射影した図形が劇的に簡単になっていれば, 射影を使った方が速いが, そうでなければ, 普通に断面図上で, 軸からの距離の最大値と最小値を求めても大差はない.

練習 20 xyz 空間内に台形 $ABCD$ があり, $A(0, -2, 4), B(0, -2, 0), C(3, 1, 0), D(1, -1, 4)$ とする. この台形を z 軸の周りに回転した立体 E の体積 V を求めよ.

注5) 発展編「立体を上手に切る」の節にもう少し詳しい説明があります.

例 34 (立体の回転体)

xyz 空間内の領域 D を $D: (x-2)^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 1 \leq x \leq 2$ と定める. D を z 軸の周りに回転した立体 E の体積 V を求めよ.



平面 $z=t$ ($-1 < t < 1$) による D の切り口は線分ではなく上右図の斜線部分になる. 図のように 平面 $z=t$ 上に点 P, Q, R, T をとり, R から直線 PQ に下ろした垂線の足を H , 立体の断面積を $S(t)$ とおく. このとき $S(t)$ は図の円環の面積と等しいから

$$S(t) = \pi(\overline{RP}^2 - \overline{RT}^2) = \pi \left\{ 2^2 + (\sqrt{1-t^2})^2 - (2 - \sqrt{1-t^2})^2 \right\} = 4\pi\sqrt{1-t^2}$$

よって

$$V = \int_{-1}^1 S(t) dt = 4\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = 4\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi^2$$

Comment

線分 QT を平面 $y=x$ に正射影した線分を, 線分 $Q'T'$ とすると「平面図形の回転体」のように, 線分 $Q'T'$ を z 軸の周りに回転させた立体 E' の体積と E の体積は等しい. しかし, E' の体積を求めるのは簡単ではないので余りメリットがない. また円環と yz 平面の交点を点 Q'', T'' とすると, 線分 $Q''T''$ を z 軸の周りに回転させた立体 E'' の体積と E の体積も等しい. しかし, E'' の体積を求めるのも簡単ではないので, これも余りメリットがない. 結局, 射影を使った方法のポイントは「断面積が同じで簡単な立体の体積に直す」ということです. 射影しても簡単になるとき以外は使っても意味がない. (「立体の回転体の体積」を「射影を利用した方法」ですぐ求められる場合もある. しかしそれらは例外.)

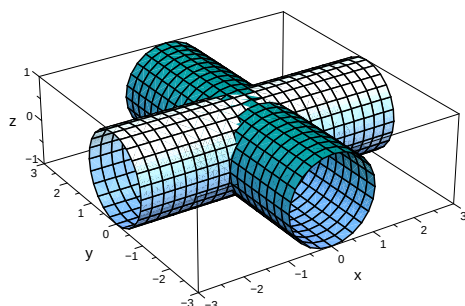
練習 21 xyz 空間内に四角すい $ABCD$ があり, $A(2, 0, 2), B(1, 0, 0), C(3, -1, 0), D(3, 1, 0)$ とする. この四角すいを z 軸の周りに回転した立体 E の体積 V を求めよ.

4.4 非回転体の体積

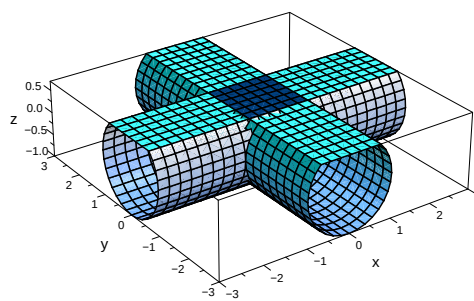
非回転体の体積は、基本的には断面積 $S(t)$ を求めます. $S(t)$ を求めるには、「図形的に考える」、「不等式(方程式)を利用する」などがあります. (結局、「図形的にやるか」、「計算でやるか」ということで何も言ってないのと同じ?)

例 35 (円柱の共通部分の体積)

半径 1 でその軸が直交する 2 つの円柱 (表面と内部) の共通部分の体積 V を求めよ.

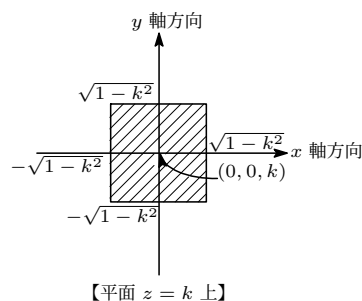
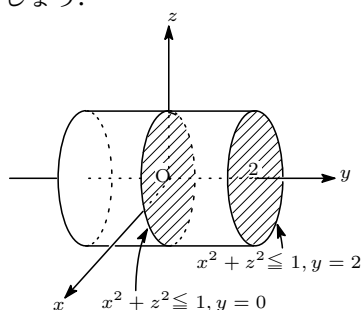


【円柱】



【平面 $z = k$ による断面】

平面 $z = k$ ($-1 \leq k \leq 1$) による断面は、右上図のような正方形になります. これを不等式を使って求めてみましょう.



【平面 $z = k$ 上】

軸が y 軸と一致し、半径が 1 の円柱 C_1 は、 xz 平面上の円盤 $x^2 + z^2 \leq 1$ を y 軸に平行移動したもののだから、 C_1 内の点を (x, y, z) とすると、

$$C_1 : x^2 + z^2 \leq 1 \quad (y \text{ は任意})$$

同様、軸が x 軸と一致し、半径が 1 の円柱 C_2 は、 yz 平面上の円盤 $y^2 + z^2 \leq 1$ を x 軸に平行移動したもののだから、

$$C_2 : y^2 + z^2 \leq 1 \quad (x \text{ は任意})$$

ゆえに、共通部分を D とすると、その領域は次の連立不等式を共にみたす (x, y, z) の集合となる.

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \leq 1 \\ y^2 + z^2 \leq 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

よって $z = k$ 上では、次の連立不等式をみたす点の集まりとなる. (右上図)

$$\begin{cases} x^2 + k^2 \leq 1 \\ y^2 + k^2 \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{1 - k^2} \leq x \leq \sqrt{1 - k^2} \\ -\sqrt{1 - k^2} \leq y \leq \sqrt{1 - k^2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

ゆえに、 $z = k$ ($-1 \leq k \leq 1$) による断面積を $S(k)$ とすると、

$$S(k) = (2\sqrt{1-k^2})^2 = 4(1-k^2)$$

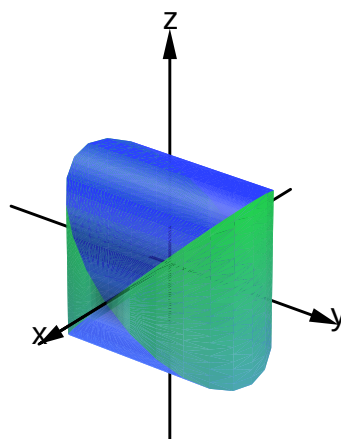
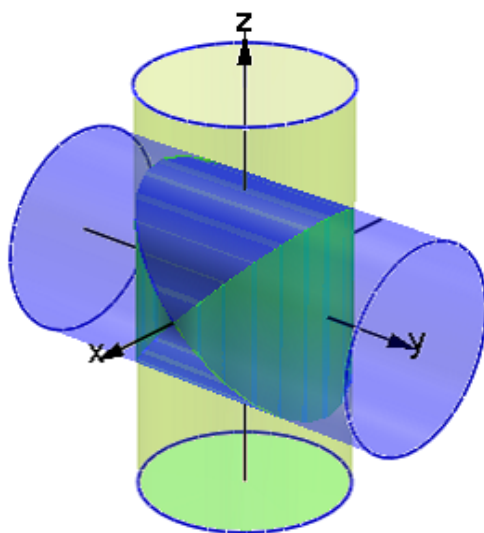
よって求める体積は

$$V = \int_{-1}^1 S(k)dk = 4 \int_{-1}^1 (1-k^2)dk = 8 \int_0^1 (1-k^2)dk = \frac{16}{3}$$

【別解】

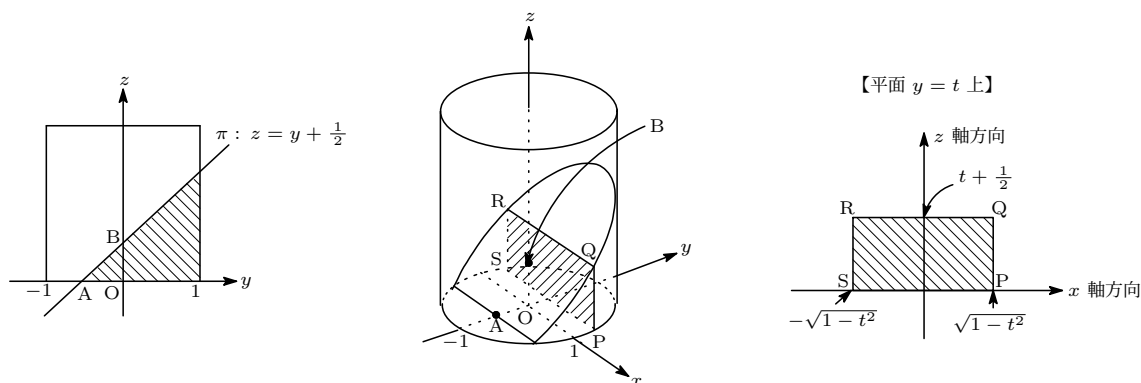
今度は図形的に求めてみます。その場合も「まず切れ」です。**円柱を軸に平行に切った断面は長方形**ですから、円柱 C_1 を平面 $z = k$ で切ったら、その断面は横の長さが $2\sqrt{1-k^2}$ の長方形になります。(図形的に簡単に求まります。) 同様に、円柱 C_2 を平面 $z = k$ で切っても断面は長方形になりますから、その2つの長方形の共通部分は、一辺が $2\sqrt{1-k^2}$ の正方形になります。2つの立体の共通部分の体積は、まず切って各々の図形の断面を求めてから、その共通部分をとれば良いです。(「立体の共通部分を取ってから切る」のではなく、「切ってから共通部分を取る」)

【参考】二つの円柱の共通部分の概形です。この図形の表面積も求まります。(演習問題に入れました。) さらに「この立体のうち $x^2 + y^2 \geq 1$ をみたく領域の体積を求めよ」(2005年 東大) という問題も出題されています。



例 36 (円柱と平面)

軸が z 軸、底円は原点を中心とする半径 1 の円で、高さが 2 の円柱 (内部を含む) を D 、点 $A(0, -\frac{1}{2}, 0)$ 、点 $B(0, 0, \frac{1}{2})$ を通り x 軸に平行な平面を π とする. D のうち π の下側にある部分 E の体積 V を求めよ.



D の式は $x^2 + y^2 \leq 1$. また中央上図より, $\pi: z = y + \frac{1}{2}$. よって E 内の点を (x, y, z) とおくと

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \text{ かつ} \\ 0 \leq z \leq y + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

平面 $y = t$ ($-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$) による切り口を考える. ① で $y = t$ とおいて

$$\begin{cases} x^2 + t^2 \leq 1 \text{ かつ} \\ 0 \leq z \leq t + \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{1-t^2} \leq x \leq \sqrt{1-t^2} \text{ かつ} \\ 0 \leq z \leq t + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

よって $y = t$ による切り口は右上図のようになる. この面積を $S(t)$ とおくと

$$S(t) = \overline{PS} \times \overline{PQ} = 2\sqrt{1-t^2} \left(t + \frac{1}{2} \right) \quad \dots \textcircled{3}$$

ゆえに 求める体積は

$$V = \int_{-\frac{1}{2}}^1 S(t) dt = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} \left(t + \frac{1}{2} \right) dt = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^1 t \sqrt{1-t^2} dt + \int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

ここで $1-t^2 = u$ とおくと, $-2t dt = du$, $\frac{t}{u} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{3}{4}} \rightarrow \frac{1}{0}$ だから

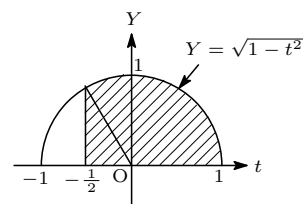
$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 t \sqrt{1-t^2} dt = \int_{\frac{3}{4}}^0 \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2} du \right) = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{3}{4}}^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ は図の斜線部分の面積と等しいから

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

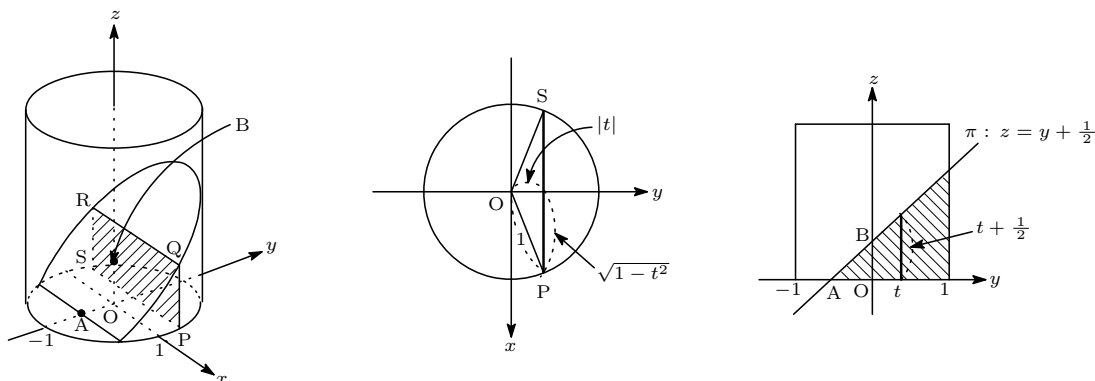
ゆえに求める体積は

$$V = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$$



【別解】先の解き方は不等式を使って解きました．今度は図形的にやってみましょう．下の図から

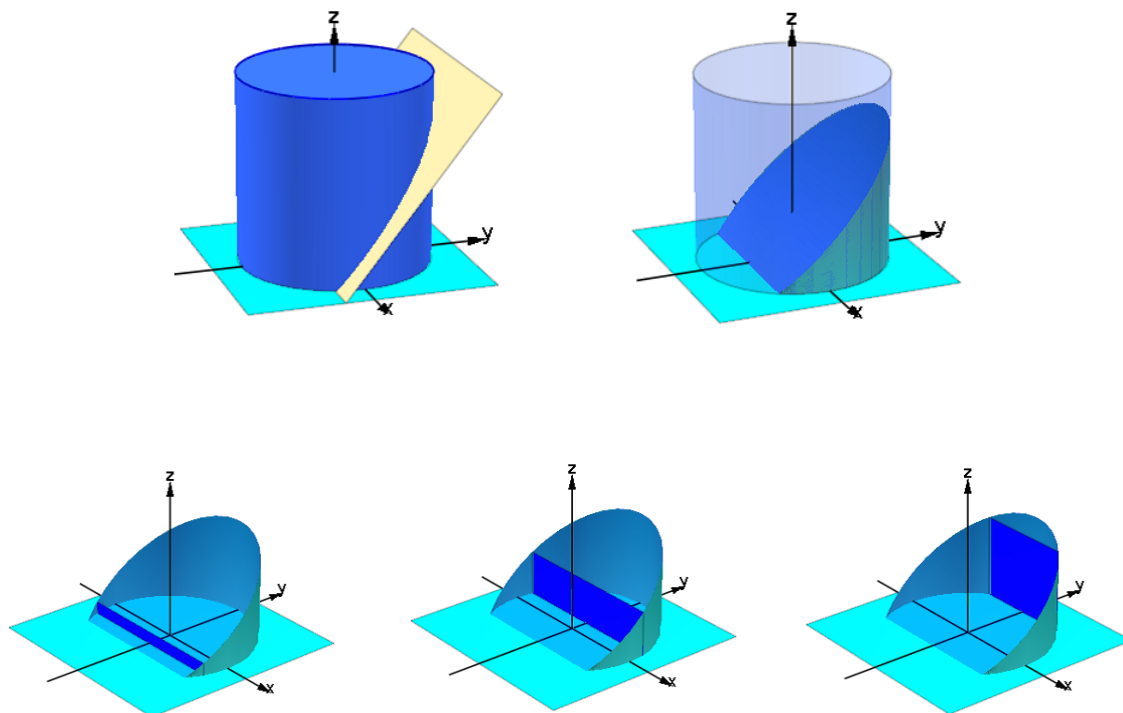
$$S(t) = \overline{PS} \times \overline{PQ} = 2\sqrt{1-t^2} \left(t + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{以下略})$$



Comment

この問題では，図形的にやったほうが速そうに「見えます」が，じつは断面が長方形になることに図形的な直感を必要とします．図形的にやったほうが良いのか，不等式(方程式)を使ったほうが良いのかは「ケースバイケース」でなんとも言えません．なお，「回転体でない立体の体積」は「発展編」に山のようになっています．

【参考】立体の見取り図と， $y = t$ による断面のCG

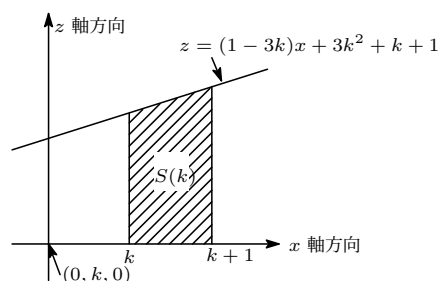
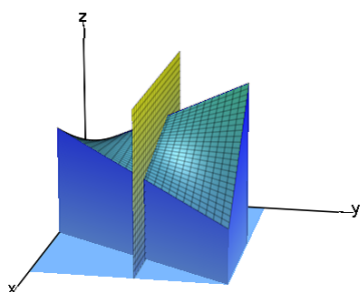


今度は、「あらかじめ不等式で与えられている領域」の体積を求めましょう。こちらの方が不等式を立てる必要がないのでむしろ簡単です。

例 37 (不等式で与えられる立体)

xyz 空間において、不等式 $0 \leq z \leq 1 + x + y - 3(x - y)y$, $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x \leq y + 1$ の全てを満足する x, y, z を座標に持つ点全体が作る立体の体積 V を求めよ。(東大・理系 1982 年)

立体の概形は下左図のようになりますが、体積を求めるには断面積だけ分かれば大丈夫です。 $x = k$, $y = k$, $z = k$ とおくか迷いますが、 y が一番多く出てくるので $y = k$ とおくとうまいでしょう。



$y = k (0 < k < 1)$ とおくと、平面 $y = k$ では立体のみたす不等式は次のようになります。(斜線部分)

$$0 \leq z \leq (1 - 3k)x + 3k^2 + k + 1, \quad k \leq x \leq k + 1$$

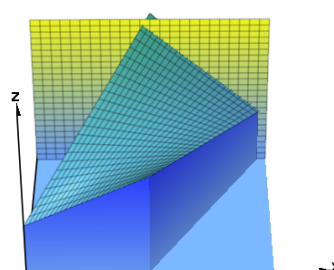
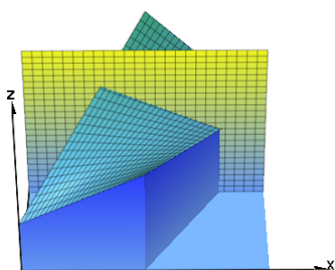
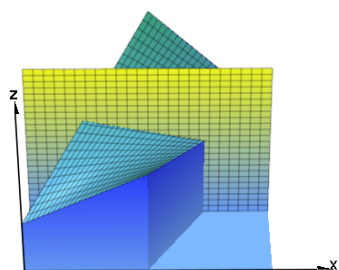
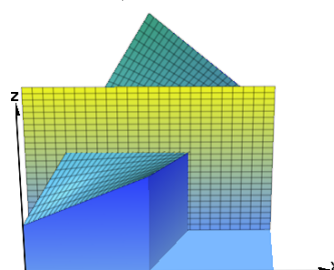
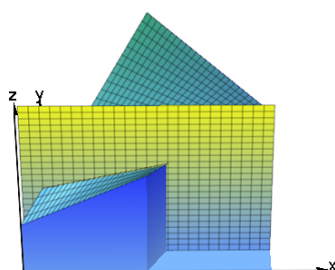
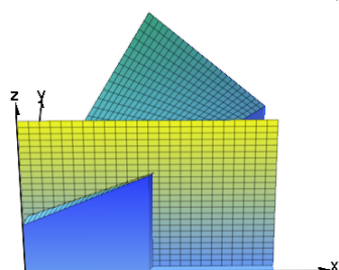
ここで $(1 - 3k)x + 3k^2 + k + 1 = f(x)$ とおくと、平面 $y = k$ 上では $z = f(x)$ は直線を表す。かつ $f(k) = 2k + 1 > 0$, $f(k + 1) = 2 - k > 0$ だから、 $k \leq x \leq k + 1$ において $f(x) > 0$ 。よって $y = k$ による断面積を $S(k)$ とすると

$$S(k) = \int_k^{k+1} \{(1 - 3k)x + 3k^2 + k + 1\} dx = \frac{1}{2} \{(2k + 1) + (2 - k)\} \cdot 1 = \frac{k + 3}{2}$$

よって求める体積は

$$V = \int_0^1 S(k) dk = \int_0^1 \frac{k + 3}{2} dk = \frac{7}{4}$$

【参考】平面 $y = k$ と 立体 ($y = k$ 上では直線だが、全体では曲面となることに注目)



第5章 練習問題解答

練習 1

上と同様にして $y = e^x$ と $x = 1$, x 軸, y 軸で囲まれた面積を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする. (7 頁)

区間 $[0, 1]$ を n 等分して長方形の和で内側から抑えた和を s_n とすると

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left\{ 1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} \right\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - (e^{\frac{1}{n}})^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

ここで $h = \frac{1}{n}$ とおくと $n \rightarrow \infty$ のとき, $h \rightarrow +0$. よって 求める面積を S とすると

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{e - 1}{\frac{e^h - 1}{h}} = e - 1 \quad \dots (\text{答})$$

Comment

もちろんこれは $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$ と一致する. さらに厳密には $S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \delta x_k = \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}$ も考えてハサミウチを行う.

練習 2

等差数列の和の公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ を, 上と同様にして導け. (10 頁)

$$\begin{cases} (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 & \dots \textcircled{1} \\ (k+1) - k = 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

($\textcircled{1} - \textcircled{2}$) $\div 2$ より

$$\frac{(k+1)^2 - (k+1)}{2} - \frac{k^2 - k}{2} = k$$

よって $f(k) = \frac{k^2 - k}{2}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) とおくと, $k = f(k+1) - f(k)$ だから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\} = - \sum_{k=1}^n \{f(k) - f(k+1)\} \\ &= - \{f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + f(3) - f(4) + \cdots + f(n) - f(n+1)\} \\ &= f(n+1) - f(1) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} - \frac{1^2 - 1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ だから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \{a_1 + (k-1)d\} = a_1 \sum_{k=1}^n 1 + d \sum_{k=1}^n (k-1) = a_1 \sum_{k=1}^n 1 + d \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= a_1 \cdot n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \end{aligned}$$

練習 3

例6において $J_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \Delta x$ とおく. $n=1, n=2, n=3$ の各々の場合につき, $\bar{\eta}_k (k=1, 2, \dots, n)$ の値を求めて J_n の式を書き, それが $F(1) - F(0)$ と一致していることを確かめよ. (16 頁)

例6から, 区間が $[0, 1]$ で $f(x) = 3x^2$, $F(x) = x^3$ のとき,

$$J_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \frac{1}{n}, \quad \bar{\eta}_k = \sqrt{\frac{3k^2 + 3k + 1}{3n^2}}$$

(i) $n=1$ のとき

$$J_1 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \frac{1}{n} = f(\bar{\eta}_0) \cdot 1 = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 = F(1) - F(0)$$

(ii) $n=2$ のとき

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \frac{1}{n} = f(\bar{\eta}_0) \cdot \frac{1}{2} + f(\bar{\eta}_1) \cdot \frac{1}{2} = f\left(\sqrt{\frac{1}{12}}\right) \cdot \frac{1}{2} + f\left(\sqrt{\frac{7}{12}}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = 1 = F(1) - F(0) \end{aligned}$$

(iii) $n=3$ のとき

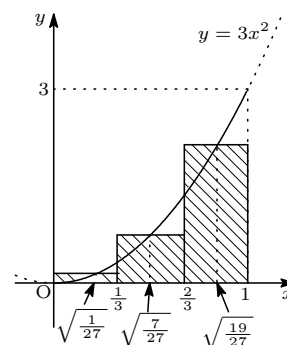
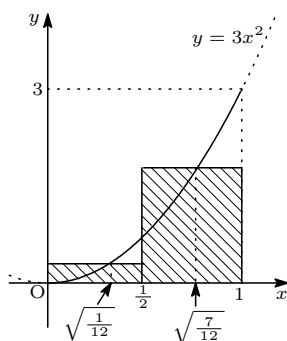
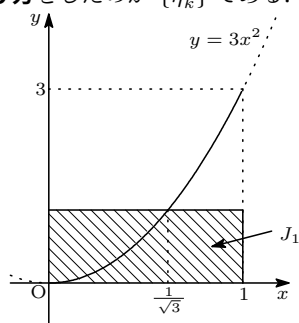
$$\begin{aligned} J_3 &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \frac{1}{n} = f(\bar{\eta}_0) \cdot \frac{1}{3} + f(\bar{\eta}_1) \cdot \frac{1}{3} + f(\bar{\eta}_2) \cdot \frac{1}{3} \\ &= f\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right) \cdot \frac{1}{3} + f\left(\sqrt{\frac{7}{27}}\right) \cdot \frac{1}{3} + f\left(\sqrt{\frac{19}{27}}\right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{7}{27} \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{19}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} + \frac{7}{27} + \frac{19}{27} = 1 = F(1) - F(0) \end{aligned}$$

Comment

例えば $n=3$ のとき, $\Delta x = \frac{1}{3}$ とすると, 平均値の定理より

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= \left\{ F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) \right\} + \left\{ F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) \right\} + \left\{ F(1) - F\left(\frac{2}{3}\right) \right\} \\ &= F'(\bar{\eta}_1) \Delta x + F'(\bar{\eta}_2) \Delta x + F'(\bar{\eta}_3) \Delta x \\ &= f(\bar{\eta}_1) \Delta x + f(\bar{\eta}_2) \Delta x + f(\bar{\eta}_3) \Delta x \end{aligned}$$

これは右下の図で, 例えば「一番右の長方形の面積 ($\bar{\eta}_3 \Delta x$) が, $\{F(1) - F(\frac{2}{3})\}$ と等しい」すなわち, 「 $y = f(x)$, x 軸, $x = \frac{2}{3}$, $x = 1$ で囲まれる面積と等しい」ことを示している. すなわち, 「各小区間 $[x_k, x_{k+1}]$ で, $y = f(x)$, x 軸, $x = x_k$, $x = x_{k+1}$ で囲まれる面積と, 高さが $f(\bar{\eta}_k)$ で横の長さが Δx_k の面積が等しくなる。」このような**特別の選**
び方をしたのが $\{\bar{\eta}_k\}$ である.



練習 4

$f(x) = e^x$, 区間 $[0, 1]$ を $\{x_k\}$ で n 等分し $x_k = \frac{k}{n} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$, $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ とする. さらに $\eta_k (k = 1, 2, 3, \dots, n)$ を区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の任意の点として $J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$, $I_n = \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x$ と定める. この時,

$$|I_n - J_n| \leq (e - 1) \Delta x$$

が成り立つことを示し $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |I_n - J_n| = 0$ を証明せよ. (16 頁)

$f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で増加関数なので (左下図)

$$0 \leq f(x_k) - f(\eta_k) \leq f(x_k) - f(x_{k-1}) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$\therefore 0 \leq \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(\eta_k)\} \Delta x \leq \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(x_{k-1})\} \Delta x \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで Δx は一定だから

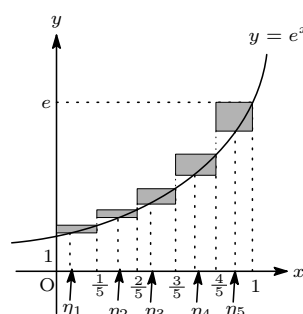
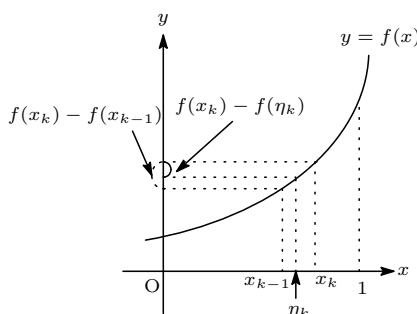
$$\sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(x_{k-1})\} \Delta x = \Delta x \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(x_{k-1})\} = \Delta x \{f(x_n) - f(x_0)\} = \Delta x \{f(1) - f(0)\} \quad \dots \textcircled{2}$$

$J_n - I_n = \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(\eta_k)\} \Delta x$ だから, ①, ② より

$$0 \leq J_n - I_n = \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(\eta_k)\} \Delta x \leq \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(x_{k-1})\} \Delta x \leq \Delta x \{f(1) - f(0)\} = (e - 1) \Delta x$$

$$\therefore |I_n - J_n| \leq (e - 1) \Delta x$$

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき $(e - 1) \Delta x \rightarrow 0$ だから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |I_n - J_n| = 0$. よって題意は証明された.



Comment

$J_n - I_n$ は右上図の領域の面積と等しい. (図は $n = 5$ のとき) また $f(x)$ が増加関数であれば, Δx が一定でないときでも $\delta x_k = x_k - x_{k-1}$ の最大値を Δx とすれば

$$|J_n - I_n| = \left| \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(\eta_k)\} \delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\{f(x_k) - f(\eta_k)\} \delta x_k| \leq \Delta x \sum_{k=1}^n \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}$$

これは ① と同じ. 以下同様にして $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |I_n - J_n| = 0$ が証明される.

練習 5

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ とする. $S_n = 2^n - 3n^2 - 1$ のとき $\{a_n\}$ の一般項と S_n を最小にする n の値を求めよ. ((21 頁))

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 3n^2) - \{2^{n-1} - 3(n-1)^2\} = 2^{n-1} - 3(2n-1)$$

これは $n=1$ のときも正しいので,

$$a_n = 2^{n-1} - 3(2n-1) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots(\text{答})$$

次に a_n の符号を調べる. $n=1, 2, 3, \dots$ を代入してみると

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	-2	-7	-12	-13	-11	-1	25
S_n	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$n \geq 8$ のとき $a_n > 0$ は, 数学的帰納法により簡単に証明される. (略) そして $S_n - S_{n-1} = a_n$ だから $a_n > 0 \iff S_n > S_{n-1}$, かつ $a_n < 0 \iff S_n < S_{n-1}$. よって

$$S_1 > S_2 > S_3 > \cdots > S_6 \quad \text{かつ} \quad S_6 < S_7 < S_8 < \cdots$$

ゆえに S_n を最小にする n の値は

$$n = 6 \quad \dots(\text{答})$$

練習 6

$F(x) = \int_0^x (2t - \pi) \sin^4 t \, dt$ とする. $0 \leq x \leq \pi$ において $F(x)$ を最小にする x の値を求めよ. (21 頁)

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x (2t - \pi) \sin^4 t \, dt = (2x - \pi) \sin^4 x$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$F'(x)$		-	0	+	
$F(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

表より $F(x)$ を最小にする x の値は

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \dots(\text{答})$$

Comment

この2つの問題の類似性に注目してください.

練習 7

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3} dx$$

の値を求めよ。(21 頁)

$t = 1 - x$ とおくと, $dt = -dx$, $\frac{x}{t} \left| \begin{array}{l} 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 0 \end{array} \right.$. よって

$$I = \int_1^0 \frac{(1-t)^3}{(1-t)^3 + t^3} (-dt) = \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{t^3 + (1-t)^3} dt = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3} dx$$

よって $J = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3} dx$ とおくと

$$I = J \text{ かつ } I + J = \int_0^1 \frac{x^3 + (1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3} dx = \int_0^1 dx = 1$$

ゆえに

$$I = \frac{1}{2} \quad \dots (\text{答})$$

練習 8

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$I = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2 + (n-k+1)^2}$$

の値を求めよ。(21 頁)

$$I = \frac{1^2}{1^2 + n^2} + \frac{2^2}{2^2 + (n-1)^2} + \frac{3^2}{3^2 + (n-2)^2} + \dots + \frac{(n-2)^2}{(n-2)^2 + 3^2} + \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2 + 2^2} + \frac{n^2}{n^2 + 1^2}$$

ここで $J = \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)^2}{(n-k+1)^2 + k^2}$ とおくと

$$J = \frac{n^2}{n^2 + 1^2} + \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2 + 2^2} + \frac{(n-2)^2}{(n-2)^2 + 3^2} + \dots + \frac{3^2}{3^2 + (n-2)^2} + \frac{2^2}{2^2 + (n-1)^2} + \frac{1^2}{1^2 + n^2}$$

ゆえに

$$I + J = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2 + (n-k+1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)^2}{(n-k+1)^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + (n-k+1)^2}{(n-k+1)^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$I = J$ だから

$$I = J = \frac{n}{2} \quad \dots (\text{答})$$

Comment

この2つの問題の類似性に注目してください.

練習 9

次の積分を求めよ.

(1) $\int_0^a \sqrt{ax - x^2} dx$

(2) $\int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx$

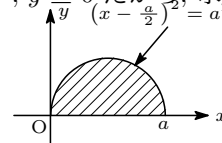
(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

(4) $\int_0^1 \left(x + \frac{1}{1+x^2} \right)^2 dx$

(25 頁)

(1) $y = \sqrt{ax - x^2} \iff y^2 = ax - x^2, y \geq 0 \iff \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2, y \geq 0$ だから, 求める積分 I は 右の斜線部分の面積と等しい. よって

$$\int_0^a \sqrt{ax - x^2} dx = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi a^2}{8} \quad \dots (\text{答})$$



【別解】 $ax - x^2 = \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ だから $x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \sin \theta$ とおくと, $dx = \frac{a}{2} \cos \theta d\theta, \frac{x}{\theta} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & a \\ -\frac{\pi}{2} & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \end{matrix}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} \sin \theta\right)^2} \cdot \frac{a}{2} \cos \theta d\theta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{a^2}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{a^2}{8} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{8} \end{aligned}$$

(2) $\int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^a \frac{1}{-2} \cdot (a^2 - x^2)' \sqrt{a^2 - x^2} dx$ と書けるので $t = a^2 - x^2$ とおくと $dt = -2x dx$,

$\frac{x}{t} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & a \\ a^2 & \rightarrow & 0 \end{matrix}$. よって

$$\int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_{a^2}^0 \sqrt{t} \left(-\frac{1}{2} dt\right) = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a^2} = \frac{a^3}{3} \quad \dots (\text{答})$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' (1 - \cos^2 x) dx$ であるから $\cos x = t$ とおくと,

$-\sin x dx = dt, \frac{x}{t} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \\ 1 & \rightarrow & 0 \end{matrix}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 x dx = \int_1^0 (1 - t^2)(-dt) = \int_0^1 (1 - t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad \dots (\text{答})$$

Comment この積分は重要なので, わざわざ置換せずに 「 $\cos x$ をひとまとめに見て」 できるのが望ましい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)' \cdot (1 - \cos^2 x) dx = - \left[\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

また ウォリスの公式を使ってもできます. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくと

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x (-\cos x)' dx = \left[\sin^{n+1} x (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1} x)' \cos x dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot \cos^2 x dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n+1) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx \right\} = (n+1)(I_n - I_{n+2}) = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$

ゆえに

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n. \quad \therefore I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad \dots (*)$$

これがウォリスの公式 (の前半) です. これを使うと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

(4)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(x + \frac{1}{1+x^2} \right)^2 dx &= \int_0^1 \left\{ x^2 + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} \right\} dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \end{aligned}$$

$x = \tan \theta$ とおくと $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$, $\frac{x}{\theta} \begin{matrix} 0 \rightarrow 1 \\ 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{matrix}$. よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 \theta)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^4 \theta}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

また

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \left[\log(1+x^2) \right]_0^1 = \log 2, \quad \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

以上から, 求める積分は

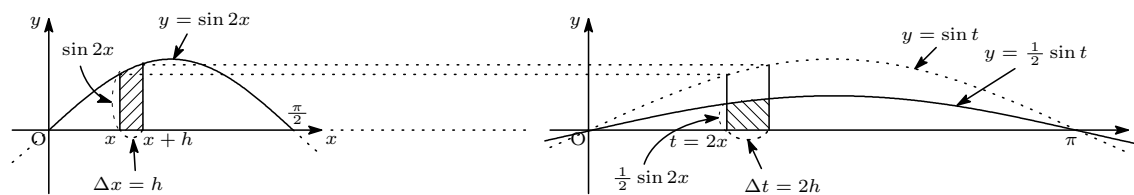
$$\int_0^1 \left(x + \frac{1}{1+x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{3} + \log 2 + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8} + \log 2 + \frac{7}{12} \quad \dots (\text{答})$$

Comment

$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$ の計算で $x = \tan \theta$ とおくと計算が面倒になる. 同様に $\int x\sqrt{1-x^2} dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ などは $1-x^2 = t$, $1+x^2 = t$ とおいたほうが速い.

練習 10

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$, $J = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin t dt$ とする. このとき $y = f(x) = \sin 2x$ と $y = \frac{1}{2} \sin t$ のグラフを描き, $I = J$ となることを説明してみよう. (33 頁)



x の区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ を n 等分し 分点を $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = \frac{\pi}{2}$, その幅 $\Delta x = \frac{\pi}{2n} = h$ とおく. さらに $g(x) = 2x$, $t_k = g(x_k) = 2x_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) とおくと, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \pi$ となり $\{t_k\}$ は t の区間 $[0, \pi]$ を n 等分し その分割の幅は $\Delta t = 2\Delta x = 2h$ となる. このとき 小長方形の和をそれぞれ考えて I_n, J_n とおくと,

$$\begin{cases} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin 2x_k \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} \sin x_k \times h, \\ J_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sin t_k \Delta t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sin 2x_k \times (2h) \end{cases}$$

すなわち $I_n = J_n$ となる. ここで「 $h \rightarrow 0$ 」としたとき, 「 $I_n \rightarrow I$, $J_n \rightarrow J$ 」だから

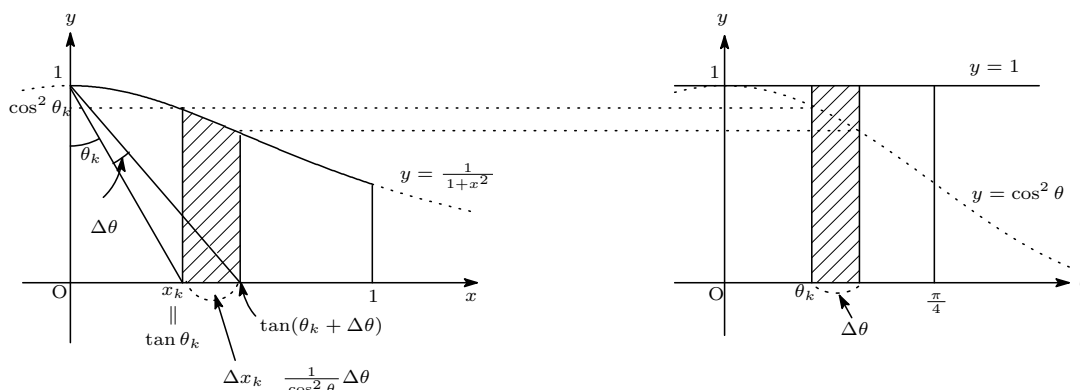
$$I = \lim_{h \rightarrow 0} I_n = \lim_{h \rightarrow 0} J_n = J$$

Comment

$g(x) = 2x$ は 1 次関数なので, Δx が大きいときでも「 $I_n = J_n$ 」という関係は「正確に」成り立つ. しかし一般の $g(x)$ のときは「 $I_n = J_n$ 」となり I_n と J_n はほぼ等しい. しかし $\Delta x \rightarrow 0$ の極限では I_n と J_n は等しくなる.

練習 11

$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ で $x = g(\theta) = \tan \theta$ とおくと $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ のグラフとそれを $\theta - y$ の関係に直した $y = f(g(\theta))$ および $y = f(g(\theta))g'(\theta)$ のグラフを描き、同様の考察をしてみよう。(33 頁)



$f(g(\theta)) = f(\tan \theta) = \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sec^2 \theta} = \cos^2 \theta$, $g'(\theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, $\therefore f(g(\theta))g'(\theta) = \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1$.
 θ の区間 $[0, \frac{\pi}{4}]$ を n 等分し, 分点を $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \frac{\pi}{4}$, 分割の幅を $\Delta \theta = \frac{\pi}{4n}$ とおく.
 さらに $x_k = g(\theta_k)$ とおくと $\{x_k\}$ は x の区間 $[0, 1]$ を n 個の区間に分けるが, その幅は均等ではなく,
 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Delta \theta$ ($k = 1, 2, \dots, n$). このとき, 左上図の斜線部分の面積を δI_k , 右上図の斜線部分の面積を δJ_k とおく

$$\begin{cases} \delta I_k = \cos^2 \theta \cdot \Delta x = \Delta \theta \\ \delta J_k = 1 \cdot \Delta \theta = \Delta \theta \end{cases}$$

$\delta I_k = \delta J_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) となるので

$$\sum_{k=1}^n \delta I_k = \sum_{k=1}^n \delta J_k \iff \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(x_k)^2} \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta \theta$$

ここで「 $\Delta \theta \rightarrow 0$ 」としたとき, それぞれの和は積分に変わり, 「 $\iff$ 」は「 $=$ 」に変わるの

$$\lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \delta I_k = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \delta J_k \iff \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \quad \left(= \frac{\pi}{4} \right)$$

練習 12

$C: y = f(x) = 2x^3 + ax + b$ と $l: y = g(x) = px^2 + qx + r$ が x 座標が $x = 1$ の点 P で接し, $x = 3$ の点 Q で交わっている. このとき, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ. ただし, a, b, p, q, r は実数とする.(37 頁)

$f(x) - g(x) = 0$ の 3 つの解は, $x = 1$ (重解), $x = 3$ だから, x^3 の係数も考えると

$$f(x) - g(x) = 2x^3 + ax + b - (px^2 + qx + r) = 2(x-1)^2(x-3) \quad \dots \textcircled{1}$$

$1 < x < 3$ では $(x-1)^2(x-3) < 0$ だから, 求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^3 \{-2(x-1)^2(x-3)\} dx = \int_0^3 \left\{ \frac{-2(x-1)^3}{3} \right\}' (x-3) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(x-1)^3(x-3) \right]_1^3 + \int_1^3 \frac{2}{3}(x-1)^3 dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \left[(x-1)^4 \right]_1^3 = \frac{8}{3} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

練習 13

$0 \leq x < 3\pi$ で定義される 2 つの関数 $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = a - \cos x$ があり, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は接しているという. このとき, a の値と, $y = f(x), y = g(x)$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ. ただし, a は正の定数とする.(37 頁)

接点の x 成分を $x = t$ とおくと

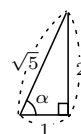
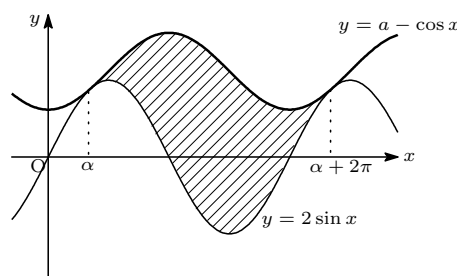
$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sin t = a - \cos t \\ 2\cos t = \sin t \end{cases} \quad \dots \textcircled{1} \quad \dots \textcircled{2}$$

② より $\tan t = 2$. このとき $\sin t = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ (複合同順). これを ① へ代入して

$$a = 2\sin t + \cos t = 2 \cdot \left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}} \right) + \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \pm \sqrt{5}$$

$a > 0$ だから

$$a = \sqrt{5} \quad \dots (\text{答})$$



$\tan t = 2$ かつ $\sin t > 0$ をみたす t は, $0 \leq t < 3\pi$ の区間に 2 つある. このうち $[0, \pi]$ に含まれる t の値を α とおくと, 図より $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. $a = \sqrt{5}$ だから

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 2\sin x + \cos x - \sqrt{5} = \sqrt{5} \left\{ \sin x \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right\} - \sqrt{5} \\ &= \sqrt{5} \{ \sin x \cdot \sin \alpha + \cos x \cos \alpha \} - \sqrt{5} = \sqrt{5} \{ \cos(x - \alpha) - 1 \} \end{aligned}$$

よって $0 \leq x < 3\pi$ のとき $f(x) - g(x) \leq 0$ で等号は $x = \alpha, \alpha + 2\pi$ のとき成り立つから, 求める面積は

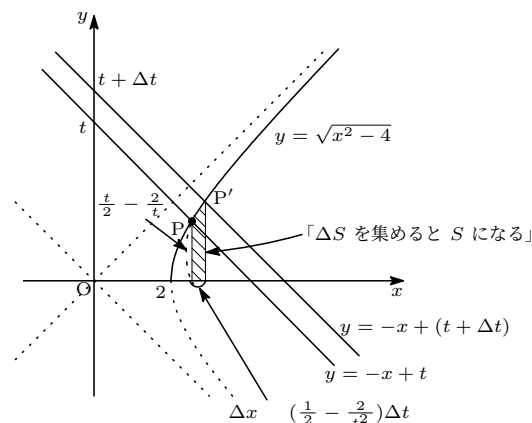
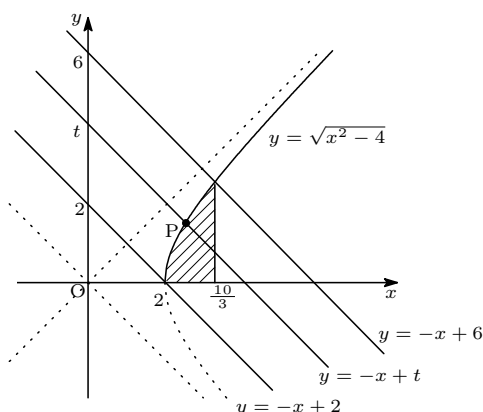
$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \{ \sqrt{5} - \cos x - 2\sin x \} dx = \left[\sqrt{5}x - \sin x + 2\cos x \right]_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \\ &= \left\{ \sqrt{5}(\alpha + 2\pi) - \sin(\alpha + 2\pi) + 2\cos(\alpha + 2\pi) \right\} - (\sqrt{5}\alpha - \sin \alpha + 2\cos \alpha) = 2\sqrt{5}\pi \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

練習 14

双曲線 $C: x^2 - y^2 = 4$ と 直線 $l: y = -x + t$ ($t \neq 0$) の交点を P とする.

(1) P の座標を t の式で表せ.

(2) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ と x 軸, 直線 $x = \frac{10}{3}$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ. (48 頁)



(1) l と C の式を連立すると

$$x^2 - (-x + t)^2 = 4 \iff x = \frac{t^2 + 4}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{2}{t}$$

これを $y = -x + t$ へ代入して, P の座標は

$$P\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}, \frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right) \quad \dots (\text{答})$$

(2) $x = \frac{t}{2} + \frac{2}{t} = \frac{10}{3}$ とおくと

$$3t^2 - 20t + 12 = 0 \iff t = \frac{2}{3}, t = 6$$

$y \geq 0$ より $t^2 \geq 4$ だから $t = 6$. よって $x = \frac{t}{2} + \frac{2}{t}$ とおくと $dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t^2}\right) dt$, $\frac{x}{t} \begin{matrix} 2 \rightarrow \frac{10}{3} \\ 2 \rightarrow 6 \end{matrix}$.

$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_2^{\frac{10}{3}} y dx = \int_2^{\frac{10}{3}} \left(\frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t^2}\right) dt \\ &= \int_2^{\frac{10}{3}} \left(\frac{t}{4} - \frac{2}{t} + \frac{4}{t^3}\right) dt = \left[\frac{t^2}{8} - 2 \log |t| - \frac{2}{t^2}\right]_2^{\frac{10}{3}} = \frac{40}{9} - 2 \log 3 \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

Comment

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は $(0, t)$ を通り 漸近線と平行な直線 $l: y = \pm \frac{b}{a}x + t$ の交点を考えることにより, t の分数式でパラメータ表示できる. そしてこれを使って, 双曲線に関する面積を求められる場合がある. ちなみに $S = \int_2^{\frac{10}{3}} \sqrt{x^2 - 4} dx$ を計算するとき, $x = \frac{2}{\cos \theta}$ とおく方法もあるが, 計算が大変になる.

【参考】

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \log |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C, \quad \int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - 1} - \log |x + \sqrt{x^2 - 1}|) + C$$

が成り立つ. (微分してみてください. また最初の式に部分積分を使って 2 番目の式を導くこともできる.) これを使うとさらに速く計算できる. しかし双曲線のパラメータ表示の方が応用範囲が広い.

練習 15

$$C: \begin{cases} x = -\sin \theta + \cos \theta \\ y = \sin \theta + 2 \cos \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ で囲まれる領域の面積を求めよ. (48 頁)}$$

$x(\theta) = -\sin \theta + \cos \theta, y(\theta) = \sin \theta + 2 \cos \theta$ とおくと

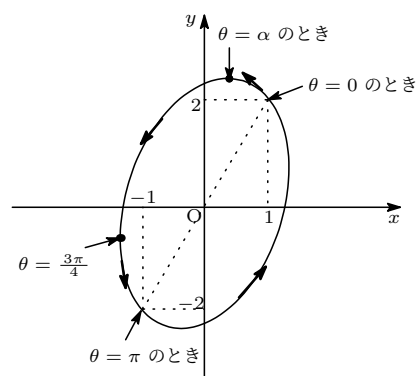
$$\begin{cases} x(\theta + \pi) = -\sin(\theta + \pi) + \cos(\theta + \pi) = -(-\sin \theta + \cos \theta) = -x(\theta) \\ y(\theta + \pi) = \sin(\theta + \pi) + 2 \cos(\theta + \pi) = -(\sin \theta + 2 \cos \theta) = -y(\theta) \end{cases}$$

よって点 $P(x(\theta), y(\theta))$ と点 $P'(x(\theta + \pi), y(\theta + \pi))$ は原点に関し対称となるので, $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で増減を調べればよい.

$$\frac{dx}{d\theta} = -\cos \theta - \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - 2 \sin \theta.$$

ゆえに $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ となる第1象限の角を α とおくと増減は次のようになり, 原点に関する対称性も考えると C の概形は次のようになる.

θ	0	...	α	...	$\frac{3\pi}{4}$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		-	-	-	0	+	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	-	-	
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\nwarrow$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$	$\swarrow$	$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$



ゆえに $P(x(\theta), y(\theta))$ は反時計回りに C を一周するので, 求める面積は

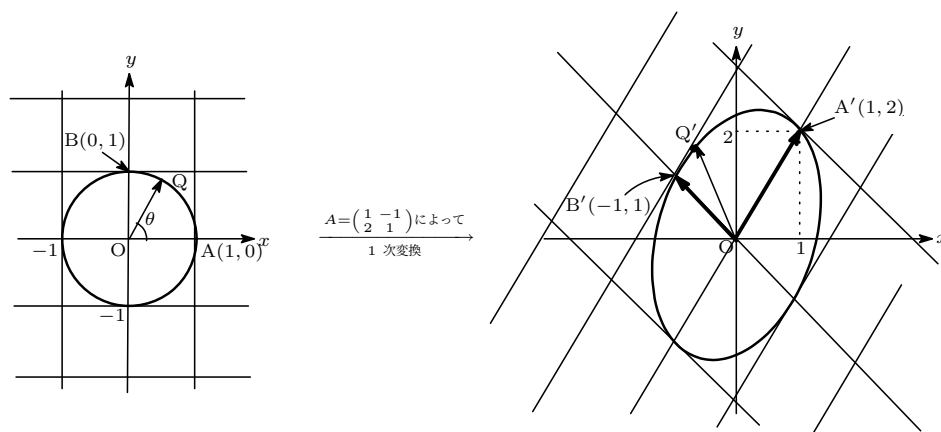
$$\begin{aligned} S &= - \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin \theta + 2 \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \{ \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta \cos \theta \} d\theta = \int_0^{2\pi} \{ \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta \} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) + (1 + \cos 2\theta) \right\} d\theta = \left[\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 3\pi \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

【別解】(1次変換の利用)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta + \cos \theta \\ \sin \theta + 2 \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

よって単位円上の点 $Q(\cos \theta, \sin \theta)$ を行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって1次変換した点が P となる. 一般に $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき, A によって移された図形の面積は元の図形の $|ad - bc|$ 倍に移るので, C で囲まれた面積は

$$S = |1 \times 1 - (-1) \times 2| \times (\text{単位円の面積}) = 3\pi \quad \dots (\text{答})$$

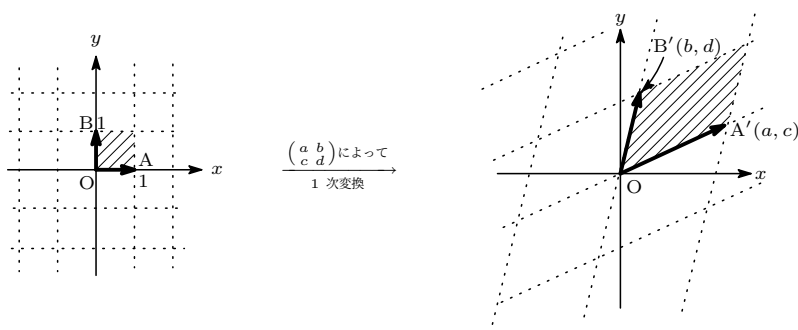
**Comment**

一般に $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき, M によって移された図形の面積は 元の図形の面積の $|ad - bc|$ 倍になる.

【証明】 $A(1,0), B(0,1)$ としたとき, M による A, B の像は, それぞれ $A'(a, c), B'(b, d)$. よって $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}$ で張られる平行四辺形の面積 S'_0 は

$$S'_0 = |ad - bc|$$

一方 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で張られる正方形の面積は 1 だから, 左図の正方形の格子 1 つの面積と, 右側の平行四辺形の格子 1 つの面積の比は $1 : |ad - bc|$ になる. よって「1 次変換の線形性」より全ての図形の面積は $|ad - bc|$ 倍になる. (Q.E.D.)



以前求めた閉曲線の囲む面積も同様に求めることができます.

$$C : \begin{cases} x = \sin \theta - \cos \theta \\ y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta + 3 \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

によって囲まれる領域の面積 S を求めよ. (42 頁)

平行移動では面積は変わらないので,

$$C' : \begin{cases} x = \sin \theta - \cos \theta \\ y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

の囲む面積と同じです.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta - \cos \theta \\ \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

よって

$$S = |(-1) \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot 1| \times (\text{単位円の面積}) = (\sqrt{3} + 1)\pi$$

「円を (正則)1 次変換したとき, その像は楕円」ですから, C も C' も, 楕円になっています.

練習 16

$C: \begin{cases} x = \theta(\sin \theta + \cos \theta) \\ y = \theta(\sin \theta - \cos \theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ と 直線 $y = -x$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ. (50 頁)

合成公式より $y = \theta(\sin \theta - \cos \theta) = \theta \cdot \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$. これと角度が同じになるように x の方も $\cos$ で合成すると

$$x = \theta \cdot \sqrt{2} \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \theta \cdot \sqrt{2} \left(\sin \theta \sin \frac{\pi}{4} + \cos \theta \cos \frac{\pi}{4} \right) = \theta \cdot \sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

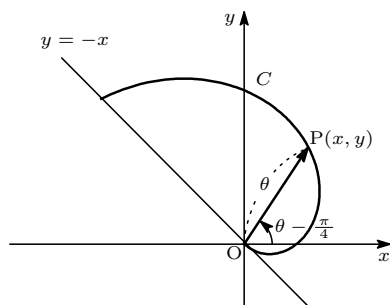
ゆえに

$$\begin{cases} x = \theta \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \\ y = \theta \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \quad \text{ただし, } r = \theta, \phi = \theta - \frac{\pi}{4}$$

と極表示されました. 「半径 r , 中心角 $\delta\phi$ の微小扇形の面積を δS とすると $\delta S = \frac{1}{2} r^2 \delta\phi$ 」であり, また

$$d\phi = d\theta, \quad \frac{\phi}{\theta} \left| \begin{array}{cc} -\frac{\pi}{4} & \rightarrow \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \rightarrow \pi \end{array} \right.$$

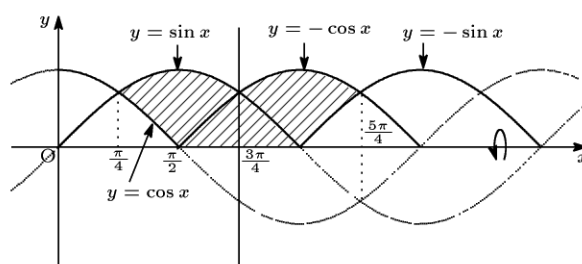
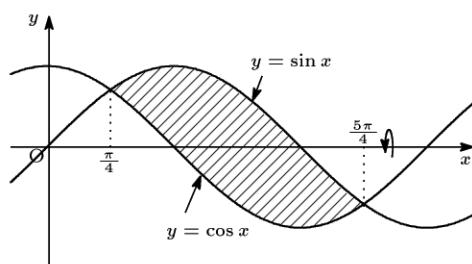
$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r^2 d\phi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \theta^2 d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} \quad \dots (\text{答})$$

**Comment**

x の方の角と y の方の角が常に等しくなるわけではありません. この問題では「等しくなるかな?」と予測をつけて, それが「当たった」と言う感じです.

練習 17

$y = \sin x$ と $y = \cos x$ で囲まれる 1 つの領域を x 軸の周りに回転した立体の体積を求めよ. (55 頁)



左上図の斜線部分を回転させた立体の体積を求めればよい. $y = \sin x$ と $y = \cos x$ の 左上図の交点の x 成分を求める. 連立して

$$\sin x = \cos x \iff x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

次に $y = \sin x, y = \cos x$ の x 軸より下側の部分を折り返して 右の図を得る. 左上図の斜線部分を x 軸の周りに回転させた立体の体積 V は, 右上図の斜線部分を x 軸の周りに回転させた立体の体積と等しい. 右の斜線部分は 直線 $x = \frac{3\pi}{4}$ に関し対称だから, 求める体積を V とすると,

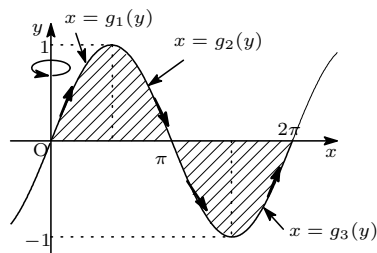
$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \left\{ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \right\} \times 2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos 2x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ゆえに

$$V = \pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{3}{2} \pi \quad \dots (\text{答})$$

練習 18

$y = f(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) と x 軸 で囲まれる部分を y 軸の周りに回転した立体の体積 V を求めよ. (61 頁)



y 軸の周りの回転体 (パラメータ表示) の体積は, 公式としては挙げてないので, y に関する積分から変換してみる. (次の頁では 直接 区分求積法から求めています.) $[0, \frac{\pi}{2}]$ の区間に対応する曲線を $x = g_1(y)$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ の区間に対応する曲線を $x = g_2(y)$, $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ の区間に対応する曲線を $x = g_3(y)$ とおくと,

$$V = -\pi \int_0^1 \{g_1(y)\}^2 dy + \pi \int_0^1 \{g_2(y)\}^2 dy - \pi \int_{-1}^0 \{g_2(y)\}^2 dy + \pi \int_{-1}^0 \{g_3(y)\}^2 dy \quad \dots \textcircled{1}$$

$y = \sin x$ とおくと, $dy = \cos x dx$, $x = g_1(y)$ のときは $\frac{y}{x} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & 1 \\ 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \end{matrix}$, $x = g_2(y)$ のときは $\frac{y}{x} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & 1 \\ \pi & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \end{matrix}$, $\frac{y}{x} \begin{matrix} -1 & \rightarrow & 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \rightarrow & \pi \end{matrix}$, $x = g_3(y)$ のときは $\frac{y}{x} \begin{matrix} -1 & \rightarrow & 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \rightarrow & 2\pi \end{matrix}$ だから

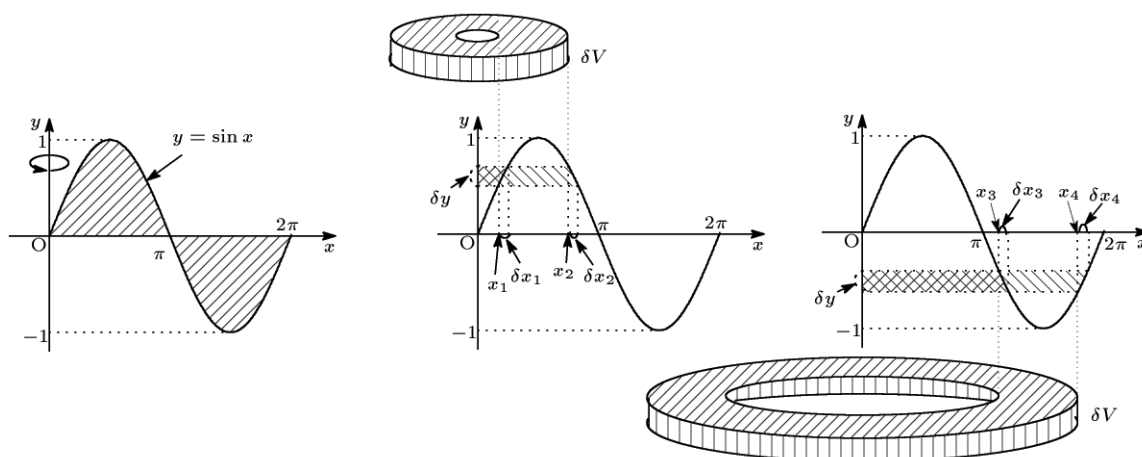
$$\begin{aligned} V &= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x dx) + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 (\cos x dx) - \pi \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} x^2 (\cos x dx) + \pi \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x^2 (\cos x dx) \\ &= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x dx) - \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 (\cos x dx) + \pi \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} x^2 (\cos x dx) + \pi \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x^2 (\cos x dx) \\ &= -\pi \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx + \pi \int_{\pi}^{2\pi} x^2 \cos x dx \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

今度は1つにまとまりませんが, これは $x = \pi$ を境に「時計回り」から「反時計回り」に $y = f(x)$ のグラフが変わるためです. 部分積分で

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= \int x^2 (\sin x)' dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx \\ \int x \sin x dx &= \int x (-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C \\ \therefore \int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \end{aligned}$$

従って

$$V = -\pi \left[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \right]_0^{\pi} + \pi \left[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \right]_{\pi}^{2\pi} = 2\pi^2 + 6\pi^2 = 8\pi^2 \quad \dots (\text{答})$$



【参考】 区分求積法を使うと、次のようになる。

y の区間 $[-1, 1]$ を n 等分して その長さを δy ($\delta t > 0$), x の区間 $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ 上に x_1, x_2, x_3, x_4 , ならびに 正の微小量 $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4$ を図のようにとる. このとき $[0, \frac{\pi}{2}], [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ では $f(x)$ は増加, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ では $f(x)$ は減少するので,

$$\delta y = f'(x_1)\delta x_1, \quad \delta y = f'(x_2)(-\delta x_2), \quad \delta y = f'(x_3)(-\delta x_3), \quad \delta y = f'(x_4)\delta x_4$$

よって y が δy 増加したときの体積の増加量を δV とすると, $0 \leq y \leq 1$ の区間では

$$\begin{aligned} \delta V &= \pi\{(x_2)^2 - (x_1)^2\}\delta y = \pi(x_2)^2 f'(x_2)(-\delta x_2) - \pi(x_1)^2 f'(x_1)\delta x_1 \\ &= -\pi\{(x_1)^2 f'(x_1)\delta x_1 + (x_2)^2 f'(x_2)\delta x_2\} = -\pi\{(x_1)^2 \cos x_1 \delta x_1 + (x_2)^2 \cos x_2 \delta x_2\} \end{aligned}$$

$-1 \leq y \leq 0$ の区間では

$$\begin{aligned} \delta V &= \pi\{(x_4)^2 - (x_3)^2\}\delta y = \pi(x_4)^2 f'(x_4)\delta x_4 - \pi(x_3)^2 f'(x_3)(-\delta x_3) \\ &= \pi\{(x_3)^2 f'(x_3)\delta x_3 + (x_4)^2 f'(x_4)\delta x_4\} = \pi\{(x_3)^2 \cos x_3 \delta x_3 + (x_4)^2 \cos x_4 \delta x_4\} \end{aligned}$$

ゆえに $0 \leq y \leq 1$ の範囲で δV を集めると

$$\sum \delta V = -\pi \sum \{(x_1)^2 \cos x_1 \delta x_1 + (x_2)^2 \cos x_2 \delta x_2\} \xrightarrow{\delta y \rightarrow 0} -\pi \int_0^\pi x^2 \cos x dx$$

$-1 \leq y \leq 0$ の範囲で δV を集めると

$$\sum \delta V = \pi \sum \{(x_3)^2 \cos x_3 \delta x_3 + (x_4)^2 \cos x_4 \delta x_4\} \xrightarrow{\delta y \rightarrow 0} \pi \int_\pi^{2\pi} x^2 \cos x dx$$

よって求める体積 V は,

$$V = -\pi \int_0^\pi x^2 \cos x dx + \pi \int_\pi^{2\pi} x^2 \cos x dx \quad (\text{以下略})$$

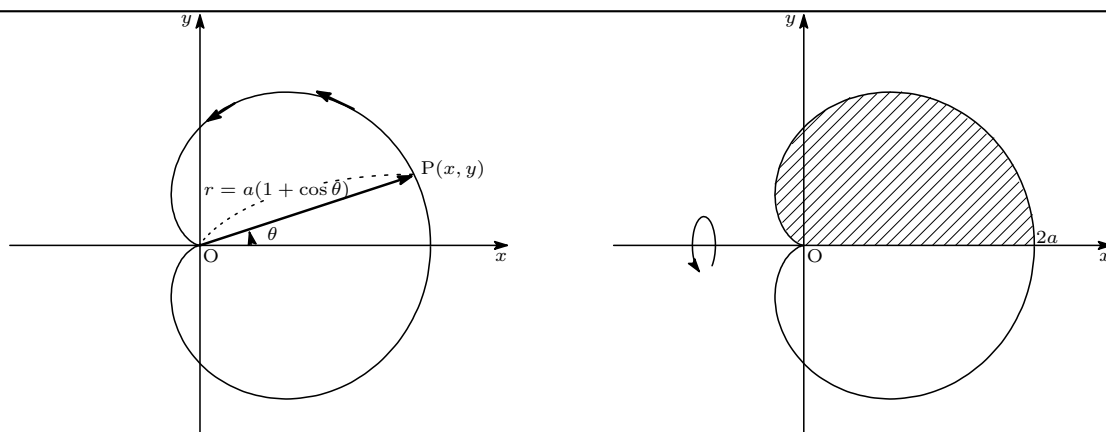
【別解】

「発展編」でやる「バームクーヘン分割」を使うと、速くできる. このとき

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx + 2\pi \int_\pi^{2\pi} x(-\sin x) dx = 8\pi^2$$

練習 19

極表示された曲線 $C : r = a(1 + \cos \theta)$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) で囲まれる領域を x 軸の周りに回転した立体の体積を求めよ。(61 頁)



パラメータ表示に直して求めてみます.

$r(\theta) = a(1 + \cos \theta)$ とすると $r(-\theta) = a(1 + \cos(-\theta)) = a(1 + \cos \theta) = r(\theta)$ だから, C は x 軸に関して対称. よって 図の斜線部分を x 軸の周りに回転した立体の体積を求めればよい. また「体積比は相似比の3乗」だから, $a = 1$ のときの面積を求めてそれを a^3 倍すれば V となる. $a = 1$ のとき曲線上の点を $P(x, y)$, その偏角を θ とすると,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = (1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases} \quad \therefore \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta (1 + 2 \cos \theta)$$

θ が増加するとき, $P(x, y)$ は C を「反時計回り」に回るので, 求める体積を V とおくと

$$\begin{aligned} \frac{V}{a^3} &= - \int_0^\pi \pi y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta = \pi \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \sin \theta (1 + 2 \cos \theta) d\theta \\ &= \pi \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 (1 - \cos^2 \theta) (1 + 2 \cos \theta) (-\cos \theta)' d\theta \end{aligned}$$

$\cos \theta = t$ とおくと $-\sin \theta d\theta = dt$, $\frac{\theta}{t} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & \pi \\ 1 & \rightarrow & -1 \end{matrix}$. よって

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi a^3} &= \int_1^{-1} (1+t)^2 (1-t^2) (1+2t) (-dt) = \int_{-1}^1 (-2t^5 - 5t^4 - 2t^3 + 4t^2 + 4t + 1) dt \\ &= 2 \int_0^1 (-5t^4 + 4t^2 + 1) dt = 2 \left[-t^5 + \frac{4}{3}t^3 + t \right]_0^1 = 2 \left(-1 + \frac{4}{3} + 1 \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

ゆえに

$$V = \pi a^3 \times \frac{8}{3} = \frac{8\pi}{3} a^3 \quad \dots (\text{答})$$

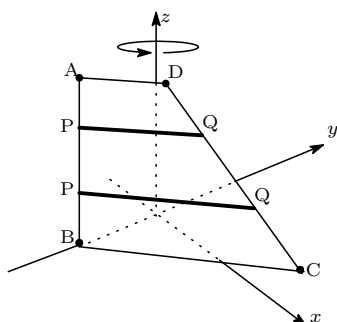
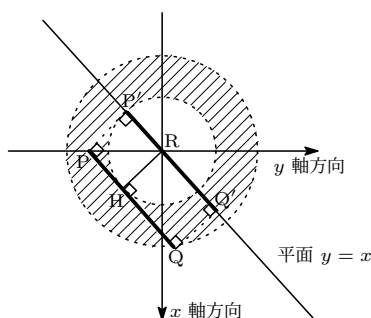
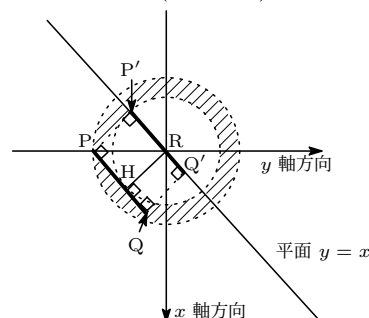
Comment

この曲線 C は「カージオイド (心臓形)」と呼ばれる有名な曲線です. なお, 極表示のままでもできますが, やや難しいので此处では省略します. 注1)

注1) 興味のある人は「好きになる数学入門 - 微分法を応用する」宇沢弘文著, 岩波書店」の第100頁を見てください.

練習 20

xyz 空間内に台形 ABCD があり, $A(0, -2, 4), B(0, -2, 0), C(3, 1, 0), D(1, -1, 4)$ とする. この台形を z 軸の周りに回転した立体 E の体積 V を求めよ. (70 頁)

【平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 2$) 上】【平面 $z = t$ ($2 \leq t \leq 4$) 上】

平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 4$) と辺 AB, CD, z 軸 との交点をそれぞれ点 P, Q, R, 点 P, Q から平面 $x = y$ に下ろした垂線の足をそれぞれ点 P', Q', また R から直線 PQ に下ろした垂線の足を点 H とする. 点 A, B, C, D は全て平面 $y = x - 2$ 上に有るので, 点 H の成分は左下図から $H(1, -1, t)$. よって H は点 D を通り z 軸に平行な直線上にある. 台形 ABCD の概形は下図のようになるので $t = 2$ を境に $\overline{HP}$ と $\overline{HQ}$ の大小が変わることが分かる. 平面 $z = t$ による立体の断面積を $S(t)$ とすると,

(i) $0 \leq t \leq 2$ のとき, $\overline{HQ} \geq \overline{HP}$ だから

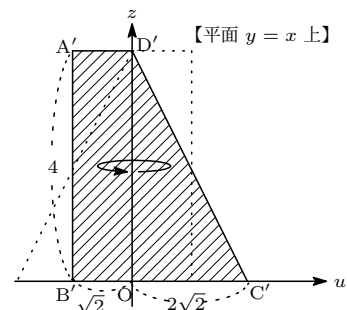
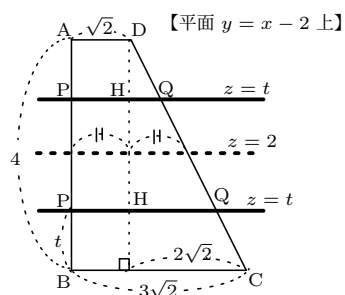
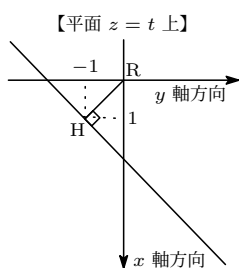
$$S(t) = \pi(\overline{RQ}^2 - \overline{RH}^2) = \pi\overline{HQ}^2 (= \pi(\overline{RQ}')^2) = \pi\left(2\sqrt{2} \cdot \frac{4-t}{4}\right)^2 = \pi \cdot \frac{(4-t)^2}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

(ii) $2 \leq t \leq 4$ のとき, $\overline{HP} \geq \overline{HQ}$ だから

$$S(t) = \pi(\overline{RP}^2 - \overline{RH}^2) = \pi\overline{HP}^2 (= (\overline{RP}')^2) = 2\pi \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, 求める体積は

$$V = \int_0^4 S(t) dt = \int_0^2 \frac{\pi}{2} (4-t)^2 dt + \int_2^4 2\pi dt = \frac{28}{3}\pi + 4\pi = \frac{40}{3}\pi \quad \dots (\text{答})$$

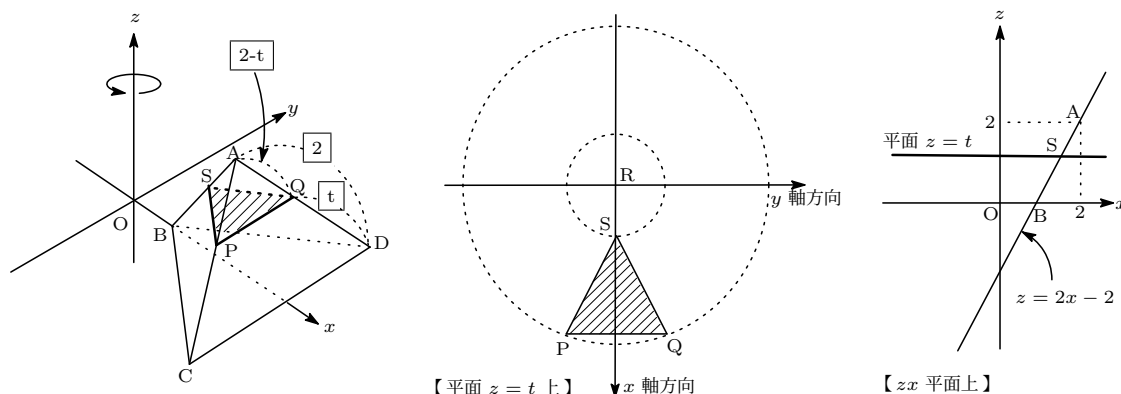


【別解】 台形 ABCD は平面 $y = x - 2$ 上に有るので, A, B, C, D を平面 $y = x$ に正射影した点を A', B', C', D' とすると, ①, ② で 「 $S(t) = \pi(\overline{RQ}')^2$, $S(t) = (\overline{RP}')^2$ 」 より, 台形 $A'B'C'D'$ を z 軸の周りに回転した立体 E' の断面積は $S(t)$ と等しい. ゆえに, E の体積 V は E' の体積 V' と等しい. したがって

$$V = V' = \frac{1}{3} \cdot \pi(\sqrt{2})^2 \cdot 2 \cdot 7 + \pi(\sqrt{2})^2 \cdot 2 = \frac{40}{3}\pi \quad \dots (\text{答})$$

練習 21

xyz 空間内に四角すい $ABCD$ があり, $A(2, 0, 2), B(1, 0, 0), C(3, -1, 0), D(3, 1, 0)$ とする. この四角すいを z 軸の周りに回転した立体 E の体積 V を求めよ. (71 頁)



平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 2$) と辺 AC, AD, AB, z 軸との交点をそれぞれ点 P, Q, S, R とし, 平面 $z = t$ による E の切り口の面積を $S(t)$ とする. 平面 $z = t$ 上で z 軸からの距離の最大値は $\overline{RP} = \overline{RQ}$, 最小値は $\overline{RS}$ だから

$$S(t) = \pi \left\{ (\overline{RQ})^2 - (\overline{RS})^2 \right\} \quad \dots ①$$

点 A , 点 B は zx 平面で直線 $z = 2x - 2$ 上に有るので (右上の図), $S(x, y, z)$ とすると

$$z = 2x - 2$$

S の z 成分は $z = t$ だから

$$t = 2x - 2 \iff x = \frac{t+2}{2}. \quad \therefore S \left(\frac{t+2}{2}, 0, t \right) \quad \dots ②$$

一方, 「 A の z 成分は 2 , Q の z 成分は t 」だから Q は線分 AD を $[2-t] : [t]$ に内分する. よって

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{t}{(2-t)+t} \overrightarrow{OA} + \frac{2-t}{(2-t)+t} \overrightarrow{OD} = \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2-t}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6-t}{2} \\ \frac{2-t}{2} \\ t \end{pmatrix} \quad \dots ③$$

①, ②, ③ より

$$S(t) = \pi \left\{ (\overline{RQ})^2 - (\overline{RS})^2 \right\} = \pi \left\{ \left(\frac{6-t}{2} \right)^2 + \left(\frac{2-t}{2} \right)^2 - \left(\frac{2+t}{2} \right)^2 \right\} = \pi \left\{ \frac{(6-t)^2}{4} - 2t \right\}$$

ゆえに求める体積は

$$V = \int_0^2 S(t) dt = \pi \int_0^2 \left\{ \frac{(6-t)^2}{4} - 2t \right\} dt = \frac{26}{3} \pi \quad \dots (\text{答})$$

Comment

もちろん S の成分も内分の公式を使って求めることもできる.

第II部

発展編

この章では、区分求積で考えるときに、等間隔に区切るので、今までのように $\delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta x = \max(\delta x_k)$ と定めるのではなく、 $\Delta x = \max(\delta x_k) = \delta x_k = x_{k+1} - x_k$ と定めます。そして x が独立変数のとき、 $\Delta x > 0$ に取ることにし、 $\Delta x < 0$ の場合の説明は省略します。また断らない限り関数は全て連続関数とします。さらに被積分関数はすべて連続な関数とします。(たとえば $x = g(u)$ と置換して積分するときは $g'(u)$ も連続関数とします。)

さて、今までの章では割と基本的なこと(大学にいても忘れてほしくないこと)について書いてきました。この章では、おそらく日本の高校生しか知らないと思われる入試のための特別なテクニックについても説明します。(もしかしたら台湾や韓国や中国の受験生も知っているかも?) とくに「極表示された曲線の接線、法線の描く面積」、「傘型分割」についてはかなり特殊なテクニックといえます。ただし、次の章(「微小量」)に関しては、特殊な内容ではなく大学でも、もっと厳密な証明付で学びます。しかし「バームクーヘン分割」、「ショートケーキ分割」、「軸と垂直でない断面積の応用」などは、結局は「立体をいかに分割するか?」ということで、大学で習う**一個の重要定理**(「重積分の変数変換の定理」)のいろいろな応用です。すなわち、これらの公式は、大学に入れば「発展解消」すべきものです。(方程式を習ったら「つるかめ算」を忘れても大丈夫!) ただし、この公式を使っているいろいろな問題を解くときに「空間の直線の使い方」、「正射影の求め方」、「円錐の方程式」、「断面図の使い方」など「**空間で方程式を使っているいろいろな図形を調べること**」について学びます。そして何よりも「**細かく切って(微分して)集めるという積分の感覚**」を身に着けます。これらは、真の**底力**のようなもので、代数における「方程式を解く能力」のようなものです。大学でも役に立ちます。公式そのものではなく、これらの底力をつけてほしいと思います。

第6章 微小量(無限小)

6.1 定義

まず、微小量を扱う時にとても便利な記号を説明します。

$x \rightarrow 0$ のとき、それにつれて y も 限りなく 0 に近づくとき y を微小量(無限小)といいます。^{注1)} さらに α, β がともに微小量で、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$ のとき、 β は α より **高位の微小量** といって $\beta = o(\alpha)$ と書きます。また、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = k$ (ただし k は有限な任意の「0 でない」実数) のとき、 β は α と **同位の微小量** といいます。 β が α と **同位または高位の微小量** のとき $\beta = O(\alpha)$ と書きます。^{注2)}

例えば $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$ ですから、 x^2 は x より高位の微小量です。また、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \neq 0$ ですから $\sin \theta$ は θ と同位の微小量です。さらに、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$ ですから、 $1 - \cos \theta$ は θ^2 と同位の微小量。ところが、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \cdot \theta = 0$ ですから、 $1 - \cos \theta$ は θ より高位の微小量です。記号でかくと、

$$x^2 = o(x), \quad \sin \theta = O(\theta), \quad 1 - \cos \theta = O(\theta^2), \quad 1 - \cos \theta = o(\theta)$$

6.2 連続性と微小量

$y = f(x)$ が $x = a$ において連続のとき Δx と $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ の関係を調べます。連続の定義より^{注3)} 「 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき、 $\Delta y \rightarrow 0$ 」ですが $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ とは限りません。例えば

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{\pi}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{とすると } |\sin \theta| \leq 1 \text{ より } \left| \sqrt{|x|} \sin \frac{\pi}{x} \right| \leq \sqrt{|x|} \text{ ですからハサミ}$$

ウチより $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ となり、「 $f(x)$ は $x = 0$ において連続」です。しかし

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sqrt{h} \sin \frac{\pi}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{h}} \sin \frac{\pi}{h}$$

この極限は存在しないので^{注4)} $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ の値は定まりません。それどころか $\Delta x \rightarrow 0$ のとき無限大にも、無限小にもなることができます。言い換えれば Δy は Δx に全く制御されていません。

注1) 変数は x でなく、 t でも θ でも大丈夫です。

注2) 「 β は α より小さい / 同じくらいの微小量」という感じ。 o や O は アルファベットの ' o ',' O ' で、order(順位) の略です。微小量にも順位 (order) があるという感じです。正確なたとえではありませんが、細菌は小さいですがウィルスよりは大きいので、ウィルス = o (細菌)。さらに、DNA はウィルスより小さいから、DNA = o (ウィルス)。しかし、ウィルスと細胞は同じくらいに小さいのでウィルス = O (細胞)。このとき、細胞 = O (ウィルス)。

また、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = k (\neq 0)$ のときは、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{k} (\neq 0)$ ですから、 α と β が同位の微小量ならば、 β と α も同位の微小量です。

注3) 連続の定義は $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

注4) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{\pi}{x}$, $\{a_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ とすれば $g(a_n) = \sqrt{n} \sin n\pi = 0$. しかし $\{b_n\} = \{\frac{2}{5}, \frac{2}{9}, \frac{2}{13}, \dots, \frac{2}{4n+1}, \dots\}$ とすれば $g(b_n) = \sqrt{2n + \frac{1}{2}} \sin (2n + \frac{1}{2})\pi = \sqrt{2n + \frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. そして $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ だから、 x が 0 に近づくとき $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{\pi}{x}$ の値は定まらず 極限は存在しない。

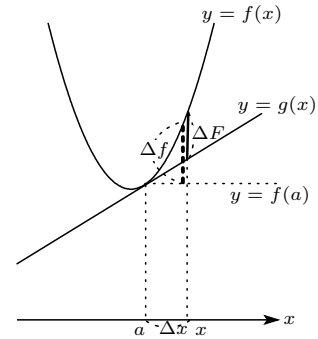
6.3 微分と微小量(その1)

さて, $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能のとき,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

ゆえに, $f'(a) \neq 0$ のとき, Δy と Δx は同位の微小量です. また $f'(a) = 0$ のときは Δy は Δx より高位の微小量です. まとめて書くと

$$\Delta y = O(\Delta x)$$



次に $x = a$ における接線を $y = g(x)$ とし, $F(x) = f(x) - g(x)$ とおくと,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \{f(a) + f'(a)(x - a)\}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right\} = 0$$

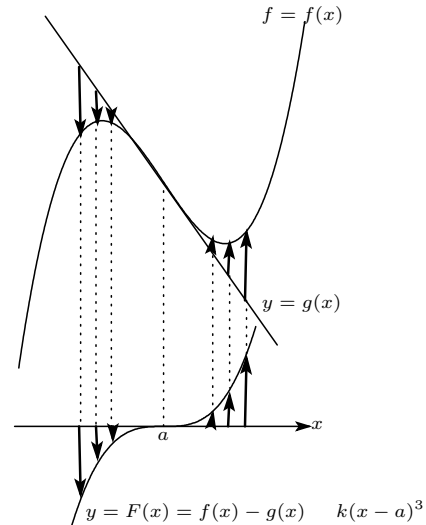
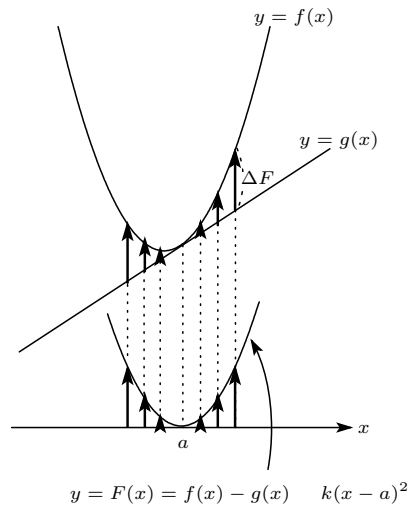
よって, ΔF は Δx より高位の微小量です. このように $f(x)$ が $x = a$ で微分可能のときは Δy は Δx で完全に制御されています. 注5)

6.4 【参考】高階微分と微小量(Taylor展開)

【参考】 $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ は $(x - a)$ より高位の微小量ですが, 実は $f''(a)$ が存在して $f''(a) \neq 0$ のときは $(x - a)^2$ と同位の微小量になります. また $f''(a) = 0$ のときは $(x - a)^2$ より高位の微小量になります.

【 $f''(a) \neq 0$ のとき】

【 $f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0$ (変曲点) のとき】



上の図から,

$$\begin{cases} f''(a) \neq 0 \text{ のとき,} & F(x) = f(x) - f'(a)(x - a) & k(x - a)^2 \quad (k \neq 0) \\ f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0 \text{ のとき,} & F(x) = f(x) - f'(a)(x - a) & k(x - a)^3 \quad (k \neq 0) \end{cases}$$

となっていることが見えます. これは1つの関数でも, a の値によって変わります.

注5) 余り良い喩えではないかも知れませんが「親を見れば子が分かる」と言うことわざのように, Δx の大きさを見れば Δy の大きさも分かってしまいます.

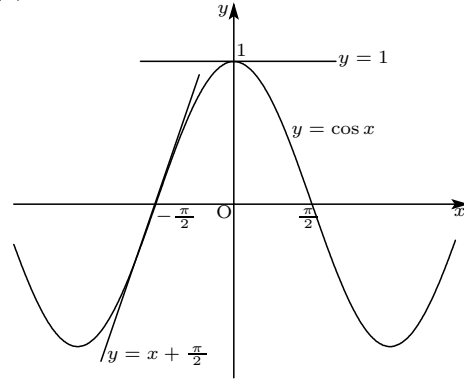
例えば $f(x) = \cos x$ のとき, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$.

よって, $f''(0) = -1 \neq 0$, $f''(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $f'''(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

したがって, $x = 0$ の近くでは, $F(x)$ は 2 次関数,

$x = -\frac{\pi}{2}$ の近くでは, $F(x)$ は 3 次関数で近似されます.

さて, この性質を証明するには, まず平均値の定理の拡張をします.

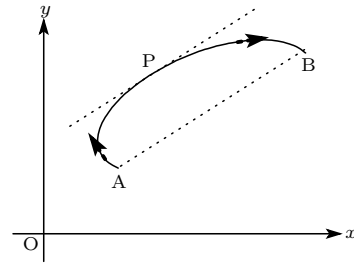


平均値の定理 (拡張版)

$f(x), g(x)$ が $x \leq x \leq b$ において連続, $g(a) \neq g(b)$. $a < x < b$ において微分可能で, かつ $\{f'(x)\}^2 + \{g'(x)\}^2 \neq 0$ とすると,

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する.



曲線 Γ が $x = g(t), y = f(t)$ とパラメーター表示されていて $t = a, t = b, t = c$ のとき それぞれ 点 A, B, P になるとすれば, $\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$ は 直線 AB の傾き, $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ は, 点 P における Γ の接線の傾きを表す. したがって, 上の定理は「曲線 Γ 上を A から B までたどれば, その途中のどこかで直線 AB と接線が平行になる点が存在する」(平均値の定理) を表しています. ちなみに $\{f'(x)\}^2 + \{g'(x)\}^2 \neq 0$ は各点において接線が存在するための条件です.

これを使えば, 次の ロピタルの定理の証明は簡単です.

ロピタルの定理

$f(x), g(x)$ が $x = a$ を含む開区間で微分可能で, かつ $g'(x) \neq 0$ (ただし $x = a$ においては例外で $g'(a) = 0$ であっても良い) とすると,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

注6)

【証明】 $f'(x) \neq 0$ なので, $x > a$ のとき, $a < \eta < x$ となる η が存在して, $f(x) - f(a) = f'(\eta)(x - a)$ だから

$$\frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)} \quad (a < c < x)$$

となる c が存在する. $x \rightarrow a$ のとき $c \rightarrow a$ だから

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \lim_{c \rightarrow a+0} \frac{g'(c)}{f'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$x < a$ のときも同様にして $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ だから

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \quad (\text{Q.E.D.})$$

注6) $g'(a) \neq 0$ のときは, 次の性質が簡単に証明できます. ロピタルの定理はその一般化と考えればよいです.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

これを使うと難しい極限の問題が簡単に解けるので、皆さんも(こっそりと)使ったことがあると思います。例えば

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

さて $f(x)$ が $x = a$ を含んだ開区間で2回微分できるとき, $F(x) = f(x) - f'(a)(x - a)$, $g(x) = (x - a)^2$ としてロピタルの定理を使うと

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f'(a)(x - a)}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x - a)} = \frac{1}{2} f''(a)$$

よって, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x) - f'(a)(x - a)}{(x - a)^2} - \frac{f''(a)}{2} \right\} = 0$ となるので

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o((x - a)^2)$$

すなわち, $f''(a) \neq 0$ のとき, ΔF は $(\Delta x)^2$ と同位の微小量になることが証明されました。

さらに $f(x)$ が $x = a$ を含んだ開区間で3回微分できるとき, $G(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2$, $g(x) = (x - a)^3$ として,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{G(x) - G(a)}{g(x) - g(a)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f'(a)(x - a) - \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2}{(x - a)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x - a)}{3(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - f''(a)}{6(x - a)} = \frac{1}{6} f'''(a) \end{aligned}$$

ゆえに

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 - \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3 = o((x - a)^3)$$

すなわち, $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$ のとき, ΔF は $(\Delta x)^3$ と同位の微小量になることが証明されました。

【参考の'参考'】同様に, $f(x)$ が $x = a$ を含んだ開区間で n 階微分されるとき, その区間に含まれる任意の x に対して, 次の公式が成り立ちます。

Taylor 展開

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + (x - a)^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \cdots + (x - a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o((x - a)^n)$$

例えば $f(x) = e^x$ のとき $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$ ですから, $a = 0$ として

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様にして

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \quad \cdots \textcircled{5}$$

①, ②, ③ は全ての実数 x に対し成り立ちます。④ は $x > -1$ のとき, ⑤ は $x \neq 1$ のときに成り立ちます。⑤ は等比数列の和の公式を使った次の式からも導けます。

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \longrightarrow \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

6.5 微分と微小量(その2)

元に戻って, $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) &\iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - f'(a)\Delta x}{\Delta x} = 0 \\ &\iff \Delta y - f'(a)\Delta x = o(\Delta x) \iff \Delta y = f'(a)\Delta x + o(\Delta x) \end{aligned}$$

逆に $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ となる A が存在すれば, $\Delta y - A\Delta x = \epsilon$ とおくと注7) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\Delta x} = 0$ だから

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \epsilon}{\Delta x} = A$$

よって, $f(x)$ は $x = a$ で微分可能で $f'(a) = A$ です. すなわち

$$y = f(x) \text{ が } x = a \text{ で微分可能} \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \iff \Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

この A は $f'(a)$ と一致します. 注8) よく参考書では

$$\Delta f \approx A\Delta x \text{ (ただし誤差は } \Delta x \text{ より高位の微小量)} \implies \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

または, 単に

$$\Delta f \approx A\Delta x \implies \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

という風に書いてあります. 大学入試のためだけならこのように省略しても大丈夫です. (私も授業では, 面倒なのと時間不足のために, このようによく書きます. (ˉ_ˉ;)) しかし, いろいろな公式を本当に理解するためには**誤差が Δx よりも高位の微小量**というのがとても大切です. f の増加量が Δx とほぼ正比例していて $A\Delta x$ を取った残りが Δx よりも高位の微小量するとき, **微分可能** ということですよ. このとき Δf は完全に Δx で制御されています.

例1 $f(x) = x^2$ のとき $\Delta f = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. $(\Delta x)^2$ は Δx より高位の微小量なので $f'(x) = 2x$.

6.6 様々な例

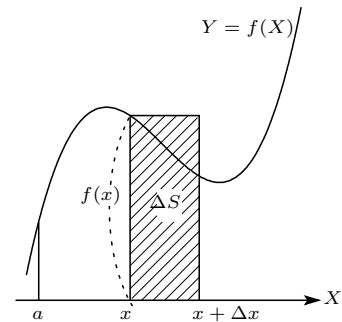
例2 $f(X) > 0$ のとき, $y = f(X)$ と $X = a, X = x$ (ただし $x > a$), $y = 0$ で囲まれる面積 $S(x)$ を考えてみましょう. 普通はハサミウチを使って, 次のようにします.

$f(X)$ の $[x, x + \Delta x]$ に於ける最小値を m , 最大値を M , $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$ とすると,

$$m\Delta x \leq \Delta S \leq M\Delta x \iff m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M$$

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき, $m \rightarrow f(x), M \rightarrow f(x)$ だから,

$$\frac{dS}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$$



注7) 「イプシロン」と読みます. ギリシャ文字の 'e' です. "error" の略です.

注8) これを $f'(a)$ の定義としても大丈夫です. 2等辺三角形を「2辺が等しい三角形」と定義しても「2角が等しい三角形」と定義しても同じことです.

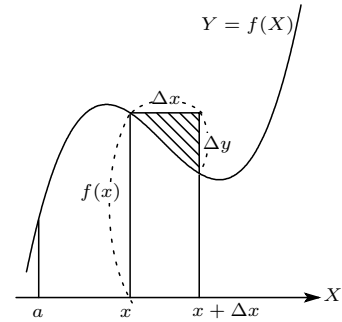
これで何の問題もないですが、これを次のように考えて見ましょう。 $f(x)\Delta x$ は図の長方形の面積を表すので、 ΔS との差は図の斜線部分の面積と等しい。この斜線部分の面積は、横が Δx 、高さが Δy の三角形の面積 (ΔE) とほぼ等しいから

$$\Delta S - f(x)\Delta x = \frac{1}{2}\Delta x\Delta y \quad (\text{誤差は}\Delta E \text{より小さい})$$

【 $f(x)$ が微分可能のとき】 $\Delta y = f'(x)\Delta x$ で、 Δy は Δx と同位の (または高位の) 微小量だから、 $\Delta x\Delta y$ は $(\Delta x)^2$ と同位の (または高位の) 微小量となる。

【 $f(x)$ が連続な場合】 このときは $\Delta y = f'(x)\Delta x$ とは書けませんが $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta y \rightarrow 0$ なので、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x} = 0$ となり、やはり ΔE は Δx より高位の微小量となる。よって

$$\Delta S = f(x)\Delta x \quad (\text{誤差は}\Delta x \text{より高位の微小量}) \iff \frac{dS}{dx} = f(x)$$

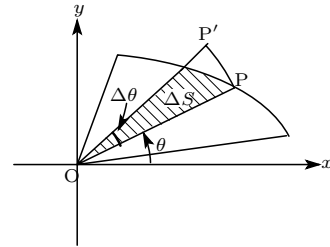


例3 今度は極表示された曲線です。曲線 C 上の点 $P(x, y)$ が、 $x = r(\theta) \cos \theta, y = r(\theta) \sin \theta$ と極表示されているとき、 C と $\theta = \alpha$ 、線分 OP (ただし $\theta > \alpha$) で囲まれる面積 $S(\theta)$ を考えて見ましょう。 r の $[\theta, \theta + \Delta\theta]$ に於ける最小値を m 、最大値を M 、 $\Delta S = S(\theta + \Delta\theta) - S(\theta)$ とすると、

$$\frac{1}{2}m^2\Delta\theta \leq \Delta S \leq \frac{1}{2}M^2\Delta\theta \iff \frac{1}{2}m^2 \leq \frac{\Delta S}{\Delta\theta} \leq \frac{1}{2}M^2$$

$\Delta\theta \rightarrow 0$ のとき、 $m \rightarrow r(\theta), M \rightarrow r(\theta)$ だから、

$$\frac{dS}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\theta} = \frac{1}{2}r^2$$



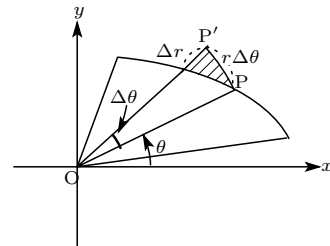
これまた何の問題もないですが、これを次の様に考えて見ましょう。 $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ と ΔS との差は図の斜線部分の面積と等しい。この斜線部分の面積は、横が $r\Delta\theta$ 、高さが $|\Delta r|$ の三角形の面積 (ΔE) とほぼ等しいから

$$\Delta S - \frac{1}{2}r^2\Delta\theta = \frac{1}{2}r\Delta\theta|\Delta r|$$

【 $r(\theta)$ が微分可能のとき】 $\Delta r = r'(\theta)\Delta\theta$ で、 Δr は $\Delta\theta$ と同位の (または高位の) 微小量だから、 $r\Delta\theta\Delta r$ は $(\Delta\theta)^2$ と同位の (または高位の) 微小量、すなわち ΔE は $\Delta\theta$ より高位の微小量となる。

【 $r(\theta)$ が連続関数のとき】 $\Delta\theta \rightarrow 0$ のとき $\Delta r \rightarrow 0$ なので、 $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{r\Delta\theta\Delta r}{\Delta\theta} = 0$ となり、やはり ΔE は $\Delta\theta$ より高位の微小量となる。よって

$$\Delta S = \frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2\Delta\theta + o(\Delta\theta) \iff \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2$$

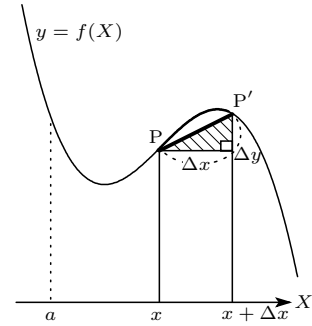


例4 最後に $y = f(X)$ (ただし $f'(X)$ は連続関数とします) の $X = a$ から $X = x$ (ただし $x > a$) までの弧長 $l(x)$ を考えてみましょう. $\Delta l = l(x + \Delta x) - l(x)$ は図の弧 PP' の長さを表すので, 横が Δx , 高さが $|\Delta y|$ の三角形の斜辺の長さ PP' とほぼ等しいから^{注9)}

$$\Delta l \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

ここで $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon$ (誤差 ϵ は Δx より高位の微小量) だから,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} &= \sqrt{1 + (f'(x) + \epsilon)^2} = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2 + 2\epsilon f'(x) + \epsilon^2} \\ &= \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2\epsilon f'(x) + \epsilon^2}{1 + \{f'(x)\}^2}} \\ &= \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} \left(1 + \frac{2\epsilon f'(x) + \epsilon^2}{2(1 + \{f'(x)\}^2)}\right) + o(\epsilon) \\ &= \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} + O(\epsilon) \end{aligned}$$



注10)

よって

$$\Delta l = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} \Delta x + o(\Delta x). \quad \therefore \frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$$

【注】ここで Δx が非常に小さいとき, Δy も非常に小さいので

$$\Delta l \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{(\Delta x)^2} = \Delta x$$

としてはいけません. Δy は Δx と同位の微小量なので無視することはできません. Δx より高位の微小量しか無視できません.

— 独り言 —

「連続関数である」だけでは $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ が存在しないことも $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ になることもあります.
 注11) 「たとえ連続であっても余りにも ぎざぎざ で微分できないことがある」というわけで理解できません. しかしそれが囲む面積 S や体積 V に関しては, $f(x)$ がどんなに ぎざぎざ であっても ΔS や ΔV は Δx (あるいは $\Delta \theta$) と同程度 (または高位の) 微小量となっているのは, 面白いです. いくらもとの関数が ぎざぎざ であっても **面積や体積はそのような ぎざぎざ を「平均」したのだから, 微分できるのだ** と (私は) 理解しています. 弧長に関しては $f'(x)$ の連続性を仮定していて, すでに $f(x)$ は十分「滑らか」な関数なので, その弧長が微分可能になっても不思議ではない(?)

注9) この誤差が Δx より高位の微小量であることの証明は難しい.

注10) ここで

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1 + \frac{1}{2}x)^2}{x(\sqrt{1+x} + (1 + \frac{1}{2}x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x}{\sqrt{1+x} + (1 + \frac{1}{2}x)} = 0$$

ゆえに

$$\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = o(x)$$

注11) 前者は以前に 例を挙げた. 後者は 例えば $f(x) = \sqrt{|x|}$ のとき $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h)}{h} = \infty$.

6.7 ハサミウチと微小量

実はハサミウチを使った方が、より厳密です. 先の $y = f(X), X = a, X = x, y = 0$ で囲まれた面積 $S(x)$ を求めるとき, $\Delta S - f'(x)\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x\Delta y$ の式において, (図からは明らかではあるが) 実は「 $\Delta S - f'(x)\Delta x$ 」が三角形の面積とほぼ同じであることの厳密な証明はしていません. しかし「微小量」を用いた説明の方が私にはしばしば「直感的で分かりやすい」気がします. 「納得できる」気がします. (さもないと長いことかけて紹介するはずもない) 大体, ハサミウチによる証明と言うのは, 分かりきったことを厳密に証明するときに使うことが多いのではないのでしょうか? 独断でまとめてみると,

ハサミウチの利用	厳密	証明に向く
微小量の利用	直感的	発見, 納得に向く

6.8 積分の二つの意味(復習)

区間 $[a, b]$ を n 等分し, $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, x_n = b, \Delta x = x_{k+1} - x_k$ (Δx は分割の幅), さらに η_k を $[x_{k-1}, x_k]$ 内の**適当な任意の点**とすると, 積分の**定義**より^{注12)}

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k) \Delta x \quad \dots \textcircled{1}$$

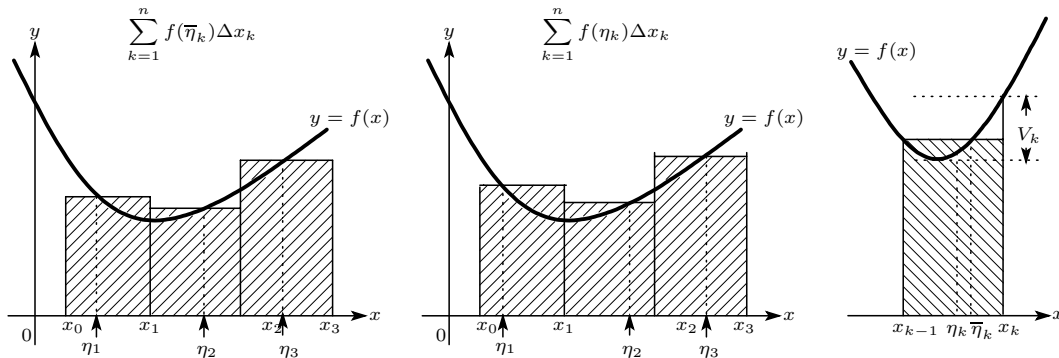
一方, $F'(x) = f(x)$ ならば, $\Delta F_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$ とおくと, 平均値の定理より

$$\Delta F_k = F'(\bar{\eta}_k) \Delta x = f(\bar{\eta}_k) \Delta x \quad (\text{ただし } \bar{\eta}_k \text{ は区間 } [x_k, x_{k+1}] \text{ 内の**適当に定まる点**)}$$

ここで数列の和の基本定理より

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta F_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \{F(x_{k+1}) - F(x_k)\} = \{F(x_1) - F(x_0)\} + \{F(x_2) - F(x_1)\} + \dots + \{F(x_n) - F(x_{n-1})\} \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta F_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \Delta x \quad \dots \textcircled{2}$$



$\bar{\eta}_k$ は**適当に定まる点**, η_k は**任意にとる点**なので ① と ② は異なります. しかし, $f(x)$ が連続のとき, V_k を 区間 $[x_k, x_{k+1}]$ における最大値と最小値の差とすると, 三角不等式: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ から

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \Delta x - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k) \Delta x \right| &= \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\bar{\eta}_k) - f(\eta_k)) \Delta x \right| \\ &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(\bar{\eta}_k) - f(\eta_k)| \Delta x \\ &\leq \max(V_k) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x = \max(V_k)(b-a) \end{aligned}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき $V_k \rightarrow 0$ だから $\max(V_k) \rightarrow 0$. よって^{注13)}

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k) \Delta x \quad \dots \textcircled{3}$$

^{注12)} 積分の定義は, 本来は「微小量の和」であって「微分の逆算」ではありません. また 積分の定義では, 等間隔でなくても良いのですが, それは第1章でやったので, ここでは簡単のために等間隔に分割します.

^{注13)} 詳しく言うと x_k の取り方によらず V_k は 0 に収束すること (一様収束) を言わないといけませんが, 省略します.

すなわち 連続関数のときは「小区間内のどの点をとっても、区間の幅を小さくしていけば積分和は同じに収束する」ので

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta F_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

$F'(x) = f(x)$ ($F(x)$ は $f(x)$ の原始関数) ですから「微小量の和としての積分(本来の定義)」が「微分の逆算」を利用すればすぐ求められることが分かりました。また上の説明で②の「 $F'(x) = f(x)$ ならば $F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \Delta x$ 」までは、「微分の平均値の定理」を、③の「区間を小さくしていけば、どの点をとっても積分和は同じ」という性質は $f(x)$ の連続性を使っています。^{注14)}

例1 $f(x) = 3x^2$, $F(x) = x^3$ として考えて見ます。区間 $[0, 1]$ を $\{x_k\}$ で n 等分し $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ とすると、分割の幅は $\Delta x = \frac{1}{n}$ 。

$$\begin{aligned} F(x_k + \Delta x) - F(x_k) &= (x_k + \Delta x)^3 - (x_k)^3 = 3(x_k)^2 \Delta x + 3x_k(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\ &= 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + 3\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^3} \end{aligned}$$

$\Delta F_k = F(x_k + \Delta x) - F(x_k) = F'(\bar{\eta}_k) \Delta x = f(\bar{\eta}_k) \Delta x$ とおくと

$$\Delta F_k = \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot 3(\bar{\eta}_k)^2. \quad \therefore \bar{\eta}_k = \sqrt{\frac{3k^2 + 3k + 1}{3n^2}}$$

$\frac{k}{n} < \bar{\eta}_k < \frac{k+1}{n}$ をみたすから、確かに $\bar{\eta}_k$ は区間 $[x_k, x_{k+1}]$ に含まれる。そして

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{\eta}_k) \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} 3(\bar{\eta}_k)^2 \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^3}{n^3} = 1 = F(1) - F(0) \quad \dots (*)$$

これが②の式です。 $\bar{\eta}_k$ は区間 $[x_k, x_{k+1}]$ 内の定まった点です。今度は、区間 $[x_k, x_{k+1}]$ 内の任意の点 η_k をとって n 個の和 I_n を作ってみます。

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k) \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} 3(\eta_k)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

(*) と I_n の差を求めると

$$(*) - I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} - 3(\eta_k)^2 \right\} \cdot \frac{1}{n}$$

ところが $x_k < \eta_k < x_{k+1}$ だから $(\frac{k}{n})^2 < \eta_k^2 < (\frac{k+1}{n})^2$ 。よって

$$\begin{aligned} \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} - 3\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 &< \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} - 3(\eta_k)^2 < \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} - 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ \iff -\frac{3k+2}{n^2} &< \frac{3k^2 + 3k + 1}{n^2} - 3(\eta_k)^2 < \frac{3k+1}{n^2} \end{aligned}$$

^{注14)} 本当は「 $f(x)$ が連続関数のときは、 $F'(x) = f(x)$ をみたすような $F(x)$ が存在すること」も言わないといけませんが、これは第1章を見てください。

ゆえに

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{3k+2}{n^2} < (*) - I_n < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{3k+1}{n^2}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、左辺と右辺は0に収束するので、ハサミウチより η_k の選び方によらず I_n は (*) に収束する。これが 前の ③ に当たります。

②の部分については「平均値の定理」を使わないで 微小量と微分の関係を直接使ってもいえます。注15)

$F'(x) = f(x)$ より

$$\begin{aligned} \Delta F_k &= f(x_k)\Delta x + \epsilon\Delta x \quad \left(\text{ただし, } \epsilon\Delta x \text{ は } \Delta x \text{ より高位の微小量だから } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon = 0 \right) \\ \therefore \sum_{k=0}^{n-1} \Delta F_k &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon\Delta x \end{aligned}$$

よって (各区間における) $|\epsilon|$ の最大値を E とおくと

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \Delta F_k - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon\Delta x \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\epsilon|\Delta x \leq E \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x = E(b-a)$$

$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta F_k = F(b) - F(a)$, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $E \rightarrow 0$ だから注16)

$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

注17) 誤差 $\epsilon\Delta x$ が Δx より高位の微小量であれば、その誤差の和は、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき限りなく0に近づき、したがって 積分和を考えると Δx より高位の微小量は無視してよいことが良く分かります。

例2 $f(x) = 3x^2$, $F(x) = x^3$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ のように $\{x_k\}$ を等間隔にとると、

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) - F(x_k) &= (x_k + \Delta x)^3 - (x_k)^3 = 3(x_k)^2\Delta x + 3x_k(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\ \therefore \sum_{k=0}^{n-1} \{F(x_{k+1}) - F(x_k)\} &= \sum_{k=0}^{n-1} 3(x_k)^2\Delta x + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k\Delta x \quad (\text{ただし } \epsilon_k = 3x_k\Delta x + (\Delta x)^2) \end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{n-1} \{F(x_{k+1}) - F(x_k)\} = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$, また $a \leq x_k \leq b$ だから

$$|\epsilon_k| = |\Delta x(3x_k + \Delta x)| \leq \Delta x(3|x_k| + \Delta x) \leq \Delta x(3\max(|a|, |b|) + (b-a)) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

ゆえに $E = (3\max(|a|, |b|) + (b-a))\Delta x$ とおくと

$$\begin{aligned} \left| \{F(b) - F(a)\} - \sum_{k=0}^{n-1} 3(x_k)^2\Delta x \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k\Delta x \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\epsilon_k|\Delta x \leq E \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x = E(b-a) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \\ \therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} 3(x_k)^2\Delta x &= F(b) - F(a). \quad \therefore \int_a^b 3x^2 dx = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

注15) 両方とも $F'(x) = f(x)$ に関係しているので当然! また私にはこちらの方が「しっくり」来ます。しかし厳密な証明はより難しい。

注16) 詳しく言うと x_k の取り方によらず E は0に収束すること (一様収束) を言わないといけません。省略します。

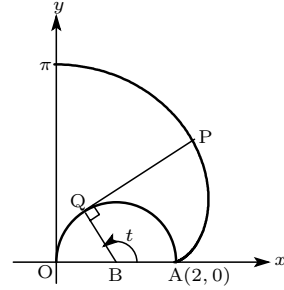
注17) ここで $[x_k, x_{k+1}]$ 内の任意の点をとっても積分和は同じ値に収束することは、「 $f(x)$ の連続性」を使って説明したので右辺の等号が成り立ちます。

第7章 極方程式と面積(その2)

極表示されていないときでも，扇形に分割するほうが良いときもあります。

例題 1

xy 平面上に半円 $\Gamma: (x-1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ がありその中心を B , また $A(2, 0)$ とする. 長さ π の糸が一端を原点 O に固定して, Γ に巻きつけてある. この糸の他方の端 P を引き, P が y 軸に達するまで, 緩むことなく解いていく. (P は最初, 点 A にあったものとする.) 糸と Γ の接点を Q とし, $\angle ABQ$ の大きさを t とする. P が描く曲線と, Γ , および y 軸で囲まれる領域の面積 S を求めよ. (類題 早大・理工)

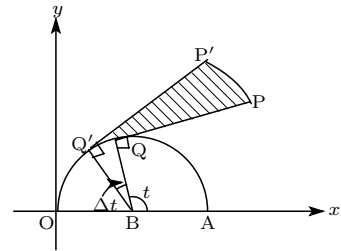


t が t から $t + \Delta t$ に変化するとき $\overrightarrow{QP}$ の通過する領域は右の斜線部となる. 「緩むことなく解く」ので

$$\overline{PQ} = \text{弧 } AQ \text{ の長さ} = t$$

Δt が非常に小さいとき, 中心角が Δt , 半径が $\overline{PQ}^2$ の扇形の面積で近似でき, この面積を S の増加量 ΔS だから

$$\Delta S = \frac{1}{2} \overline{PQ}^2 \cdot \Delta t + o(\Delta t) \quad \dots (*)$$



$o(\Delta t)$ は Δt が小さくなれば限りなく小さくなるので

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \overline{PQ}^2 = \frac{1}{2} t^2. \quad \text{よって, } S = \int_0^\pi \frac{1}{2} t^2 dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{6}$$

【別解】(パラメータ表示曲線で囲まれる面積と見る.)

$\overrightarrow{BQ}$ は x 軸正方向からの回転角が t で長さが 1 のベクトルで, $\overrightarrow{QP}$ は $\overrightarrow{BQ}$ を (-90°) 回転したベクトルと同じ向きで長さが t のベクトルだから,

$$\overrightarrow{BQ} = (\cos t, \sin t), \quad \overrightarrow{QP} = t(\cos(t-90^\circ), \sin(t-90^\circ)) = t(\sin t, -\cos t)$$

よって

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP} = (1, 0) + (\cos t, \sin t) + t(\sin t, -\cos t) = (1 + \cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$$

ゆえに $P(x, y)$ とおくと

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

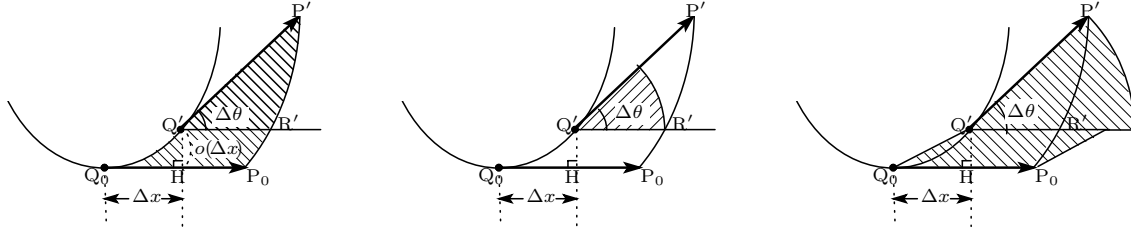
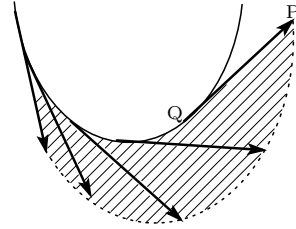
t が増加すると, P は反時計回りに動くので, P の描く軌跡と x 軸, y 軸で囲まれる面積を S' とすると,

$$\begin{aligned} S' &= - \int_0^\pi y \frac{dx}{dt} dt = - \int_0^\pi (\sin t - t \cos t) t \cos t dt = - \int_0^\pi t \sin t \cos t dt + \int_0^\pi t^2 \cos^2 t dt \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^\pi t \sin 2t dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi t^2 (1 + \cos 2t) dt \end{aligned}$$

これを部分積分を繰り返してもとめて, 半円の面積を引く. (略)

前頁の核心部分 (※) の式) の説明を厳密にやってみます。

いま $f(x)$ は2回微分可能で下に凸とします。さらに, $y = f(x)$ 上に点 Q があり, Q における $y = f(x)$ の接線上に点 P を, 図のように P が Q の右になるようにとるとします。このとき, $\overrightarrow{QP}$ が通過する領域の面積を求めてみましょう。



まず簡単のために $Q_0(a, f(a))$ における接線の傾きが0になっているとします。(左上図) さらに Q' の x 成分を $x = a + \Delta x$, Q が Q' まで移動する間に $\overrightarrow{QP}$ が通過する領域の面積を ΔS , Q' から直線 Q_0P に下ろした垂線の足を H , Q から Q_0P_0 に平行に引いた直線と Q の軌跡との交点を R , $|Q_0P_0| = r$, Q が Q' まで動く間に $|\overrightarrow{QP}|$ の最大値を $r + \Delta r$, $\overrightarrow{QR}$ の最小値を $r - \Delta r'$ とすると, 「点 Q' を中心とする半径が $r - \Delta r'$, 中心角 $\Delta\theta$ の扇形」(中央図) と, 「半径が $r + \Delta r$, 中心角 $\Delta\theta$ の扇形の面積 + 底辺が $\overrightarrow{Q_0P_0}$, 高さが $\overrightarrow{Q'H}$ の平行四辺形」(右上図) を考えて

$$\frac{1}{2}(r - \Delta r')^2 \Delta\theta \leq \Delta S \leq \overrightarrow{Q'H} \cdot (r + \Delta r) + \frac{1}{2} \cdot (r + \Delta r)^2 \Delta\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで $\Delta x \rightarrow 0$ のとき, 「 $r + \Delta r \rightarrow r$ 」かつ「 $r - \Delta r' \rightarrow r$ 」。さらに直線 QP は Q における接線だから

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{Q'H}}{\Delta x} = 0 \iff \overrightarrow{Q'H} = o(\Delta x) \quad \dots (*)$$

① の各辺を Δx で割って

$$\frac{1}{2}(r - \Delta r')^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta x} \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq \frac{\overrightarrow{Q'H}}{\Delta x} \cdot (r + \Delta r) + \frac{1}{2} \cdot (r + \Delta r)^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta x}$$

上の式で, $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取ると, ハサミウチより

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dx} \iff \Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta + o(\Delta x) \quad \dots \textcircled{2}$$

さらに $f''(x) > 0$ のとき, θ と x は1対1に対応し,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d(\tan \theta)} \frac{d(\tan \theta)}{dx} = \cos^2 \theta \cdot \frac{df'(x)}{dx} = \cos^2 \theta \cdot f''(x) \neq 0$$

ゆえに, $\Delta\theta$ と Δx は同位の微小量だから②より

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta + o(\Delta\theta) \iff \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2 \quad \dots (**)$$

(**) の性質は x と直接関係ない図形的な性質なので, $f(x)$ 上の任意の Q に対し成り立つ。(証明終)

Comment

すなわち $\overrightarrow{Q'H}$ が $\Delta\theta$ (Δx) よりも高位の微小量になるので, $Q'R'$ の下側にある部分の面積も $\Delta\theta$ (Δx) より高位の微小量となる。よって始点が動かないときと同様に, 扇形の面積で近似できる訳です。また, この性質は凹凸が一定でないと成り立ちません。(Q と Q' における扇形の小片が重なることがあります。図を描いてみてください。)

例題 2

曲線 $\Gamma: y = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($0 \leq x \leq \log(1 + \sqrt{2})$) 上に点 Q を, さらに Q における接線上に点 P を $P_x - Q_x = 1$ となるようにとる. (ただし P_x は P の x 成分を表すとする) 点 Q が Γ の左端 $A(0, 1)$ から, 右端 $B(\log(1 + \sqrt{2}), \sqrt{2})$ まで動くとき, $\overrightarrow{QP}$ の通過する領域の面積を求めよ.

$Q(t, f(t))$ とすると, $\overrightarrow{QP}$ の x 成分は 1 で, Q における接線の傾きは $f'(t)$ だから,

$$\overrightarrow{QP} = (1, f'(t)) = \left(1, \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$$

ゆえに

$$|\overrightarrow{QP}|^2 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$\overrightarrow{QP}$ が x 軸正方向となす角を $\theta(t)$, t が Δt 増加したときの θ の増加量を $\Delta\theta$, t が Δt 増加したとき $\overrightarrow{QP}$ が通過する領域の面積を ΔS とすると, 前の例題より

$$\Delta S = \frac{1}{2} \overrightarrow{QP}^2 \Delta\theta + o(\Delta\theta) \iff \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2} \overrightarrow{QP}^2$$

$t = \log(1 + \sqrt{2})$ のとき $\theta = \frac{\pi}{4}$ だから

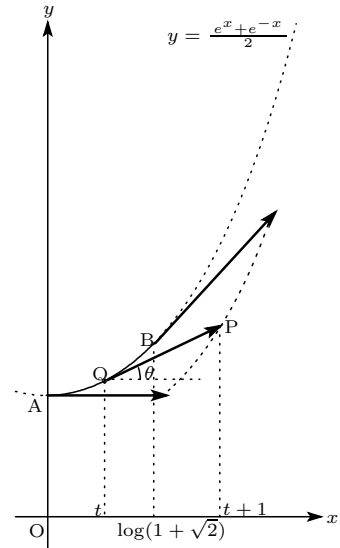
$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overrightarrow{QP}^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 d\theta$$

θ と $\tan \theta$ は 1 対 1 に対応するので, θ は $\tan \theta$ の関数と考えることができる. 置換積分するために, $\tan \theta = u$ とおくと, $du = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = (1 + \tan^2 \theta) d\theta = (1 + u^2) d\theta = (1 + \{f'(t)\}^2) d\theta = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 d\theta$

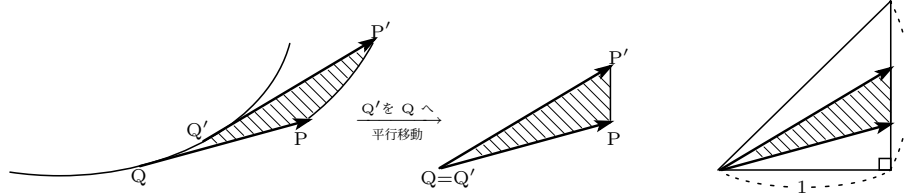
$$\therefore d\theta = \frac{1}{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} du, \quad \begin{array}{c|c} \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ u & 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

ゆえに

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 du = \frac{1}{2} \quad \dots (\text{答})$$



このように簡単になったのには、実は「わけ」がある。先の例題で述べたように、ベクトルが接線と平行に動くときは、始点が曲線上を動いていても、始点が動かないときと同様に微小な扇形で近似できた。すなわち左下図と中央下図の2つの面積の差は $\Delta\theta \rightarrow 0$ のとき、 $\Delta\theta$ より小さい微小量となる。ところが2つのベクトルの x 成分の差は1で等しいから、この微小三角形を重ねると、底辺1、高さ1の直角2等辺三角形となる。よって、 $S = \frac{1}{2}$ となる。 $\overrightarrow{QP}$ の x 成分の差が一定だからこそこの「技」である。



【別解】念のために、普通のやり方でやって見ましょう。

$\overrightarrow{QP} = \left(1, \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$ だから

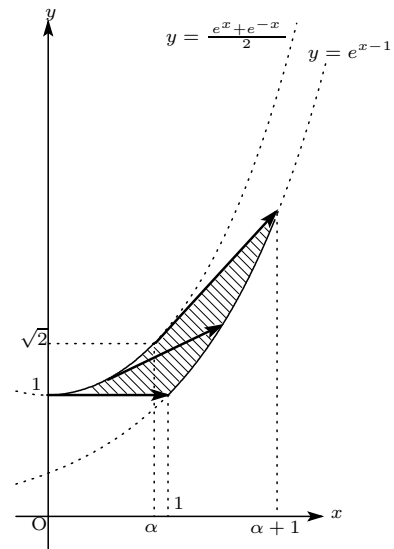
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \left(t, \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) + \left(1, \frac{e^2 - e^{-t}}{2}\right) = (t+1, e^t)$$

よって P の軌跡の方程式は

$$y = e^{x-1}$$

求める面積を S , また $\alpha = \log(1 + \sqrt{2})$ とおくと $e^\alpha = 1 + \sqrt{2}$ だから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx + \sqrt{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \left\{ \int_1^{\alpha+1} e^{x-1} dx + 1^2 \right\} \\ &= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_0^\alpha + \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \left[e^{x-1} \right]_1^{\alpha+1} - 1 \\ &= \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} - (e^\alpha - 1) - 1 \\ &= \frac{1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} - (1 + \sqrt{2}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



先の答えと、確かに一致します。

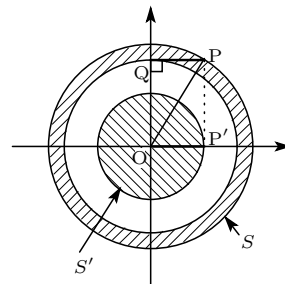
Comment

この考え方が分かると、以前、円錐の回転体のとき述べたことが良くわかるようになります。右の図で線分 QP が線分 OQ と直交しているとき、三平方の定理より

$$\overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2 = \overline{QP}^2$$

よって、線分 QP を原点の周りに回転したときできるトーラスの面積 S は、線分 OP' を原点の周りに回転した円の内部の面積 S' と一致します。これをこの例題と同様にやってみると

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \overline{QP}^2 d\theta = \overline{QP}^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi \overline{QP}^2 = S'$$



今度は法線ベクトルの通過領域を考えてみましょう.

例題 3

曲線 $\Gamma: y = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($0 \leq x \leq \log(1 + \sqrt{2})$) 上に点 Q を, さらに Q における法線上に点 P を $Q_y - P_y = 1$ となるようにとる. (ただし P_y は P の y 成分を表すとする) 点 Q が Γ の左端 $A(0, 1)$ から, 右端 $B(\log(1 + \sqrt{2}), \sqrt{2})$ まで動くとき, $\overrightarrow{QP}$ の通過する領域の面積を求めよ.

$Q(t, f(t))$ ($t > 0$) とすると, Q における法線の傾きは $-\frac{1}{f'(t)}$ だから,

$$\overrightarrow{QP} = k \left(1, -\frac{1}{f'(t)} \right) \quad (k \text{ は定数})$$

さらに, $\overrightarrow{QP}$ の y 成分は -1 だから, $k = f'(t)$. よって

$$\overrightarrow{QP} = (f'(t), -1) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, -1 \right)$$

ゆえに

$$|\overrightarrow{QP}| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$\overrightarrow{QP}$ が x 軸正方向となす角を $\theta(t)$, t が Δt 増加したときの Q, P をそれぞれ Q', P' とし, θ の増加量を $\Delta\theta$, $\overrightarrow{QP}$ が通過する領域の面積を ΔS , この間に Q の動く道りを Δs とおく. さらに, 右下の図で Q' を通り $\overrightarrow{QP}$ と平行な直線と Q の描く曲線との交点を R' とすると, $\Delta\theta$ が小さいとき, ΔS は「高さが $\overrightarrow{QP}$, 底辺が Δs の平行四辺形 ($\square QPR'R'$)」と「半径 $\overrightarrow{QP}$ で中心角が $\Delta\theta$ の扇形 ($\triangle Q'R'P'$)」の面積の和と考えられるので

$$\Delta S = \overrightarrow{QP} \Delta s + \frac{1}{2} \overrightarrow{QP}^2 \Delta\theta \quad (\text{誤差は } \Delta\theta \text{ より高度の微小量}) \quad \dots (*)$$

注1)

Q が Γ 上を動くとき, θ は $0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ と動く. この区間 $[0, \frac{\pi}{4}]$ を n 個の等区間に分けて θ_k ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) をとり, $\Delta\theta = \theta_{k+1} - \theta_k$ とすると,

$$\sum_{k=1}^n \Delta S = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{QP} \Delta s + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \overrightarrow{QP}^2 \Delta\theta \quad \dots (**)$$

誤差は $\Delta\theta$ より高度の微小量だから, $\Delta\theta$ の幅が 0 に限りなく近づくとき, 等号が成立する. よって Γ の全長を L とすると,

$$S = \int_0^L \overrightarrow{QP} ds + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overrightarrow{QP}^2 d\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

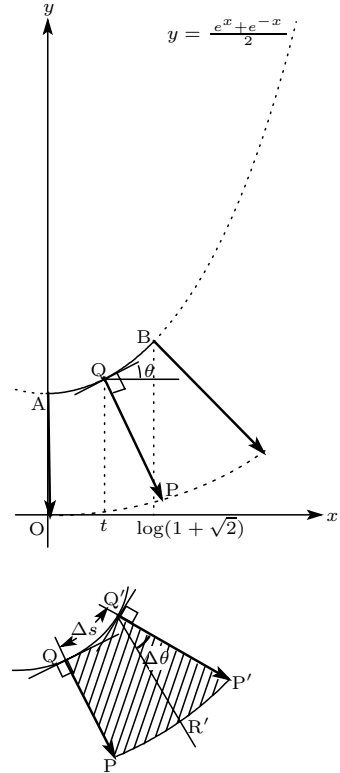
ここで 弧長の公式から

$$ds = \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt = \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt$$

注1) もちろん (*) は,

$$\Delta S = \overrightarrow{QP} \Delta s + \frac{1}{2} \overrightarrow{QP}^2 \Delta\theta + o(\Delta\theta)$$

と書いても「全く」同じです. 誤差の程度がどの程度の微小量かが問題で, 記号は二の次です. 自分にあった書き方をして下さい.



よって置換積分の公式から,

$$\begin{aligned}\int_0^L \overline{QP} ds &= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt = \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} dt \\ &= \frac{1}{8} \left[e^{2t} - e^{-2t} + 4t \right]_0^{\log(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{8} \left\{ (1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} + 4\log(1+\sqrt{2}) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})}{2} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

そして, $\overrightarrow{QP}$ の y 成分は一定だから, 先の例題と同様にして,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overline{QP}^2 d\theta = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ から

$$S = \frac{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}) + 1}{2} \quad \dots (\text{答})$$

Comment

1 前頁で (*) から ① を, 積分の定義を用いて直接導きましたが, 置換積分の公式を使っても同じになります.

$$\Delta S = \overline{QP} \Delta s + \frac{1}{2} \overline{QP}^2 \Delta \theta \quad (\text{誤差は } \Delta \theta \text{ より高度の微小量}) \quad \dots (*)$$

よって両辺を $\Delta \theta$ で割って極限をとると

$$\frac{dS}{d\theta} = \overline{QP} \frac{ds}{d\theta} + \frac{1}{2} \overline{QP}^2$$

ゆえに

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overline{QP} \frac{ds}{d\theta} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overline{QP}^2 d\theta$$

置換積分の公式より, 第一項は $\int_0^L \overline{QP} ds$ と一致するから,

$$S = \int_0^L \overline{QP} ds + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overline{QP}^2 d\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

2 (*) の式をもう少し詳しく説明します. 前頁の図形を回転し, Q における接線が x 軸に平行になるようにします. この時, 直線 $Q'R'$ から左の部分の面積 ΔS_1 は $y = f(x)$ と $y = g(x)$ にはさまれた領域の面積と同様に

$$\Delta S_1 = \overline{QP} \Delta x + o(\Delta x)$$

ところが P における接線は x 軸に平行なので $\Delta s = \Delta x + o(\Delta x)$. また前の例題で述べたように, $f''(x) > 0$ のとき Δx と $\Delta \theta$ は同位の微小量なので

$$\Delta S_1 = \overline{QP} \Delta s + o(\Delta \theta)$$

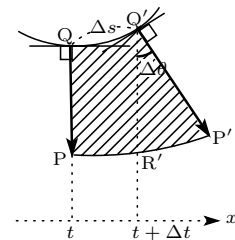
また直線 $Q'R'$ から右の部分の面積 ΔS_2 は 極表示された曲線の面積と同様に,

$$\Delta S_2 = \frac{1}{2} \overline{Q'R'}^2 \Delta \theta + o(\Delta \theta) = \frac{1}{2} \overline{QP}^2 \Delta \theta + o(\Delta \theta)$$

よって

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \overline{QP} \Delta s + \frac{1}{2} \overline{QP}^2 \Delta \theta + o(\Delta \theta)$$

この性質は図形的なものだから, 全ての Q についても成り立つ.



【別解】(パラメーター表示された曲線の面積の応用)

$$\overrightarrow{QP} = (f'(t), -1) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, -1 \right) \text{ だから}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \left(t, \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, -1 \right) = \left(t + \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \right)$$

$\alpha = \log(1 + \sqrt{2})$ とおくと, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + (\sqrt{2} - 1) \cdot 1 - \int_0^\alpha \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \right) \cdot \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^\alpha \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx + \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \int_0^\alpha \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \right) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} + 1 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_0^\alpha + \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} [e^{2t} - 4t - e^{-2t}]_0^\alpha \\ &= \frac{1}{2} (e^\alpha - e^{-\alpha}) + \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} (e^{2\alpha} - 4\alpha - e^{-2\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right) + \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \left\{ (1 + \sqrt{2})^2 - 4 \log(1 + \sqrt{2}) - \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right)^2 \right\} \\ &= 1 + \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \{ 3 + 2\sqrt{2} - 4 \log(1 + \sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2}) \} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

確かに同じになります.

Comment

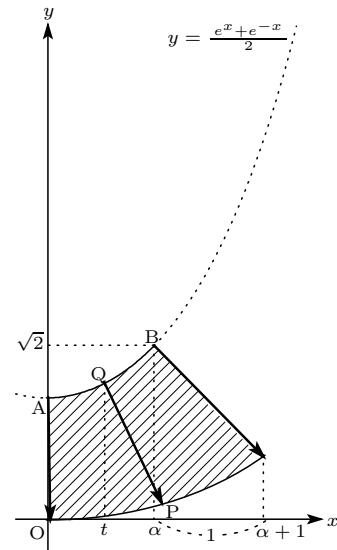
この節で取り上げたような「公式(?)」を覚える必要は全くありません. 試験で使える局面は限られていると思います. 証明も大変だし, 実際にはパラメータ曲線で囲まれた領域とみなして積分すればできます. ここでこれを取り上げた理由は, これを通して微少量の利用の仕方(これは極限の利用, ひいては微分の利用の仕方)が分かると思ったからです. つまり**最初に微分して ΔS を求め, 次にそれを集めて(積分して)面積を求める**という積分の本質が分かると思ったからです. すなわち $F(x)$ を一般の関数として

$F(b) - F(a)$ を求めるとき → 「まず ΔF を求め, 次にそれを積分」

というステップをはっきりさせたかったので, このような特殊な例を選びました. 普通の $y = f(x)$ と $x = a, x = b, y = 0$ で囲まれている面積に関しても同じことをしています. すなわち

$\Delta S = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$ となるので $f(x)\Delta x$ を積分して面積が求まる

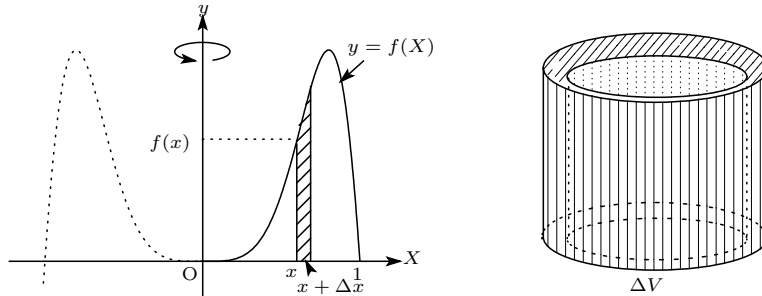
わけです. しかしこれは余りにも慣れすぎているので微分という *first step* の存在を忘れていました. そこでこのような特殊な例を持ってきました.



第8章 回転体の体積 (バームクーヘン分割)

例題 4

$f(x) = \pi x^2 \sin \pi x^2$ とする. $y = f(x)$ のグラフの $0 \leq x \leq 1$ の部分と x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積は V は $V = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx$ で与えられることを示し, この値を求めよ. (東大・理系 1989 年)



左上図の斜線部分の領域を y 軸の周りに回転した立体の体積を ΔV とする. この立体の底面積 ΔS は, 半径 $x + \Delta x$ の円と半径 x の円ではさまれたトーラスだから

$$\Delta S = \pi(x + \Delta)^2 - \pi x^2 = 2\pi x \Delta x + \pi(\Delta x)^2$$

よって, 区間 $[x, x + \Delta x]$ における $f(x)$ の最大値を M , 最小値を m とすると,

$$m\Delta S \leq \Delta V \leq M\Delta S \iff m(2\pi x \Delta x + \pi(\Delta x)^2) \leq \Delta V \leq M(2\pi x \Delta x + \pi(\Delta x)^2)$$

各辺を Δx でわって

$$m(2\pi x + \pi \Delta x) \leq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq M(2\pi x + \pi \Delta x)$$

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき, $M \rightarrow f(x), m \rightarrow f(x)$ だから, ハサミウチより

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = 2\pi x f(x)$$

ゆえに $\frac{dV}{dx} = 2\pi x f(x)$ となるので

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 x \pi x^2 \sin \pi x^2 dx \quad \text{Q.E.D.}$$

$$\pi x^2 = t \text{ とおくと } 2\pi x dx = dt, \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline t & 0 \rightarrow \pi \end{array}.$$

$$V = \int_0^\pi t \sin t dt = \left[-t \cos t \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos t) dt = \pi \quad \dots(\text{答})$$

【別解】 $y = f(x)$ を $(x, f(x))$ とパラメータ表示された曲線と考える. $f(x)$ が極大値を取る x の値を α とすると, $[0, \alpha]$ では $\Delta x > 0$ のとき $\Delta y > 0$, $[\alpha, 1]$ では $\Delta x > 0$ のとき $\Delta y < 0$ となるので

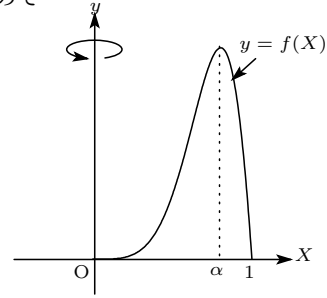
$$\pi \int_0^\alpha x^2 \frac{dy}{dx} dx \text{ は } y = f(x) (0 \leq x \leq \alpha) \text{ を } y \text{ 軸の周りに回転した体積 } V_{\text{内}},$$

$$-\pi \int_\alpha^1 x^2 \frac{dy}{dx} dx \text{ は } y = f(x) (\alpha \leq x \leq 1) \text{ を } y \text{ 軸の周りに回転した体積 } V_{\text{外}}$$

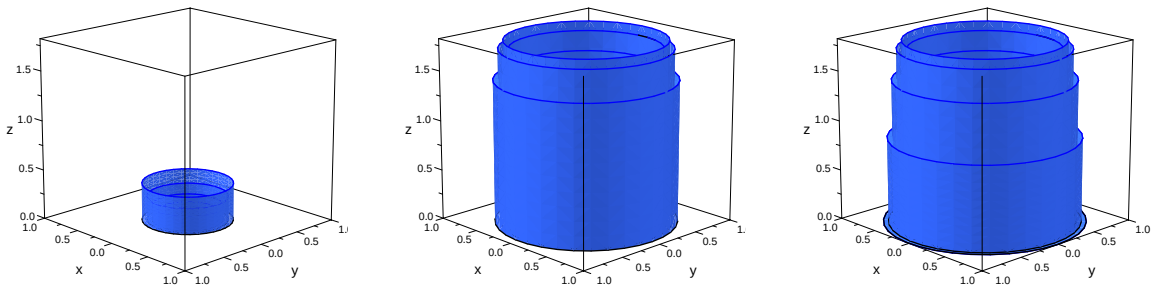
をあらわす. よって求める体積 V は

$$V = V_{\text{外}} - V_{\text{内}} = -\pi \int_\alpha^1 x^2 \frac{dy}{dx} dx - \pi \int_0^\alpha x^2 \frac{dy}{dx} dx = -\pi \int_0^1 x^2 \frac{dy}{dx} dx$$

$$= -\pi \int_0^1 x^2 \cdot 2\pi x \{x^2 \cos(\pi x^2) + \sin(\pi x^2)\} dx \quad \text{以下 } \pi x^2 = t \text{ と置いて置換積分 (略)}$$



【参考】 立体が作られていく様子.



これは, しばしば「バームクーヘン分割」(お菓子の「バームクーヘン」!) と呼ばれます.

バームクーヘン分割

右図のように回転軸の片側に集まっている領域があって, 軸からの距離が r のとき, その切り口の長さが $l(r)$ とすると, その領域を回転したときにできる回転体の体積 V は

$$V = \int_a^b 2\pi r l(r) dr$$

【証明】 半径が r と $r + \Delta r$ の2つの円にはさまれた円環の面積は

$$\Delta S = \pi(r + \Delta)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2 \quad \dots (*)$$

$$2\pi r \Delta r \text{ (誤差は } \Delta r \text{ より高位の微小量)}$$

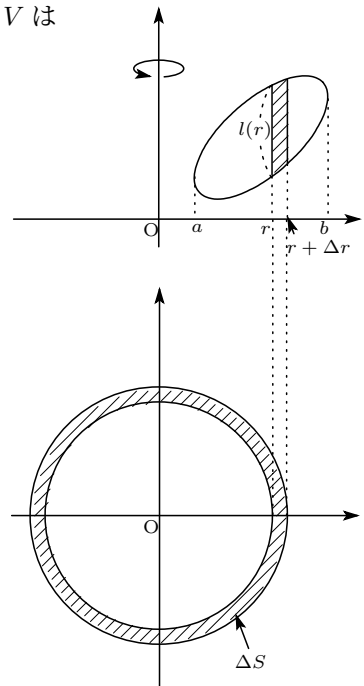
よって r から $r + \Delta r$ の間に含まれる小立体の体積を ΔV とおくと, Δx が小さいときは, 底面積が ΔS , 高さが $l(r)$ の柱体とみなすことができる. よって

$$\Delta V = l(r) \Delta S = 2\pi r l(r) \Delta r \text{ (誤差は } \Delta r \text{ より高位の微小量)}$$

ゆえに

$$V = \int_a^b 2\pi r l(r) dr$$

Q.E.D.



なお, (*) は Δr が小さいときは $\Delta S = (\text{円周の長さ}) \times (\text{トーラスの幅})$ と考えてよいことを表している.

先の例題では、「輪切り分割」 $V_y = \pi \int x^2 dy$ あるいは $V_x = \pi \int y^2 dx$ と比べて、バームクーヘン分割の方が速く、またその方が多いと思うが「いつでも」と言うわけではない。例えば、

例題 5

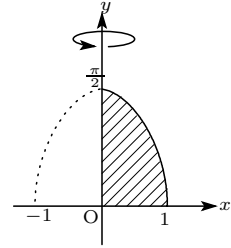
$x = \sqrt{\cos y}$ ($0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$) と x 軸, y 軸で囲まれた領域を y 軸の周りに回転した体積 V を求めよ。

【輪切り分割】

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy = \pi \left[\sin y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

【バームクーヘン分割】

$$V = 2\pi \int_0^1 xy dx \quad (\text{ただし } y = \cos^{-1} x^2)$$



ここで $x^2 = \cos y$ とおくと、置換積分の公式より、 $2x dx = -\sin y dy$, $\frac{x}{y} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 \rightarrow \frac{1}{0}$. よって

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y \left(-\frac{1}{2} \sin y \right) dy \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin y dy = \pi \left[y(-\cos y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos y) dy = \pi \left[\sin y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned}$$

この例では「輪切り分割」の方が速かった。最後にパラメーター表示された曲線で囲まれた領域を「バームクーヘン分割」で求めてみよう。

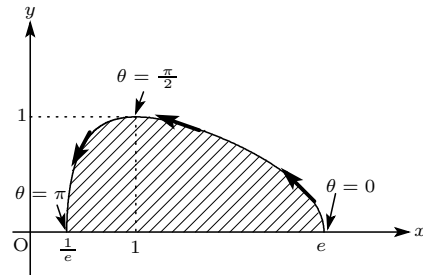
例題 6

$$C: \begin{cases} x = e^{\cos \theta} \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

と x 軸によって囲まれる領域を x 軸の周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta e^{\cos \theta}, \quad \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta$$

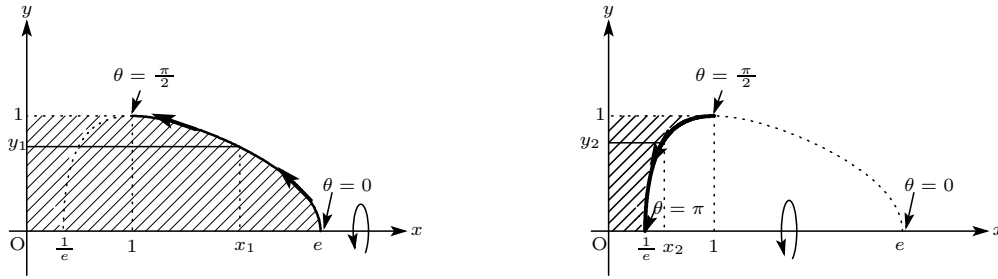
θ	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	-	-	-	0
$\frac{dy}{d\theta}$	+	+	0	-	-
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$	$\nwarrow$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\nearrow$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{e} \\ 0 \end{pmatrix}$



増減表より、 C の概形は図のようになります。

C を 2 つの部分に分け $C_1: x = x_1(\theta), y = y_1(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), $C_2: x = x_2(\theta), y = y_2(\theta)$ ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$), $V_{\text{外}}$ を C_1 と x 軸, y 軸, $y = 1$ で囲まれる領域を x 軸の周りに回転した立体の体積, $V_{\text{内}}$ を C_2 と x 軸, y 軸, $y = 1$ で囲まれる領域を x 軸の周りに回転した立体の体積とすると,

バウムクーヘン分割を行って, (x 軸周りの回転であることに注意)



$$\begin{cases} V_{\text{外}} = \int_0^1 2\pi y_1 \cdot x_1 dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y_1 \cdot x_1 \frac{dy}{d\theta} d\theta \\ V_{\text{内}} = \int_0^1 2\pi y_2 \cdot x_2 dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\pi y_2 \cdot x_2 \frac{dy}{d\theta} d\theta = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\pi y_2 \cdot x_2 \frac{dy}{d\theta} d\theta \end{cases}$$

$V = V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ だから,

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y_1 \cdot x_1 \frac{dy}{d\theta} d\theta - (-1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\pi y_2 \cdot x_2 \frac{dy}{d\theta} d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi y \cdot x \frac{dy}{d\theta} d\theta \quad \dots (*)$$

このように1つにまとめられます (後で詳しく述べる). よって

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi} e^{\cos \theta} \sin \theta \cos \theta d\theta = -2\pi \int_0^{\pi} (e^{\cos \theta})' \cos \theta d\theta \\ &= -2\pi \left[e^{\cos \theta} \cdot \cos \theta \right]_0^{\pi} + 2\pi \int_0^{\pi} e^{\cos \theta} (-\sin \theta) d\theta \\ &= -2\pi (-e^{-1} - 1) + 2\pi \left[e^{\cos \theta} \right]_0^{\pi} \\ &= -2\pi (-e^{-1} - 1) + 2\pi (e^{-1} - 1) = \frac{4\pi}{e} \end{aligned}$$

Comment

結局は x 軸の周りの「バウムクーヘン分割」を使って $V = V_{\text{外}} - V_{\text{内}} = \int_0^1 2\pi x_1 y_1 dy - \int_0^1 2\pi x_2 y_2 dy$ を置換積分しただけですが, パラメータ表示された関数の囲む面積と同様, 必ず1つにまとめることができます. 難しければ次のように「輪切り分割」してから置換積分してもできます.

【別解】 「輪切り」に分割すると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^e y^2 dx = \pi \int_{\pi}^0 y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta = -\pi \int_0^{\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta \quad \dots (**) \\ &= -\pi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta (-\sin \theta) e^{\cos \theta} d\theta = \pi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta e^{\cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

これもまた1つにまとまりました. これは反時計回りに移動するときはいつも成り立ちます (第6章参照). さて

$$\cos \theta = u \text{ とおくと, } -\sin \theta = du, \begin{array}{c|c} \theta & \\ \hline 0 & \rightarrow \pi \\ u & 1 \rightarrow -1 \end{array}.$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta e^{\cos \theta} d\theta = \pi \int_1^{-1} (1 - u^2) e^u du \quad \text{以下部分積分 (略)}$$

【参考】 C が t でパラメータ表示される閉曲線で、 x 軸と交わらず、 t が $\alpha \rightarrow \beta$ と変化するとき、 C 上の点 $P(x(t), y(t))$ が 反時計回りに一周するとき、 C で囲まれた立体の x 軸の周りの回転体の体積を V とする。このとき、(**) と同様に「輪切り分割」を用いて、

$$V_{\text{slice}} = \pi \int y^2 dx = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt \quad \dots \textcircled{1}$$

とまとめられる (第6章)。同様に、 C が第1象限にあるとき (*) と同様に「バウムクーヘン分割」を用いて、

$$V_{\text{baum}} = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \cdot x dy \quad \dots \textcircled{2}$$

とまとめられる。これは部分積分を用いて直接示すこともできる。

$$\begin{aligned} V_{\text{slice}} &= -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt = -\left[x \cdot y^2\right]_{\alpha}^{\beta} + \pi \int_{\alpha}^{\beta} x(y^2)' dt \\ &= x(\alpha) \cdot y(\alpha)^2 - x(\beta) \cdot y(\beta)^2 + \pi \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot 2y \frac{dy}{dt} dt \\ &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot y \frac{dy}{dt} dt \quad \left[x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta) \right] \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x \cdot y dy = V_{\text{baum}} \end{aligned}$$

— ここで「ちょっと変じゃないか？」と疑問を持ってほしい。 —

しかし、上の証明は部分積分の純粋な計算ですから C が第1象限にないときも上の関係:

$$-\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x \cdot y dy$$

は成り立つはず。実は C が第1または第2象限にあって、反時計回りに一周しているときは、 x 軸の周りの回転体の体積を V とすると、

$$V = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x \cdot y dy$$

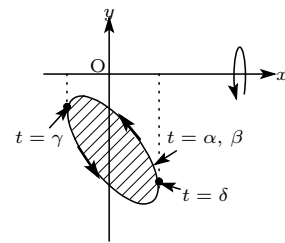
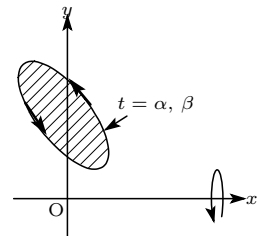
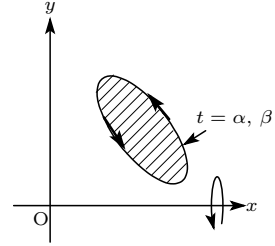
が成り立ちます。($x < 0$ のときでも、結局 x 成分の「差」を考えることになるのでバウムクーヘン分割により、右の式が成り立ちます。) そして C が第3または第4象限にあって、反時計回りに一周しているときは、

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt = -\int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x \cdot y dy$$

が成り立ちます。これは右上の図で、外側の曲線上を $P(x(t), y(t))$ が動くとき $\frac{dx}{dt} > 0$ となるので $\pi \int_{\gamma}^{\delta} y^2 \frac{dx}{dt} dt = V_{\text{外}}$ 、内側の曲線上を $P(x(t), y(t))$ が動くとき $\frac{dx}{dt} < 0$ となるので $\pi \int_{\alpha}^{\gamma} y^2 \frac{dx}{dt} dt + \pi \int_{\delta}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt = -V_{\text{内}}$ となることから

$$\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt = \pi \int_{\alpha}^{\gamma} y^2 \frac{dx}{dt} dt + \pi \int_{\gamma}^{\delta} y^2 \frac{dx}{dt} dt + \pi \int_{\delta}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt = V_{\text{外}} - V_{\text{内}} = V$$

となることで分かります。(さらに始点が図の位置と違っているようなときも成り立ちます。) 「バウムクーヘン分割」のときも直接図形的に納得できます。自分でやってみてください。(ここで述べたようなことは「公式」として覚える必要はまったくありません。必要に応じて「 t が増えたら、 x は減るから $\pi \int_{\alpha}^{\gamma} y^2 \frac{dx}{dt} dt$ は負だな」などと考えながら、自分で作れば十分です。)



第9章 回転体の体積 (斜回転体)

今度は回転軸が x 軸や y 軸に対し傾いているときです。注1)

例題 7

xy 平面において、放物線 $C: y = x^2 - x$ と直線 $l: y = x$ との原点 O 以外の交点を A とする。この直線と放物線によって囲まれる領域を、直線 OA を軸として回転して得られる立体の体積 V を求めよ。
(青山学院大・理工 1980)

まず放物線上の点を $P(t, t^2 - t)$ 、 P から直線 l に下ろした垂線の足を H 、 $\overline{OH} = X$ 、 $\overline{HP} = Y$ とおくと、

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} Y^2 dX \quad \dots \textcircled{1}$$

ここでさらに P から y 軸に平行な直線を引き、それと C の交点を Q とすると、 $Q(t, t)$ となるから

$$\overline{PQ} = t - (t^2 - t) = -t^2 + 2t$$

l と x 軸のなす角は 45° だから

$$\begin{cases} X = \overline{OQ} - \overline{HQ} = \sqrt{2}(\text{P の } x \text{ 成分}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{PQ} = \sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}}(-t^2 + 2t) = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2 \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-t^2 + 2t) \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

$X = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2$ と置いて置換積分を実行すると、 $dX = \sqrt{2}t dt$ 、 $\frac{X}{t} \begin{matrix} 0 \rightarrow 2\sqrt{2} \\ 0 \rightarrow 2 \end{matrix}$ 。よって、

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} Y^2 dX = \pi \int_0^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-t^2 + 2t) \right\}^2 \sqrt{2}t dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^2 (t^5 - 4t^4 + 4t^3) dt = \frac{8\sqrt{2}\pi}{15}$$

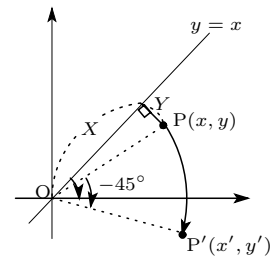
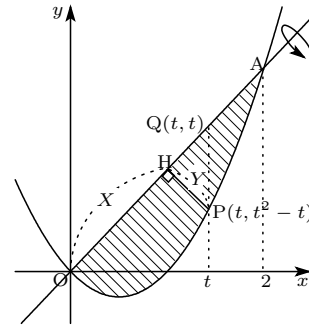
Comment

早い話が X と Y がパラメータ表示されるのでパラメータ表示された曲線 (反時計回り) の回転体の体積の公式: $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} Y^2 \frac{dX}{dt} dt$ で求めています。また X と Y は図形的に求めるのではなく、回転行列^{注2)} を使った方が早いです。 $P(x, y)$ を (-45°) 回転した点を $P'(x', y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + (t^2 - t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-t + (t^2 - t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^2 - 2t) \end{cases}$$



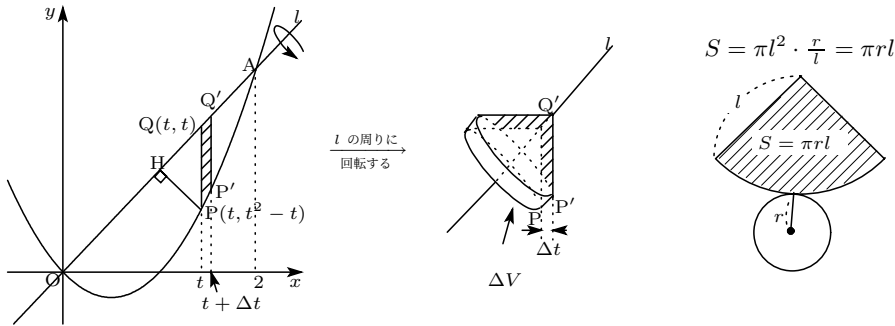
注1) 私は過去 30 年間の東大の問題を調べてみたのですが、斜回転体の問題は一間もありませんでした。好みじゃない?

注2) 原点の周りに、点 (x, y) を θ 回転させた点を $P'(x', y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

9.1 傘型分割

このように「パラメータ表示された曲線の回転体の体積の応用」と考えると、単純計算の問題になります。しかし「輪切り分割」でなく、「傘形分割」すれば、計算が「ちょっとだけ」簡単になります。



今、 t が $t + \Delta t$ に変化したときの P, Q をそれぞれ P', Q' とし、四角形 $PP'Q'Q$ を l の周りに回転させた立体を考えると、中央上図のような傘型になる。一般に半径 r 、母線が l の円錐の側面積は $S = \pi rl$ であるから、上の傘型は、傘の面積が $\pi \overline{PH} \cdot \overline{PQ}$ で、「厚み」が Δt の傘型と考えてよい。よって、

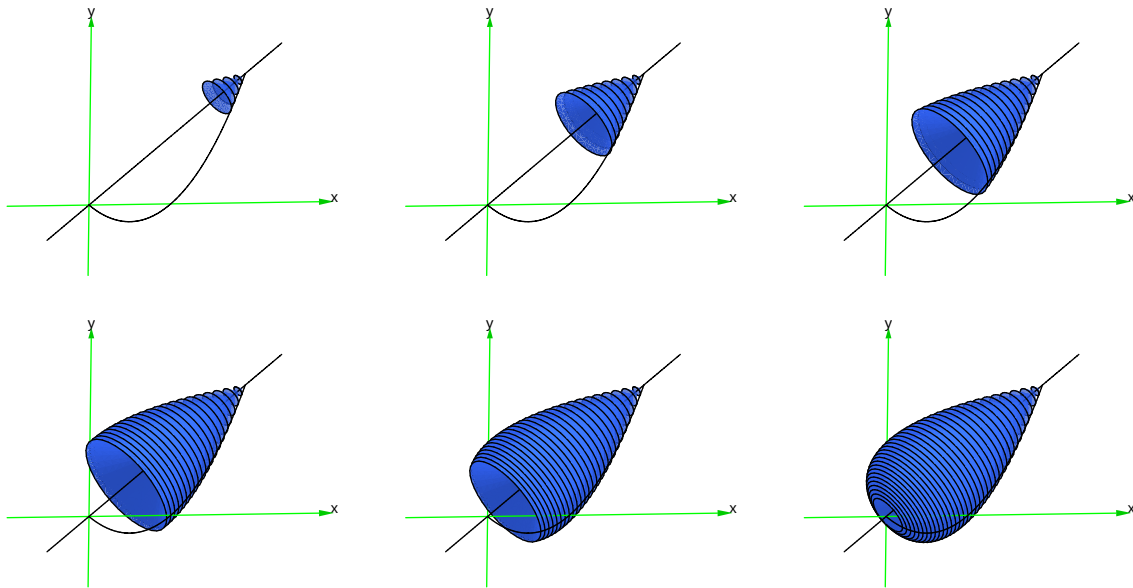
$$\Delta V = \pi \overline{PH} \cdot \overline{PQ} \cdot \Delta t = \pi(-t^2 + 2t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-t^2 + 2t)\Delta t \quad (\text{誤差は } \Delta t \text{ より高位の微小量}) \quad \cdots (*)$$

V は ΔV を集めたものだから

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \frac{\pi}{\sqrt{2}}(-t^2 + 2t)^2 \Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^2 (-t^2 + 2t)^2 dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2) dt = \frac{8\sqrt{2}\pi}{15}$$

先の計算と比べると、ほとんど同じですが $\frac{dX}{dt}$ がない分だけ簡単になっています。

【参考】傘型が集まって立体を作っていく様子



－ もしかして 丸暗記してませんか?－

さて 傘型の体積が「 $\Delta V = (\text{傘の表面積}) \times (\text{傘の厚み})$ 」となる理由が分かるでしょうか? ちょっと考えると、「傘が $\overline{QQ'}$ 平行移動してできる立体だから $\Delta V = (\text{傘の表面積}) \times \overline{QQ'}$ ではないか?」と思うかもしれませんが、しかし**表面に垂直な方向への移動量が高さ**になるので、ここでは「 $\Delta V = (\text{傘の表面積}) \times \Delta t$ 」となるわけです。すなわちうまい具合に $\frac{dV}{dt} = (\text{傘の表面積})$ となってくれるので、 x や y に関して直接積分すればよく、(パラメーター t に関して積分するときについてくる) $\frac{dX}{dt}$ の項がなくなるわけです。

－ 安易に納得できないのは良いことです－

表面に垂直な方向への移動量が高さだから「 $\Delta V = (\text{傘の表面積}) \times (\text{傘の厚み})$ 」と言われても、「そもそも底面は平面じゃないからおかしい」と言う人も多いことでしょう。この場合も「傘の表面を小さく分けて、それに垂直な柱面の集まりと考える」ことで解決しますが、直接、円錐の体積の公式を使って示してみましょう。

底面が r 、高さが h 、母線が l の円錐の体積は $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ です。ここで r, h, l の 長さの比を変えないで r, h, l をそれぞれ $\Delta r, \Delta h, \Delta l$ 増加させたとき、 V の増加量は

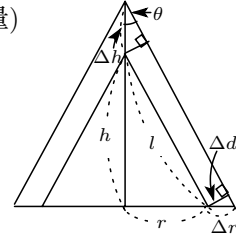
$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{1}{3}\pi(r + \Delta r)^2(h + \Delta h) - \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi(r^2 h + 2rh\Delta r + r^2\Delta h + 2r\Delta r\Delta h + h(\Delta r)^2 + (\Delta r)^2\Delta h) - \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi(2rh\Delta r + r^2\Delta h) \quad (\text{誤差は}\Delta r \text{より高位の微小量}) \\ &= \frac{1}{3}\pi\left(2rl \cdot \frac{h}{l}\Delta r + rl \frac{r}{l}\Delta h\right)\end{aligned}$$

ここで右図の角を θ 、傘の厚みを Δd とすると、図より

$$\frac{h}{l}\Delta r = \cos\theta\Delta r = \Delta d, \quad \frac{r}{l}\Delta h = \sin\theta\Delta h = \Delta d$$

$$\therefore \Delta V = \frac{\pi}{3}(2rl\Delta d + rl\Delta d) = \pi rl\Delta d \quad (\text{誤差は}\Delta d \text{より高位の微小量})$$

このように「傘型分割」はかなり理解するのが難しく、かつ「パラメータの積分に持ち込む方法」と比べて $\frac{dX}{dt}$ がなくなるだけです。「労多くして功少なし」という感じの公式ですが、まとめておきます。



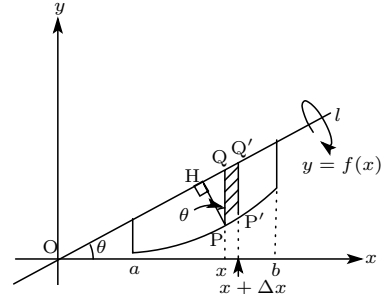
傘型分割

l は原点を通る x 軸となす角が θ ($0 < \theta < 90^\circ$) の直線とする。 $y = f(x)$ と $l, x = a, x = b$ ($a < b$) で囲まれる領域を l の周りに回転した立体の体積を V とすると、 V は、図の斜線部分を回転したときにできる傘型の体積を集めたものだから

$$\Delta V = (\text{傘の面積}) \times (\text{厚み}) = \pi \overline{PQ} \cdot \overline{PH} \Delta x = \pi \overline{PQ}^2 \cos\theta \Delta x$$

よって

$$V = \cos\theta \times \pi \int_a^b \overline{PQ}^2 dx$$



ここで $\overline{PQ} = |f(x) - (\tan\theta)x|$ ですぐ求まるので、この積分は x, y 軸の周りの回転体の体積とほとんど同様にもとまります。 $\theta \rightarrow 0$ のときに、 x 軸の周りの回転体の公式と一致することも分かります。また θ が鈍角のときでも同様に考えることができます。 ($\cos\theta$ の代わりに $|\cos\theta|$ 倍する.)

まずはウォーミングアップです.

例題 8

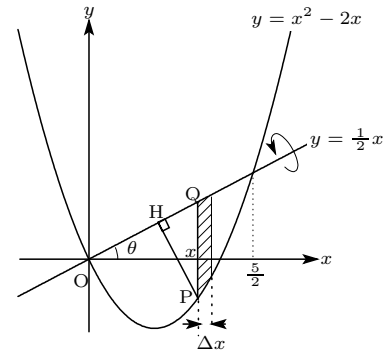
$C: y = f(x) = x^2 - 2x$ と 直線 $l: y = \frac{1}{2}x$ で囲まれた領域を この直線の周りに回転した立体の体積 V を求めよ. (大阪教育大)

$y = \frac{1}{2}x$ と x 軸のなす角を θ とすると, $\tan \theta = \frac{1}{2}$ だから $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$. さらに C 上に, 点 $P(x, f(x))$, l 上に $Q(x, \frac{1}{2}x)$ をとり, P から l に下ろした垂線の足を H とする. x が Δx 増加したときに線分 PQ が移動する微小領域を l の周りに回転すると, 母線が $\overline{PQ}$, 半径が $\overline{PH}$, 厚みが Δx の傘型ができるので, その体積を ΔV とすると

$$\Delta V = (\text{傘の面積}) \times (\text{厚み}) = \pi \overline{PQ} \cdot \overline{PH} \Delta x = \pi \overline{PQ}^2 \cos \theta \Delta x$$

よって

$$\begin{aligned} V &= \cos \theta \times \pi \int_0^{\frac{5}{2}} \left\{ \frac{1}{2}x - (x^2 - 2x) \right\}^2 dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \pi \int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{5}{2}x - x^2 \right)^2 dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \pi \int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{25}{4}x^2 - 5x^3 + x^4 \right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \pi \left[\frac{25}{12}x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{x^5}{5} \right]_0^{\frac{5}{2}} = \frac{125\sqrt{5}}{96} \pi \end{aligned}$$



例題 9

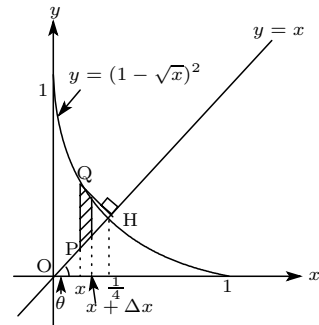
$C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と 直線 $l: y = x$ および y 軸で囲まれた領域を l の周りに回転した立体の体積 V を求めよ. (電気通信大 1985)

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \iff y = (1 - \sqrt{x})^2$. また $y = x$ と x 軸のなす角を θ とすると, $\cos \theta = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 線分 PQ は全て領域の中に入っているのので, x が Δx 増加したときに線分 PQ が移動する微小領域を l の周りに回転すると, 母線が $\overline{PQ}$, 半径が $\overline{PH}$, 厚みが Δx の傘型ができる. その体積を ΔV とすると

$$\Delta V = (\text{傘の面積}) \times (\text{厚み}) = \pi \overline{PQ} \cdot \overline{PH} \Delta x = \pi \overline{PQ}^2 \cos \theta \Delta x$$

よって

$$\begin{aligned} V &= \cos \theta \times \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \overline{PQ}^2 dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{4}} \left\{ (1 - \sqrt{x})^2 - x \right\}^2 dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{4}} (1 - 4\sqrt{x} + 4x) dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[x - \frac{3}{8}x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{48} \pi \end{aligned}$$



どちらの問題も, 「線分 PQ は全て領域の中に入っている」 ので, 「傘形」 ができ, すぐできました.

今度はちょっと難しい問題をやってみましょう。自分で考えた後、解答を見てください。

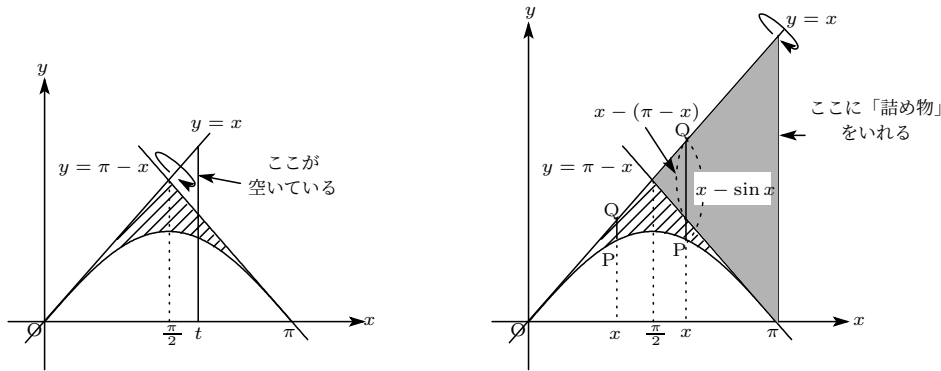
例題 10

$y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ と $(0,0), (\pi,0)$ におけるこの曲線の接線で囲まれた領域を、直線 $l: y = x$ の周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ。 (宮城教育大 1976)

さっきの公式の形と違いますね。やはり公式は丸暗記しては無意味です。違いは $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ において $x = t$ と $y = f(x) = \sin x$ の間に「隙間」ができていますので、回したときに「傘型」にならないで「真ん中に穴の開いた傘型」になる点です。

— ここで x 軸の周りの回転体を思い出して見ましょう。 —

x 軸の周りの回転体でも、 x 軸との間が空いているときは、切り口がドーナッツになるので、外側の体積から内側の体積を引きました。同じように $y = x$ との間を詰めて、領域 $A: \sin x \leq y \leq x$ ($0 \leq x \leq \pi$) をつくり、この領域を回転した立体の体積 $V_{\text{外}}$ から、「詰め物」の領域 $B: -x + \pi \leq y \leq x$ ($\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$) を回転した立体の体積 $V_{\text{内}}$ を引けばよいです。



$y = x$ と x 軸のなす角は 45° だから、

$$V_{\text{内}} = (\cos 45^\circ) \times \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \overline{PQ}^2 dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \{x - (\pi - x)\}^2 dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x - \pi)^2 dx = \frac{\pi^4}{6\sqrt{2}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$V_{\text{外}} = (\cos 45^\circ) \times \pi \int_0^{\pi} \overline{PQ}^2 dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} (x - \sin x)^2 dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} (x^2 - 2x \sin x + \sin^2 x) dx \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= [x(-\cos x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx = \pi + [\sin x]_0^{\pi} = \pi \\ \int_0^{\pi} \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

よって

$$V_{\text{外}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{3}{2}\pi \right) = \frac{\pi^4}{3\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\pi^2 \quad \dots \textcircled{2}'$$

ゆえに

$$V = V_{\text{外}} - V_{\text{内}} = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi^4 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi^2$$

【別解】(パラメータ積分)

計算は多少面倒くさいですが, 式の立てやすいのはこちらの方かもしれません. $y = \sin x$ 上の点を $P(x, y)$, P を原点を中心に (-45°) 回転した点を $P'(X, Y)$ とおくと,

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} Y^2 dX$$

回転行列を使って

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$P(t, \sin t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) とおけるから

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \sin t) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-t + \sin t) \end{cases}$$

$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \sin t)$ とおくと, $dX = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \cos t)dt$, $\left. \begin{matrix} X \\ t \end{matrix} \right|_0^0 \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}} \rightarrow \pi$. 置換積分を実行して

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} Y^2 dX = \pi \int_0^\pi \frac{1}{2}(-t + \sin t)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \cos t)dt \quad (\text{以下略})$$

【参考】「傘型分割」と違って「 $\frac{dX}{dt}$ がかかる」のが違います. しかし, 上の式から, $1 + \cos t = 2 + (-t + \sin t)'$ の関係を使って, 直接「傘型分割」の式を出すこともできます. $I = \int_0^\pi (-t + \sin t)^2 \cdot (1 + \cos t)dt$ とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (-t + \sin t)^2 \cdot \{2 + (-t + \sin t)'\} dt \\ &= 2 \int_0^\pi (-t + \sin t)^2 dt + \int_0^\pi (-t + \sin t)^2 \cdot (-t + \sin t)' dt \\ &= 2 \int_0^\pi (-t + \sin t)^2 dt + \left[\frac{(-t + \sin t)^3}{3} \right]_0^\pi \\ &= 2 \int_0^\pi (-t + \sin t)^2 dt - \frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

☞ 置換積分

よって,

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} I = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^\pi (-t + \sin t)^2 dt - \frac{\pi^4}{6\sqrt{2}}$$

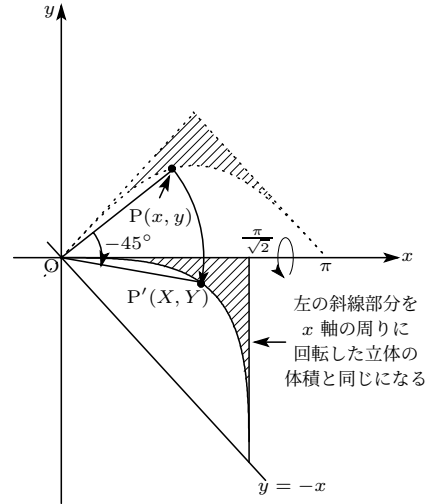
これは, 前頁の ②, ① の式と一致します. 一般に $(-\theta)$ の回転で $P(t, f(t))$ が移る点を (X, Y) とおくと,

$$\begin{cases} X = x \cos \theta + y \sin \theta = t \cos \theta + f(t) \sin \theta \\ Y = -x \sin \theta + y \cos \theta = -t \sin \theta + f(t) \cos \theta \end{cases}$$

ゆえに

$$\frac{dX}{dt} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{dY}{dt} = (\cos \theta + f'(t) \sin \theta) - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (-\sin \theta + f'(t) \cos \theta) = \frac{1}{\cos \theta}$$

これから $\frac{dX}{dt} = \tan \theta \frac{dY}{dt} + \frac{1}{\cos \theta}$ の関係が成り立つので, このやり方でいつでも「傘型積分」の式が出ます.

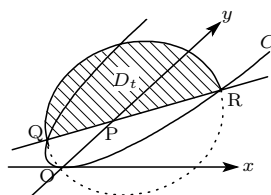


第10章 非回転体の体積 (「軸 $\nparallel$ 断面」のとき)

10.1 図形が移動してできる立体の体積

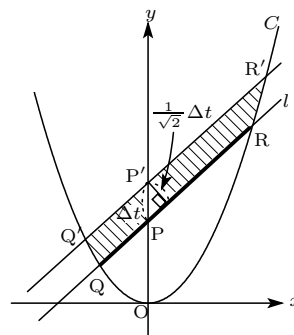
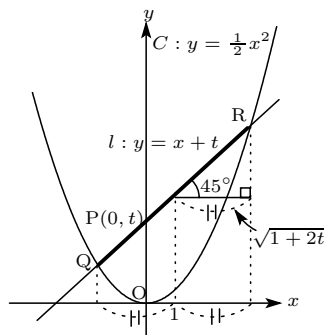
例題 11

放物線 C を $y = \frac{1}{2}x^2$, 点 P は y 軸上の点で, P を通り傾きが 1 の直線を l , l と C が 2 点で交わる時, その交点を Q, R とし, 線分 QR を直径の両端とする円を xy 平面に垂直に立てて作る. 点 P が y 軸上で $y = 0$ から $y = 2$ まで動くとき, この円が動いてできる立体の体積を V とする. 次の問いに答えよ.



(1) $P(0, t)$ ($0 \leq t \leq 2$) とするとき, 線分 QR を直径の両端とする円 D_t の面積 $S(t)$ を求めよ.

(2) V を求めよ.



(1) l の式は $y = x + t$. これと C の式を連立して

$$\frac{1}{2}x^2 = x + t \iff x^2 - 2x - 2t = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1 + 2t}$$

よって円の半径の長さは

$$\frac{1}{2}\overline{QR} = \frac{\sqrt{2}}{2}|P \text{ と } Q \text{ の } x \text{ 成分の差}| = \frac{\sqrt{2}}{2} |(1 + \sqrt{1 + 2t}) - (1 - \sqrt{1 + 2t})| = \sqrt{2(1 + 2t)}$$

ゆえに

$$S(t) = \pi(\sqrt{2(1 + 2t)})^2 = (2 + 4t)\pi$$

(2) t が Δt だけ増加したとき, 円 D_t が移動してできる立体の体積を ΔV とおくと, この立体は底面が円 D_t , 高さが $\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta t$ の円柱とみなしてよいから

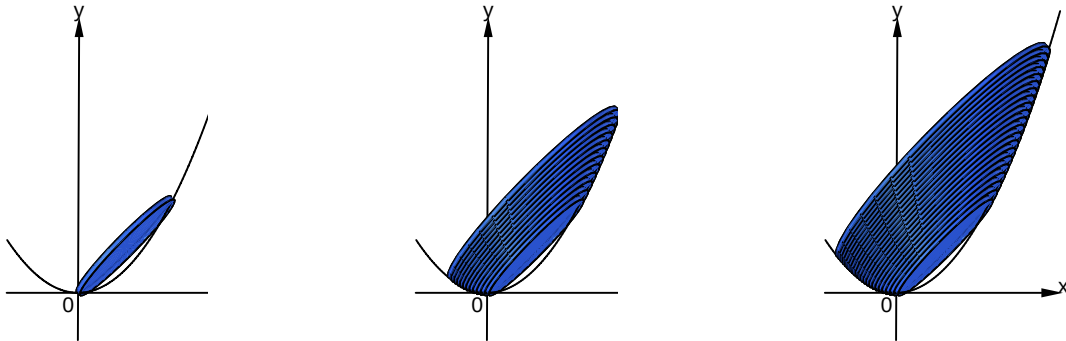
$$\Delta V = S(t) \times \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta t + o(\Delta t) \quad \dots (*)$$

t の区間 $[0, 2]$ を, 幅が Δt の小区間にわけて, それに対する ΔV を加えたものが V と一致するので

$$V = \sum \Delta V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum S(t) \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta t = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}} S(t) dt = \int_0^2 \frac{(2+4t)}{\sqrt{2}} dt = 6\sqrt{2}$$

[ここで $V = \int_0^2 S(t) dt$ ではないことに注意!]

【注意】立体の概形は次の図のようになりますが, 例によって概形は必要ありません. $S(t)$ だけ分かれば十分です. しかし $S(t)$ は **軸に垂直な断面の面積でない**ので $V = \int_0^2 S(t) dt$ とはなりません.



軸に垂直な断面が考えにくいとき

「断面積を積分すれば体積」ではありません. 断面が軸に直交してなければ積分しても体積になりません. そして問題によっては「軸に直交してない断面」の面積の方が求めやすいことがあります. そのような時は

$$\Delta V = f(t) \Delta t \text{ (誤差は } \Delta t \text{ より高位の微小量)}$$

の形を見つけ

$$V = \sum \Delta V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum f(t) \Delta t = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

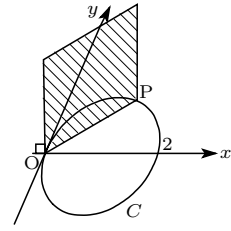
で求めます.

$S(t)$ を求めやすい t をうまく見つけるのがポイントです. 今までのような「公式らしい公式」は存在しません. 実力の必要なタイプの問題と言えるでしょう.

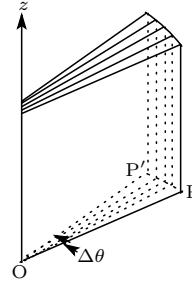
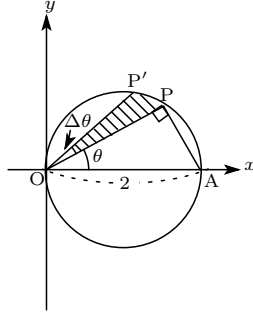
今度は、「スライス集め」ではなく「ショートケーキ集め」です。まず自分でやってみてください。

例題 12

円 C を $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 点 P は C 上の点で, 線分 OP を一辺とした正方形を図のように xy 平面に垂直に立てて作る. 点 P が C 上を一周するとき, この正方形が動いてできる立体の体積 V を求めよ.



— 今度は円の中心を極として $x = 1 + \cos \theta, y = \sin \theta$ としてはうまくいきません。 —



$\overrightarrow{OP}$ の偏角を θ とすると, 図より $\overline{OP} = 2 \cos \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) と極表示されます. 注1) θ が $\Delta \theta$ 増加したときの P の位置を P' , またこのとき正方形が動いてできる小柱体の体積を ΔV とおく. この小柱体は底面が扇形 OPP' , 高さが $\overline{OP}$ の小三角柱 (ショートケーキ) と近似してよいので

$$\Delta V = (\text{扇形の面積}) \times \overline{OP} + o(\Delta \theta) \quad \dots (*)$$

半径 r , 中心角 θ の扇形の面積は $\frac{1}{2}r^2\theta$ だから (「極表示された曲線の面積」参照)

$$(\text{扇形の面積}) = \frac{1}{2}\overline{OP}^2 \Delta \theta + o(\Delta \theta)$$

よって

$$\Delta V = \frac{1}{2}\overline{OP}^2 \Delta \theta \times \overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{OP}^3 \Delta \theta = \frac{1}{2}(2 \cos \theta)^3 \Delta \theta$$

となり誤差は $\Delta \theta$ より高位の微小量である. ゆえに

$$V = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \sum 4 \cos^3 \theta \Delta \theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^3 \theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)' (1 - \sin^2 \theta) d\theta$$

よって $\sin \theta = t$ とおくと, $\cos \theta d\theta = dt, \frac{\theta}{t} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \rightarrow \frac{\frac{\pi}{2}}{1}$.

$$V = 8 \int_0^1 (1 - t^2) dt = 8 \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{16}{3}$$

注1) $\overline{OP}$ が問題なので原点を極として極表示します. また, 円は, 円周上の一点 A を極とすれば $r = 2R \cos(\theta - \alpha)$ (R は円の半径, α は A の位置によって定まる定数) の形にいつでも極表示できます.

Comment

(*) の証明はハサミウチで厳密にできます. 区間 $[t, t + \Delta t]$ における小円柱の高さの最小値を m , 最大値を M , また扇形 OPP' の面積を ΔS とすると,

$$m \times \Delta S \leq \Delta V \leq M \times \Delta S$$

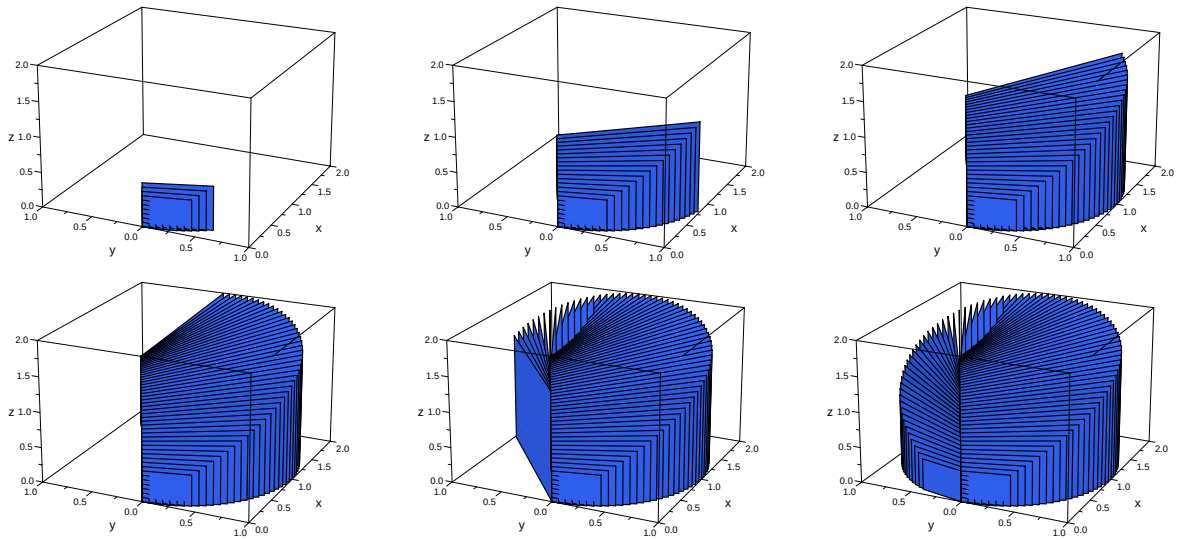
各辺を $\Delta\theta$ で割って

$$m \frac{\Delta S}{\Delta\theta} \leq \frac{\Delta V}{\Delta\theta} \leq M \frac{\Delta S}{\Delta\theta}$$

$\Delta\theta \rightarrow 0$ のとき, $m \rightarrow \overline{OP}$, $M \rightarrow \overline{OP}$ だから, $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta\theta} = \overline{OP} \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\theta}$. よって

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta V - \overline{OP} \Delta S}{\Delta\theta} = 0 \iff \Delta V = \overline{OP} \Delta S + o(\Delta\theta) \quad \text{Q.E.D.}$$

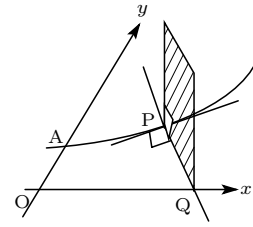
【参考】下の図は立体が生成されていく様子を描いたものです.



今度は「スライス」でもなく、「ショートケーキ」でもない問題です。

例題 13

曲線 C を $y = e^x$, 点 P は C 上の点で, P における C の法線 l と x 軸との交点を Q とし, 線分 PQ を一辺とした正方形を図のように xy 平面に垂直に立てて作る. このとき次の問いに答えよ.



(1) $P(t, 0)$ で $t \geq 0$ のとき, C と l と x 軸, y 軸で囲まれる領域の面積を $S(t)$ とする. このとき $S(t)$ を求めよ.

(2) $A(0, 1)$, $B(1, e)$ とする. 点 P が C 上を A から B まで移動するとき, この正方形が動いてできる立体の体積 V を求めよ.

(1) P における法線の傾きは $-\frac{1}{f'(t)} = -\frac{1}{e^t}$ だから, l の式は

$$y - e^t = -\frac{1}{e^t}(x - t) \iff y = -\frac{1}{e^t}x + \frac{t}{e^t} + e^t$$

$y = 0$ とおくことにより $Q(t + e^{2t}, 0)$. さらに P から x 軸に下ろした垂線の足を H とすると

$$S(t) = \int_0^t e^x dx + \frac{1}{2} \triangle PQH = e^t - 1 + \frac{1}{2} e^{2t} \cdot e^t = \frac{1}{2} e^{3t} + e^t - 1$$

(2) t が Δt 増加したときの P, Q を P', Q' とし, その間に正方形の移動してできる小柱体の体積を ΔV , 線分 PQ の移動してできる領域の面積を ΔS とおくと, ΔS は $S(t)$ の増加量と等しいから (1) より

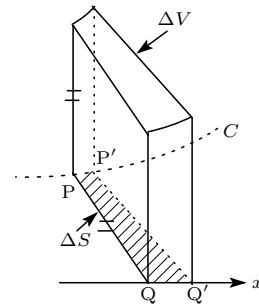
$$\Delta S = S'(t) \Delta t = \left(\frac{3}{2} e^{3t} + e^t \right) \Delta t$$

誤差は Δt より高位の微小量である. また

$$\overline{PQ} = \sqrt{(e^{2t})^2 + (e^t)^2} = e^t \sqrt{e^{2t} + 1}$$

ΔV は 底面積が ΔS , 高さが $\overline{PQ}$ の小柱体と近似できるので

$$\Delta V \approx \overline{PQ} \Delta S = e^t \sqrt{e^{2t} + 1} \left(\frac{3}{2} e^{3t} + e^t \right) \Delta t$$



誤差は Δt より高位の微小量である. よって

$$V = \int_0^1 e^t \sqrt{e^{2t} + 1} \left(\frac{3}{2} e^{3t} + e^t \right) dt = \int_0^1 \sqrt{e^{2t} + 1} \left(\frac{3}{2} e^{2t} + 1 \right) e^{2t} dt$$

$$\sqrt{e^{2t} + 1} = u \text{ とおくと, } e^{2t} + 1 = u^2, 2e^{2t} dt = 2u du, \left. \frac{t}{u} \right|_{\sqrt{2}}^0 \rightarrow \frac{0}{\sqrt{e^2 + 1}}.$$

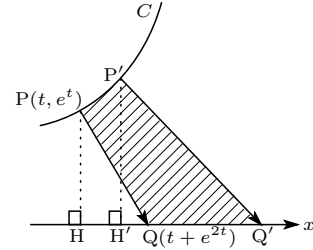
$$V = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2 + 1}} u^2 \left\{ \frac{3}{2} (u^2 - 1) + 1 \right\} du = (e^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{3}{10} e^2 + \frac{2}{15} \right) - \frac{13\sqrt{2}}{15}$$

Comment

先の例題と違い, 底面は扇形では近似できないので, ΔS を求まるところが難しい. ところが $S(t)$ は逆に簡単にもとまるので, そこから ΔS を求めた. 直接求めると次のようになる.

【別解】(その 1) $\Delta x = h$ とおくと

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_t^{t+h} e^x dx + \triangle P'H'Q' - \triangle PHQ \\ &= \left[e^x \right]_t^{t+h} + \frac{1}{2} e^{t+h} \cdot e^{2(t+h)} - \frac{1}{2} e^t \cdot e^{2t} \\ &= e^{t+h} - e^t + \frac{1}{2} (e^{3(t+h)} - e^{3t}) \\ &= e^t \cdot (e^h - 1) + \frac{1}{2} e^{3t} (e^{3h} - 1)\end{aligned}$$



ここで $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ だから, $e^h = 1 + h$ (誤差は h より高位の微小量). よって,

$$\Delta V = e^t \cdot h + \frac{1}{2} e^{3t} \cdot 3h + o(\Delta h) = \left(e^t + \frac{3}{2} e^{3t} \right) \Delta x + o(\Delta x)$$

ここで, 誤差は h より高位の微小量となるので同じ結果になった. また, 以前述べたように

$$\Delta S = (\text{PP'の弧長}) \times \overline{PQ} + \frac{1}{2} \overline{PQ}^2 \Delta \theta + o(\Delta t) \quad (\text{ただし } \Delta \theta \text{ は } \overrightarrow{PQ} \text{ と } \overrightarrow{P'Q'} \text{ のなす角})$$

を使ってもできるが $\Delta \theta$ の計算がちよっと面倒である. むしろ 四角形の面積と見た方がよい.

【別解】(その 2) $\Delta S = \triangle PQP' + \triangle QQ'P'$ とみる. $\overrightarrow{QP} = (-e^{2t}, e^t)$, $\overrightarrow{QP'} = (h - e^{2t}, e^{t+h})$ だから,

$$\triangle PQP' = \frac{1}{2} \left| e^t (h - e^{2t}) - (-e^{2t}) e^{t+h} \right| = \frac{1}{2} e^{3t} (e^h - 1) + \frac{h}{2} e^t$$

また

$$\triangle QQ'P' = \frac{1}{2} (e^{2(t+h)} + h - e^{2t}) e^{t+h} = \frac{1}{2} e^{3t+h} (e^{2h} - 1) + \frac{h}{2} e^{t+h}$$

よって

$$\Delta S = \triangle PQP' + \triangle QQ'P' = \frac{1}{2} e^{3t} (e^h - 1) + \frac{h}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t+h} (e^{2h} - 1) + \frac{h}{2} e^{t+h}$$

先に述べたように $e^h - 1 = h$ (誤差は h より高位の微小量) だから,

$$e^{2h} - 1 = 2h, \quad e^{3t+h} = e^{3t} \cdot e^h = e^{3t} (1 + h), \quad e^{t+h} = e^t \cdot e^h = e^t (1 + h)$$

誤差はすべて h より高位の微小量である. よって

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{1}{2} e^{3t} h + \frac{h}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{3t} (1 + h) \cdot 2h + \frac{h}{2} e^t (1 + h) \\ &= \left(e^t + \frac{3}{2} e^{3t} \right) h + \left(e^{3t} + \frac{1}{2} e^t \right) h^2 \\ &\quad \left(e^t + \frac{3}{2} e^{3t} \right) h\end{aligned}$$

誤差はすべて h より高位の微小量であるので, 同じになった. 極限の考えはこういうときにこそ役立つ.

—「 $S(t)$ を求めたときどうして簡単になったか分かりますか?」—

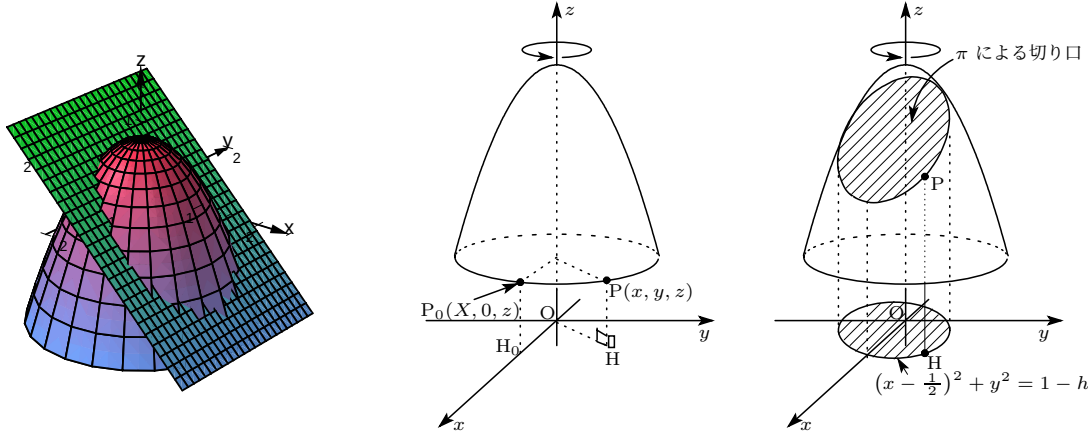
$S(t)$ を求めるときは x 軸に垂直に切っています. $f(x) = e^x$ ですからその方が面積を求めやすかったのは当たり前です. つまり本質的には【解答】は【別解】(その 1) と同じやり方をしています. その他に「 e^x の積分は慣れているが, e^x の極限はあまり慣れていない」ということもあるでしょう.

10.2 立体を「上手に」切断する

今度は「うまく」切断して体積を求めます。前節の例題(「スライス集め」)は、この問題の準備でした。今度は「細かく切る(微分する)」→「集める(積分する)」という手順になります。

例題 14

放物線 $C: z = \frac{3}{4} - x^2$ を z 軸の周りに回転して得られる曲面 K を、原点を通り回転軸と 45° の角をなす平面 H で切る。曲面 K と平面 H で囲まれた立体の体積を求めよ。(東大・理系 1983 年)



平面 H を $H: z = -x$ としても一般性を失わない。^{注2)} さてこのときどういう平面で立体を切りますか? $x = k, y = k$ で切ってもできなくはないですが, ($z = k$ は最悪です。) ここでは, H に平行な平面 $\pi: z = -x + h$ で切った断面を考えて見ます。しかし, その前にまず曲面 K の方程式を立てないといけません。曲面 K 上の点を $P(x, y, z)$, P から xy 平面に下ろした垂線の足を H , P を z 軸を中心に回転した円と xz 平面の交点を $P_0(X, 0, z)$, P_0 から xy 平面に下ろした垂線の足を H_0 とすると, $|X| = \overline{OH_0} = \overline{OH} = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。また P_0 は C 上の点だから $z = \frac{3}{4} - X^2$ 。ゆえに P の方程式は $z = \frac{3}{4} - (x^2 + y^2)$ 。すなわち K の方程式は

$$K: z = \frac{3}{4} - (x^2 + y^2) \quad \dots \textcircled{1}$$

平面 $\pi: z = -x + h$ の式と連立すると,

$$-x + h = \frac{3}{4} - (x^2 + y^2) \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 - h \quad \dots \textcircled{2}$$

$1 - h > 0$ のとき, これは xy 平面上の円を表します。連立したので, 平面 π と曲面 K の交線上の点 (x, y, z) の x, y 成分のみたす条件を表しています。すなわち**これは交線の xy 平面への正射影の方程式です**。^{注3)} よって「 K を π で切った切り口を xy 平面に正射影すると半径が $\sqrt{1-h}$ の円になる」ことを表しています。(上右図) そして xy 平面と平面 π のなす角は 45° ですから, 平面 π 上の図形を xy 平面に正射影した図形の面積は $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍になります。すなわち, K を平面 π による切り口の π 上における面積を $S(h)$, その正射影の面積を $S_{proj}(h)$ とすると

$$S(h) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = S_{proj}(h) \quad \therefore S(h) = \sqrt{2} \times S_{proj}(h) = \sqrt{2}\pi(1-h) \quad \dots \textcircled{3}$$

注2) 普通は $z = x$ にするのですが, CG ではこちらの方が「きれいに見える」ので, $z = -x$ にしました。

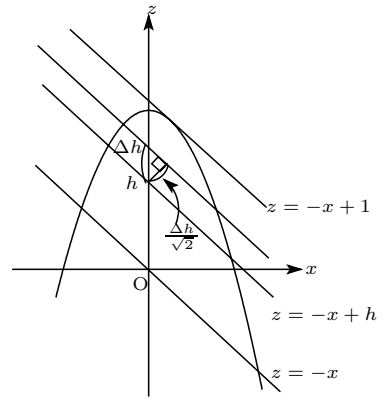
注3) xy 平面への正射影とは, 点 $Q(x, y, z)$ に対し, xy 平面に下ろした垂線の足 $H(x, y, 0)$ を対応させる変換です。

平面 $z = -x + h, z = -x + (h + \Delta h)$ の間の距離は $\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta h$ だから、
2 平面にはさまれる K の体積を ΔV とすると

$$\Delta V = S(h) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta h + o(\Delta h)$$

よって求める体積 V は

$$V = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} S(h) dh = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\pi(1-h) dh = \frac{\pi}{2}$$



Comment

この問題は勉強になる点をたくさん含んでいます。

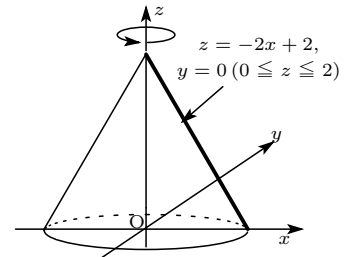
1 回転体の方程式

教科書では空間の方程式は、直線、平面と球ぐらいですがその他にも簡単に方程式で表される図形があります。そのひとつの例は回転体です。 xz 平面上で $x \geq 0$ の領域にある曲線 $z = f(x)$ を z 軸の周りに回転したときにできる方程式は、解説と同様に考えて

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

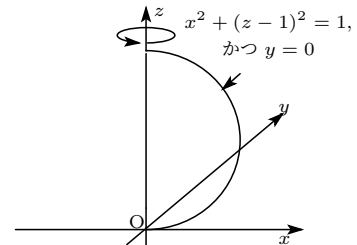
例 1 例えば、 xy 平面内の円: $x^2 + y^2 = 1$ が底面で頂点が $A(0, 2)$ の円錐の側面は、 xz 平面上の直線: $z = 2 - 2x$ ($0 \leq z \leq 2$) を z 軸の周りに回転した図形だから

$$z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \text{ かつ } 0 \leq z \leq 2$$



例 2 xz 平面上の円: $x^2 + (z - 1)^2 = 1$ を z 軸の周りに回転した図形の式は

$$(x^2 + y^2) + (z - 1)^2 = 1 \iff x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

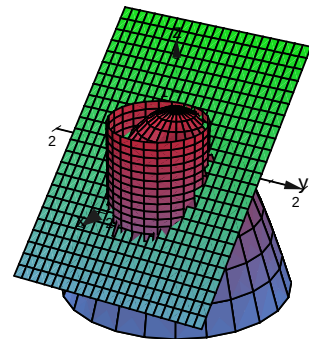


もちろんこれは中心が $(0, 0, 1)$ で半径が 1 の球の式と一致します。

2 空間の曲面の交線

よっぽど変な曲面でなければ、2つの空間の曲面が交わると、空間の曲線になります。例えば「球と平面の交線は円」、「円錐と平面の交線は二次曲線(楕円, 双曲線, 放物線など)」、「平面と平面の交線は直線」などです。一般に空間の2曲面が $f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0$ と表されているとき、交線の方程式は $f(x, y, z) = 0$ かつ $g(x, y, z) = 0$ で、これから z を消去した式は交線の xy 平面への正射影の方程式と一致します。

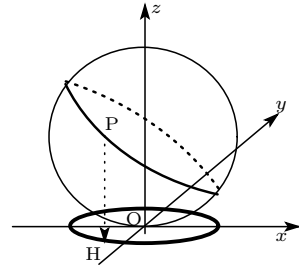
例えば、前頁の ② より、 $h = \frac{1}{2}$ のとき、正射影は $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ ですが、右図は K, 平面 $\pi: z = -x + \frac{1}{2}$ それと直円柱 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ を描いたものです。きれいに交線が一致していることが分かります。



例1 球 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ と平面 $z = -x + 1$ の交線の式は

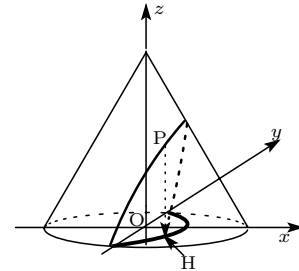
$$x^2 + y^2 + (-x)^2 = 1 \iff 2x^2 + y^2 = 1$$

交線は xy 平面上のだ円となります。ここで注意しないといけないのは、交線は平面 $z = -x + 1$ 上では「円」なのですが、 xy 平面に正射影すると「楕円」になることです(後述)。



例2 底面が $x^2 + y^2 \leq 1$, 頂点が $(0, 2)$ の円錐の側面は(先に述べたように) $z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ となる。これと平面 $z = 2x$ の交線の xy 平面への正射影は

$$\begin{aligned} 2x &= 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \iff x - 1 = -\sqrt{x^2 + y^2} \\ &\iff (x - 1)^2 = x^2 + y^2, x - 1 \leq 0 \\ &\iff x = \frac{1 - y^2}{2} \end{aligned}$$



これは放物線です。一般に円錐を母線と平行な平面で切ると、切り口は放物線、それ以外は平面と軸の傾斜角によって、切り口は楕円か双曲線になります。また頂点を通る平面で切ると切り口は2本の直線になります。^{注4)}

ちなみに交線の方程式が「 $f(x, y, z) = 0$ かつ $g(x, y, z) = 0$ の実数解」と言うのは、 xy 平面上の曲線の交点の求め方と全く同じです。また、 z を消去した $F(x, y) = 0$ という形の方程式は、交点 x, y 成分のみたす方程式ですからもちろん xy 平面への正射影の式と一致します。^{注5)} すなわち、これは「公式」ではありません。もっと基本的なものです。

3 正射影と面積

平面 β への正射影と言うのは、 P に対し P から β に下ろした垂線の足 H を対応させる変換です。例えば xy 平面への正射影は $P(x, y, z)$ に対し $H(x, y, 0)$ を対応させる変換です。そして、2平面 α と β のなす角が θ のとき、 α 上の図形の面積が S でありそれを平面 β に正射影した図形の面積を S' とすると

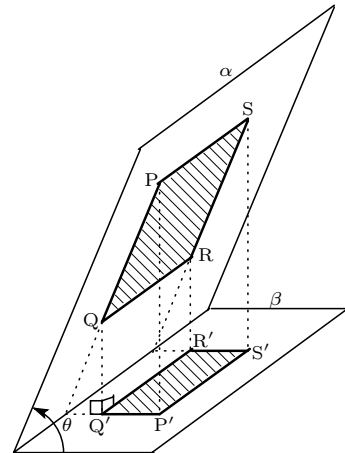
$$S' = \cos \theta \times S$$

となります。これは α と β の交線を l , $\square PQRS$ が α 上の長方形で $\overrightarrow{PQ} \perp l$, $\overrightarrow{PS} \parallel l$ となるときに

$$\begin{cases} \overline{P'Q'} = \cos \theta \times \overline{PQ}, \\ \overline{P'S'} = \overline{PS} \end{cases}$$

したがって、交線に水平な一辺を持つ長方形のときには、たしかに

$$S' = \overline{P'Q'} \times \overline{P'S'} = \cos \theta \cdot \overline{PQ} \times \overline{P'S'} = \cos \theta \times S$$



注4) ただし一点になったり、一本の直線になったりという「例外」もある。

注5) 同様に x を消去した $G(y, z) = 0$ というのは yz 平面への正射影の式を、 y を消去した $G(z, x) = 0$ というのは zx 平面への正射影の式を表します。

一般の図形のときは、 l と垂直な断面の長さが $\cos \theta$ 倍になることから、積分によって明らかです。また正射影は「直線 l に垂直な方向への $\cos \theta$ 倍の拡大」となっているので、円は楕円に移ります。

4

「切り方をいろいろ試してから、実際に計算しよう」

このような問題を見たとき、すぐにどのような切り方をすればよいかすぐ分からないことが多いです。こういうときは「始めちよろちよろ、中ぱっば」で、**まず大まかに試してみて、ある程度方針が立ってから、実際に細かい計算に入ります。**^{注6)} さて K の方程式は ① より

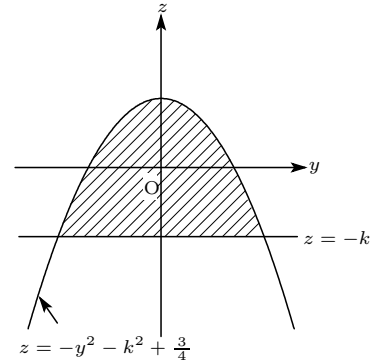
$$K: z = \frac{3}{4} - (x^2 + y^2)$$

です。ここでまず $x = k$ で切ってみます。 $x = k$ と連立して

$$z = \frac{3}{4} - k^2 - y^2$$

H: $z = -x$ の式と $x = k$ を連立して

$$z = -k$$



よって、放物線 $z = -y^2 - k^2 + \frac{3}{4}$ と直線 $z = -k$ で囲まれる領域 (上図) が $x = k$ による断面となります。2 交点を持つ条件から

$$-k^2 + \frac{3}{4} > -k \iff -\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$$

このとき、交点の y 成分を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると、 $\frac{1}{6}$ 公式から $x = k$ による断面積は

$$S(k) = -\int_{\alpha}^{\beta} (y - \alpha)(y - \beta) dy = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6} \left(2\sqrt{-k^2 + k + \frac{3}{4}} \right)^3$$

よって

$$V = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} S(k) dk = \frac{4}{3} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-k^2 + k + \frac{3}{4} \right) \sqrt{-k^2 + k + \frac{3}{4}} dk \quad \dots (*)$$

$-k^2 + k + \frac{3}{4} = -(k - \frac{1}{2})^2 + 1$ ですから、 $k - \frac{1}{2} = t$ とおくと

$$V = \frac{4}{3} \int_{-1}^1 (1 - t^2) \sqrt{1 - t^2} dt \quad (\text{以下略})$$

これでも問題なく速くできます。一方 $z = k$ とおくと図から明らかなように「円と直線で囲まれる領域」となり大変です。この問題を解くときに $z = k$ と選ぶのは最悪です。(次の章でやるように三角関数を使うとできることはできますが...) 「こういうときは、こう切るとよい」という簡単な規則はありません。「回転軸に垂直に切る」と覚えていた人は、きっと痛い目にあったことでしょう。「試してみる」のが一番です。

注6) 「始めちよろちよろ中ぱっば」と言うのはご飯を炊くときの極意で、今では炊飯器がやってくれるので、知らない人も多いと思います。(私は山に、多いときは毎週行っていたので知っています。炊飯器はもちろん私の子供のときも有った。念のため。) また、生徒の皆さんを見て思うのは、「方針を立てないまま突っ走る」人が非常に多いということです。「あとは計算するだけ」(中ぱっば) となってしまうばこれで良いのですが、進路が決まっていない段階でこれをやると遭難の危険性が増えるだけです。

第11章 非回転体の体積 (球, 円柱, 円錐がらみ)

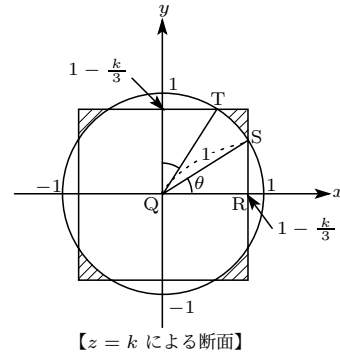
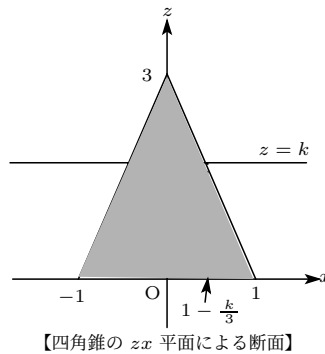
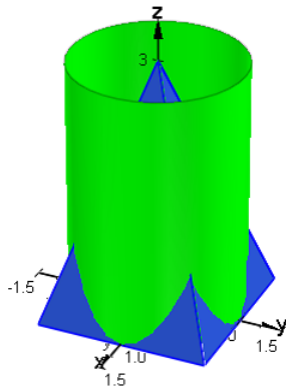
11.1 三角関数の利用

軸に関する回転対称性があるときは, 軸の周りの回転角を θ とおくと, すっきりと行くことが「多い」.

例題 15

xyz 空間に 5 点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(1, -1, 0)$, $P(0, 0, 3)$ をとる. 四角錐 $PABCD$ の $x^2 + y^2 \geq 1$ をみたす部分の体積 V を求めよ. (東大・理系 1998 年)

$x^2 + y^2 = 1$ というのは x, y 成分だけの条件で, z 成分は何でも良いので, xy 平面上の領域 $x^2 + y^2 = 1$ を z 軸に平行移動したときできる半径 1 の円柱です. $x^2 + y^2 \geq 1$ ですから, 円柱の外部を表しています.



$x = k$, $y = k$ などで切ってもできますが, ここでは $z = k$ で切ってみましょう. 四角錐の xz 平面による切り口は, 上図のような三角形になる. $z = 3 - 3x$ と $z = k$ の交点の x 成分は $x = 1 - \frac{k}{3}$ だから, $x = k$ で切ったときの断面は右上図のようになる. (ただし円柱の側面と四角錐の側面が $z = k$ 上で交わるとき.) 右上図の斜線の部分の面積が $z = k$ による断面積となる. ここで $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$ を図のような角にとり断面積を $S(\theta)$ とすると,

$$\frac{S(\theta)}{4} = \overline{QR}^2 - 2 \times (\text{三角形 QRS の面積}) - (\text{扇形 QST の面積})$$

ところが $\overline{QS} = 1$ だから $\overline{QR} = \cos \theta$, $\overline{RS} = \sin \theta$. よって

$$2 \times (\text{三角形 QRS の面積}) = \overline{QR} \times \overline{RS} = \cos \theta \sin \theta$$

また扇形の中心角は $\frac{\pi}{2} - 2\theta$ になるから

$$(\text{扇形 QST の面積}) = \frac{1}{2} \overline{QR}^2 \times \angle RQS = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right)$$

ゆえに

$$S(\theta) = 4 \left\{ \overline{QR}^2 - \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \right\} = 4 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta + 4\theta - \pi \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで $\overline{QR} = 1 - \frac{k}{3} = \cos \theta$ より, $0 \leq k \leq 3$ のとき

$$k = 3 - 3 \cos \theta \quad \dots \textcircled{2}$$

θ が $\Delta\theta$ 増加したときの k の増加量を Δk とすると, $\Delta k = \frac{dk}{d\theta} \Delta\theta = 3 \sin \theta \Delta\theta$. 円柱と四角錐の共通部分うち, 平面 $z = k$ と $z = k + \Delta k$ で囲まれた部分の体積を ΔV とすると,

$$\Delta V = S(\theta) \Delta k = S(\theta) \cdot 3 \sin \theta \Delta\theta$$

θ の区間 $[0, \frac{\pi}{4}]$ を, 幅が $\Delta\theta$ の区間に等分し, 各々の区間に対する ΔV を集めたのが V だから

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(\theta) 3 \sin \theta d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta + 4\theta - \pi) \sin \theta d\theta$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta (-\cos \theta)' d\theta = \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta (\sin \theta)' d\theta = \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \sin \theta d\theta &= \left[\theta(-\cos \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos \theta) d\theta = -\frac{\sqrt{2}}{8} \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta &= \left[-\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ゆえに求める体積は

$$V = 4 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) - 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} + 12 \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 3\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 + 4\sqrt{2} - 3\pi$$

Comment

1

$$\Delta V = S(\theta) \Delta k = S(\theta) \cdot 3 \sin \theta \Delta\theta \implies V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(\theta) 3 \sin \theta d\theta$$

の部分は置換積分を利用してもできます. $k = 3 - 3 \cos \theta$ だから, $dk = 3 \sin \theta d\theta$, $\frac{k}{\theta} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & k_0 \\ 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{4} \end{matrix}$.

(ただし k_0 は $\theta = \frac{\pi}{4}$ に対応する k の値). ゆえに

$$V = \int_0^{k_0} S(\theta) dk = \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(\theta) 3 \sin \theta d\theta$$

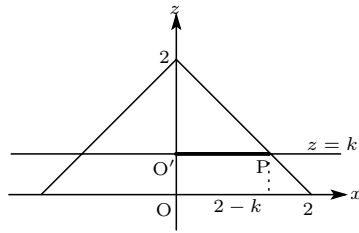
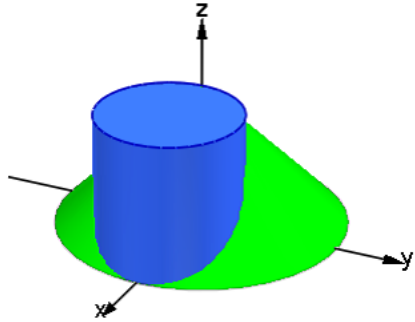
2 このように回転体でないときでも, 軸に関する回転対称性があるときは「適当な角度を θ にとり, $\sin \theta, \cos \theta$ などで軸に垂直な断面積が表される」ことも多々あります. 東大は 1994~2005 年の間に, こういう問題を 4 問も出題しています. またこの問題は $x = k, y = k$ などで切ってもできますが省略します.

今度は円錐と円柱の共通部分の体積です。

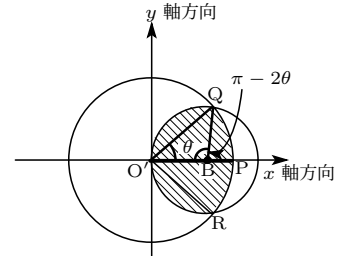
注 1)

例題 16

xyz 空間内に、底面が $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$, 頂点が $(0, 0, 2)$ の円錐と、底面が $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, z = 0$, 上面が $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, z = 2$ の円柱がある。(ただし円柱と円錐は、内部も含むものとする。) この円錐と円柱の共通部分を D とする。 D の体積を求めよ。(東大・理系 2003 年の 類題)



【xz 平面による断面】



【z=k による断面】

$z = k$ ($0 < k < 2$) による円錐と円柱の側面の切り口は円になる。これをそれぞれ C_1, C_2 とおくと, xz 平面による断面を考えて, C_1 の半径は $2 - k$ となる。さらに C_1 の中心を $O'(0, 0, k)$, C_2 の中心を B , 直線 $O'B$ と円 C_1 の交点のうち, D に含まれる点を P , 円錐の側面と円柱の側面の交点を Q, R , そして $\angle QO'R = 2\theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。 $\angle PO'Q = \theta$ だから,

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= (\text{扇形 } O'PQ \text{ の面積}) + (\text{扇形 } O'BQ \text{ の面積}) - (\text{三角形 } O'BQ \text{ の面積}) \\ &= \frac{1}{2}(2-k)^2 \cdot \theta + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot (\pi - 2\theta) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin(\pi - 2\theta) \end{aligned} \quad \dots ①$$

B から 線分 $O'Q$ に下ろした垂線の足を H とすると $\overline{O'H} = \overline{O'B} \cos \theta = \cos \theta$ 。ところが, $\triangle BO'Q$ は二等辺三角形なので $\overline{O'Q} = 2\overline{O'H} = 2 \cos \theta$ 。そして C_1 の半径は $2 - k$ だから

$$\overline{O'Q} = 2 \cos \theta = 2 - k. \quad \therefore k = 2 - 2 \cos \theta \quad \dots ②$$

よって①,② より

$$S = 4\theta \cos^2 \theta + (\pi - 2\theta) - \sin 2\theta \quad \dots ③$$

ゆえに, 求める体積を V とすると,

$$V = \int_0^2 S dk, \quad dk = 2 \sin \theta d\theta, \quad \begin{array}{c|c|c} k & 0 & \rightarrow & 2 \\ \hline \theta & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= \int_0^2 S dk = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\theta \cos^2 \theta + (\pi - 2\theta) - \sin 2\theta) 2 \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\theta \cdot \sin \theta \cos^2 \theta + 2\pi \sin \theta - 4\theta \sin \theta - 4 \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

注 1) 東大では高さが 1 の円錐になっていました。また, 「平面 $z = 2 - 2 \cos \theta$ による断面積を θ の式で表せ。」に相応するヒントが (1) としてついていました。

ここで

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta \cos \theta^2 d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right)' d\theta \\
 &= \left[\theta \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)' (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{2}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta (-\cos \theta)' d\theta = \left[\theta (-\cos \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos \theta) d\theta = 1 \\
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta &= \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

ゆえに

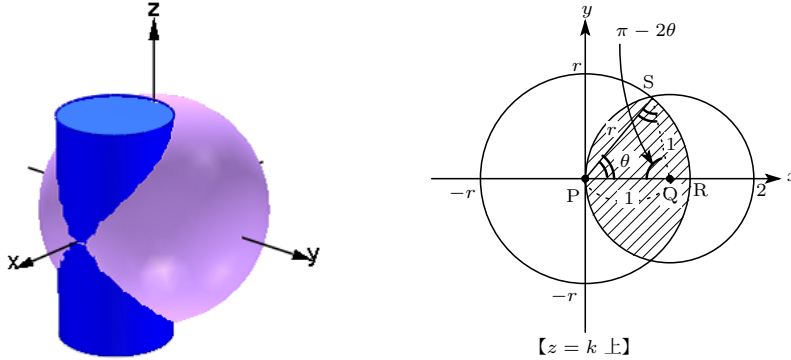
$$V = 8 \times \frac{2}{9} + 2\pi - 4 - 4 \times \frac{1}{3} = 2\pi - \frac{32}{9} \quad \dots (\text{答})$$

最後に球と円柱の共通部分を考えてみましょう.

例題 17

xyz 空間において条件 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ をみたす点 $P(x, y, z)$ の全体からなる立体を考える. この立体の体積 V を求めよ. (埼玉大)

$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ は xy 平面の円とその内部: $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ を z 軸に平行に平行移動してできる円柱です. 明らかに xy 平面に対して対称なので平面 $z = k$ ($0 \leq k \leq 2$) で切ってみます. 注2)



平面 $z = k$ ($0 \leq k \leq 2$) で切ってみます. $z = k$ のとき, 2つの領域はそれぞれ

$$x^2 + y^2 \leq 4 - k^2 \text{ (半径が } \sqrt{4 - k^2} \text{ の円の内部), } \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ (半径が 1 の円の内部)}$$

よって $r = \sqrt{4 - k^2}$ とおくと, $z = k$ による断面は図のようになる. (P, Q は円の中心) 図のように θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) をとると, $\angle PSQ = \theta$ となるので $\angle PQS = \pi - 2\theta$. よって $z = k$ による断面積を $S(\theta)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{S(\theta)}{2} &= (\text{扇形 PRS の面積}) + (\text{扇形 QSP の面積}) - (\text{三角形 QSP の面積}) \\ &= \frac{1}{2} r^2 \theta + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot (\pi - 2\theta) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r \sin \theta \end{aligned}$$

三角形 PQS は二等辺三角形なので, Q から辺 PS に下ろした垂線の足を H とすると $\overline{PH} = \cos \theta$. よって

$$r = \overline{PS} = 2 \cdot \overline{PH} = 2 \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

ゆえに

$$S(\theta) = 2 \left\{ \frac{1}{2} (2 \cos \theta)^2 \theta + \frac{1}{2} (\pi - 2\theta) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \sin \theta \right\} = 4\theta \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \pi - 2\theta \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで $r = \sqrt{4 - k^2}$ と ① から

$$2 \cos \theta = \sqrt{4 - k^2} \iff 4 - k^2 = 4 \cos^2 \theta \iff k^2 = 4 \sin^2 \theta \iff k = 2 \sin \theta$$

よって $dk = 2 \cos \theta d\theta$, $\left. \begin{matrix} k \\ \theta \end{matrix} \right|_0^0 \rightarrow \frac{2}{\frac{\pi}{2}}$ となるので

$$V = 2 \int_0^2 S(\theta) dk = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\theta \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \pi - 2\theta) \cdot 2 \cos \theta d\theta \quad (\text{後は計算するだけ})$$

注2) $0 \leq k$ としたのは 後で $k = 2 \sin \theta$ とやるときのことを考慮して設定しました.

ここで $\int \cos^3 \theta d\theta = \int (\sin \theta)'(1 - \sin^2 \theta)d\theta = \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3}$ だから

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos^3 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \left(\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right)' d\theta \\
 &= \left[\theta \left(\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) d\theta \\
 &= \frac{\pi}{3} + \left[\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)'(1 - \cos^2 \theta)d\theta \\
 &= \frac{\pi}{3} - 1 - \frac{1}{3} \left[\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{3} - \frac{7}{9} \\
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)' \cos^2 \theta d\theta = \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \\
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta (\sin \theta)' d\theta = \left[\theta \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{2} - 1 \\
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta &= \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1
 \end{aligned}$$

よって求める体積は

$$V = 16 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{7}{9} \right) - 8 \cdot \frac{1}{3} - 8 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + 4\pi \cdot 1 = \frac{16}{3}\pi - \frac{64}{9}$$

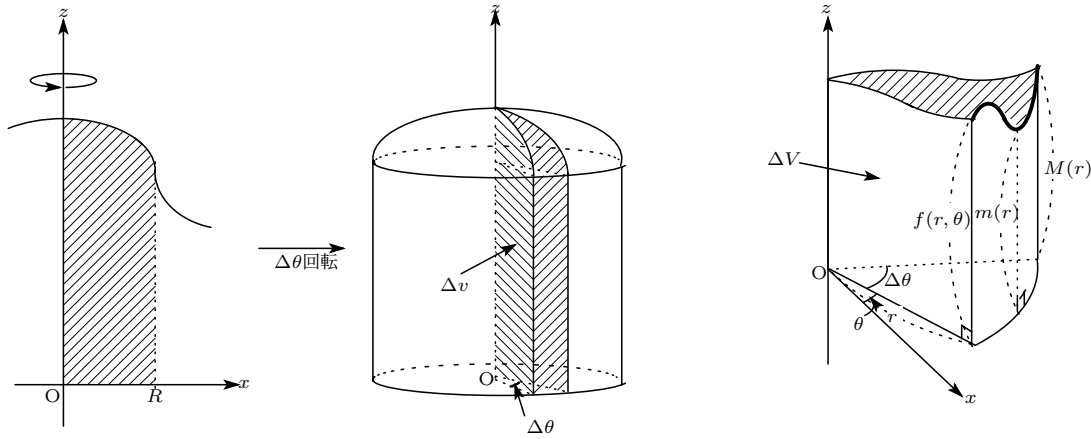
Comment

計算は非常に複雑ですが, 考え方は全く同じです.

11.2 【参考】ショートケーキ分割 (バームクーヘン分割の応用)

— この節の内容は受験には「直接は」役立たないかもしれませんが、底力をつけたい人だけ読んで下さい —

前節の後半 2 題の計算は非常に複雑でした。これをバームクーヘン分割の応用で解いて見ましょう。



まず, $0 \leq x \leq R$ において $f(x) \geq 0$ のとき, $z = f(x)$, $z = 0$, $x = 0$, と $x = R$ で囲まれた領域を z 軸の周りに $\Delta\theta$ (単位はラジアン) だけ回転してできる立体の体積: Δv を求めましょう. 2π 回転 (一周回転) させるとこれは z 軸の周りの回転体の体積ですから「バームクーヘン分割」でやったように

$$v = \int_0^R 2\pi x f(x) dx$$

この立体の体積の $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ 倍が, 求める体積ですから

$$\Delta v = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \cdot v = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \int_0^R 2\pi x f(x) dx = \Delta\theta \int_0^R x f(x) dx \quad \dots (*)$$

これは近似とかそういうのではなく, 100%正確です。次に「底面が中心角 $\Delta\theta$ の扇形で上の面は自由な形をしたショートケーキ」の体積 ΔV を考えて見ましょう。ケーキの上面は自由な形をしているので, r を原点からの距離, θ を x 軸からの回転角としたとき, 高さ h (> 0) は角度 θ の関数にもなります。よって $h = f(r, \theta)$ と置かないといけません。いま $f(r, \theta)$ が連続関数とします。さらに (r を固定して) θ が $[\theta, \theta + \Delta\theta]$ の範囲を動くときの $h = f(r, \theta)$ の最大値を $M(r)$, 最小値を $m(r)$ とすると, このケーキの体積は, $z = m(x)$ を z 軸の周りに $\Delta\theta$ だけ回転してできる立体の体積より大きく, $z = M(x)$ を z 軸の周りに $\Delta\theta$ だけ回転してできる立体の体積より小さいから, (*) より

$$\Delta\theta \int_0^r r \cdot m(r) dr \leq \Delta V \leq \Delta\theta \int_0^r r \cdot M(r) dr$$

$f(r, \theta)$ は連続関数なので, $\Delta\theta \rightarrow 0$ のとき, $M(r) \rightarrow f(r, \theta)$, $m(r) \rightarrow f(r, \theta)$. よって

$$\begin{aligned} \left| \int_0^r r \cdot f(r, \theta) dr - \int_0^r r \cdot m(r) dr \right| &= \left| \int_0^r r \cdot \{f(r, \theta) - m(r)\} dr \right| \rightarrow 0 \\ \left| \int_0^r r \cdot M(r) dr - \int_0^r r \cdot f(r, \theta) dr \right| &= \left| \int_0^r r \cdot \{M(r) - f(r, \theta)\} dr \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

即ち, $\Delta\theta \rightarrow 0$ のとき, $\int_0^r r \cdot m(r) dr \rightarrow \int_0^r r \cdot f(r, \theta) dr$, $\int_0^r r \cdot M(r) dr \rightarrow \int_0^r r \cdot f(r, \theta) dr$ となるから, 注3)

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta\theta} = \int_0^r r \cdot f(r, \theta) dr \iff \Delta V = \Delta\theta \int_0^r r \cdot f(r, \theta) dr + o(\Delta\theta) \quad \dots (**)$$

注3) 厳密には一様連続性を使います。

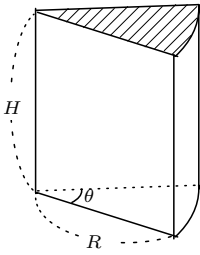
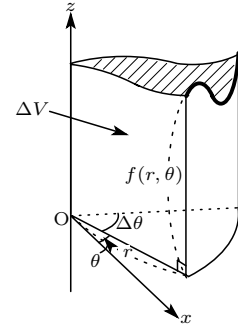
(*) と違い, 100% 正確ではないですが, ΔV と $\int_0^r r \cdot f(r, \theta) dr$ の差は, $\Delta\theta$ より高位の微小量となります. まとめて書くと,

(微小) ショートケーキの体積

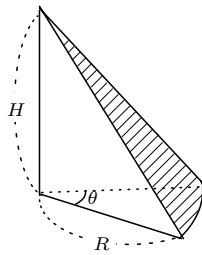
「底面が中心角 $\Delta\theta$ の扇形で 上面の方程式が $z = f(r, \theta)$ (ただし $f(r, \theta)$ は連続関数で $f(r, \theta) > 0$) で与えられるショートケーキ」の体積 ΔV は

$$\Delta V \approx \Delta\theta \int_0^r r \cdot f(r, \theta) dr \quad \dots (**)$$

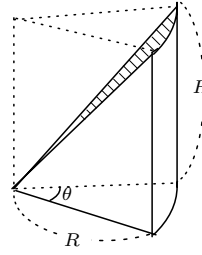
(誤差は $\Delta\theta$ より高位の微小. また, 積分するときには θ を一定と考えて積分する.)



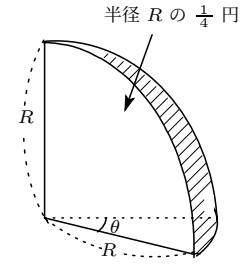
【図1】



【図2】



【図3】



【図4】

上の図形は全て回転体を切ったものとする. すなわち $h(r, \theta) = h(r)$ のタイプなので, $\Delta\theta$ が大きいときでも厳密に (**) の式はなりたつ. また左の 2 つはそれぞれ柱体, 錐体の公式を使ってもできる.

ex1 $h(r) = H$ (一定) ですから

$$V = \theta \int_0^R r \cdot h(r) dr = \theta \int_0^R r \cdot H dr = \theta \left[\frac{r^2 H}{2} \right]_0^R = \frac{R^2 H}{2} \theta = \frac{R^2 \theta}{2} \cdot H$$

ex2 $h(r) = H - \frac{H}{R}r$ (傾きが $-\frac{H}{R}$ の直線) ですから

$$V = \theta \int_0^R r \cdot h(r) dr = \theta \int_0^R r \cdot \left(H - \frac{H}{R}r \right) dr = \theta \left[\frac{r^2 H}{2} - \frac{H r^3}{3R} \right]_0^R = \frac{R^2 H}{6} \theta = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} R^2 \theta \cdot H$$

ex3 $h(r) = \frac{H}{R}r$ (傾きが $\frac{H}{R}$ の直線) ですから

$$V = \theta \int_0^R r \cdot h(r) dr = \theta \int_0^R r \cdot \frac{H}{R}r dr = \theta \left[\frac{H}{R} \frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{R^2 H}{3} \theta$$

ex4 $h(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$ だから

$$\begin{aligned} V &= \theta \int_0^R r \cdot h(r) dr = \theta \int_0^R r \cdot \sqrt{R^2 - r^2} dr = \theta \int_0^R \frac{-1}{2} (R^2 - r^2)' \sqrt{R^2 - r^2} dr \\ &= \theta \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{R^3}{3} \theta \end{aligned}$$

$\theta = 2\pi$ のとき, $V = \frac{2\pi R^3}{3}$ となり半球の体積と一致する.

「ショートケーキ分割」の式は $z = f(r, \theta)$ が $0 \leq r \leq a$ で零になっているようなとき, すなわち, ケーキの真ん中に穴の開いたようなときにも使えます. そして「ショートケーキ分割」を使うと, 「バームクーヘン分割」はすぐ導けます. $h = f(r, \theta)$ ($h > 0$) が θ によらないとき

$$\Delta V = \Delta\theta \int_a^b r \cdot f(r) dr \quad (\text{ショートケーキ分割})$$

回転体の場合, 任意の $\Delta\theta$ ($0 \leq \Delta\theta \leq 2\pi$) に対してもこの式は厳密に正しいから, $\Delta\theta = 2\pi$ として

$$V = 2\pi \int_a^b r \cdot f(r) dr \quad (\text{バームクーヘン分割})$$

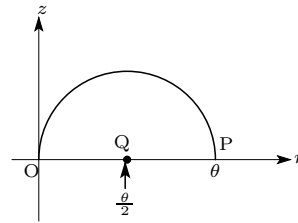
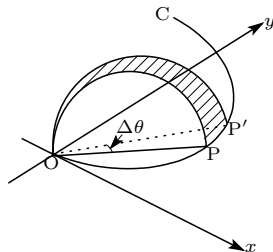
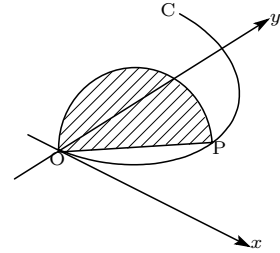
$h = f(r, \theta)$ が θ によるときは, $\Delta V = \Delta\theta \int r \cdot f(r, \theta) dr$ (誤差は $\Delta\theta$ より高位の微小量) ですから, V は「 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の区間を細かく分け, それぞれに対する ΔV を集めたもの」, すなわち $\int r \cdot f(r, \theta) dr$ をさらに積分したものになります. 注4)

例題 18

アルキメデスの螺旋:

$$C: \begin{cases} x = \theta \cos \theta \\ y = \theta \sin \theta \end{cases}$$

上に点 P をとり, 線分 OP を直径の両端とする半円 D_θ を図のように xy 平面に垂直に作る. P が C 上 (ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) を動くとき, 半円の通過する立体の体積を求めよ.



$\overline{OP} = \theta$ だから円 D_θ の中心を Q とすると, $\overline{OQ} = \frac{\theta}{2}$. よって D_θ は $r-z$ 平面で中心が $(\frac{\theta}{2}, 0)$, 半径 $\frac{\theta}{2}$ の半円となるので (ただし r は原点からの距離)

$$\left(r - \frac{\theta}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2, \quad z \geq 0 \iff z = \sqrt{\frac{\theta^2}{4} - \left(r - \frac{\theta}{2}\right)^2}$$

θ が $\Delta\theta$ 増加するときに円 D_θ の通過する立体の体積を ΔV とすると,

$$\Delta V = \Delta\theta \int_0^\theta r \sqrt{\frac{\theta^2}{4} - \left(r - \frac{\theta}{2}\right)^2} dr$$

注4) 「積分のまた積分?」と驚くことはありません. x 軸に垂直に切った断面積 $S(x)$ を求めるときも, 切り口が三角形とか四角形のときならば積分しなくても求まりますが, 切り口が「放物線と直線で囲まれた領域」なら積分しないと求まりません. 今までも実は「積分して断面積を求め, またさらにそれを積分して, やっと体積を求めていた」のです.

ここで $r - \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} \sin t$ とおくと, $dr = \frac{\theta}{2} \cos t dt$, $\frac{r}{t} \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^0 \rightarrow \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$. よって

$$\begin{aligned} \int_0^\theta r \sqrt{\frac{\theta^2}{4} - \left(r - \frac{\theta}{2}\right)^2} dr &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{2} (\sin t + 1) \cdot \frac{\theta}{2} \cos t \cdot \frac{\theta}{2} \cos t dt \\ &= \frac{\theta^3}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \cos^2 t \sin t) dt \\ &= \frac{\theta^3}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \quad (\because \sin t \text{ は奇関数}, \cos^2 t \text{ は偶関数}) \\ &= \frac{\pi}{16} \theta^3 \end{aligned}$$

ゆえに

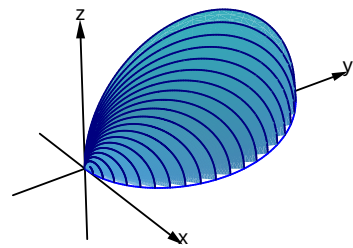
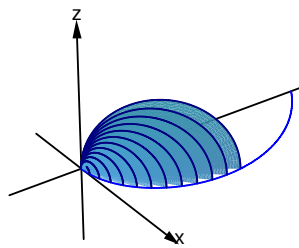
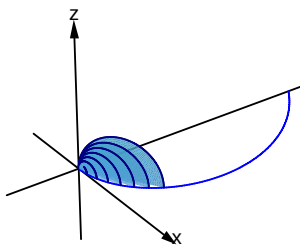
$$\Delta V = \frac{\pi}{16} \theta^3 \Delta \theta \quad (\text{誤差は } \Delta \theta \text{ より高位の微小量})$$

となるので求める体積は

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{16} \theta^3 d\theta = \frac{\pi}{16} \left[\frac{\theta^4}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^5}{1024}$$

Comment

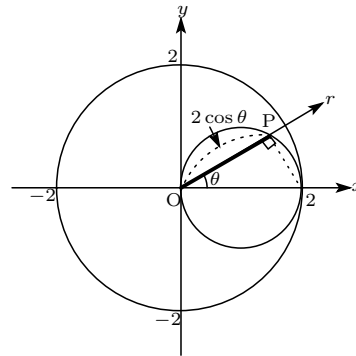
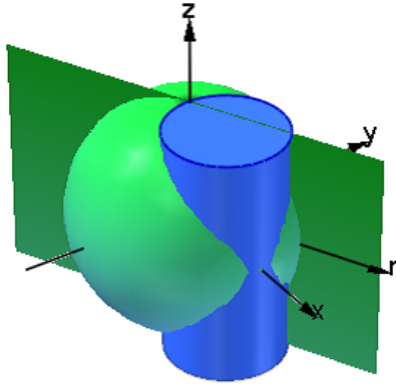
この問題は大学入試の範囲外なので, 出題されることはないはずですが, 公式の理解のために入れました. 「普通の体積の求め方とあまり変わらない」と思いませんか? 「微小ショートケーキの体積」 $\Delta V = \Delta \theta \int r f(r) dr$ を求めて, それをさらに θ に関し集める (積分する) と体積が求まります. x 軸に垂直な断面積を求めて体積を求めるときも「厚みが Δx の微小円柱の体積」 $\Delta V = S(x) \Delta x$ を求めて, それを x に関して集めて (積分して) 体積を求めています.



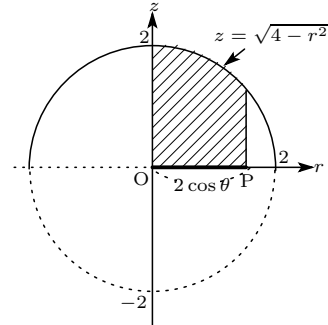
それでは「ショートケーキ分割」を用いて, 先ほどの例題を解いてみましょう.

例題 19

xyz 空間において条件 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ をみたす点 $P(x, y, z)$ の全体からなる立体を考える. この立体の体積 V を求めよ.



【 xy 平面による断面】



【 rz 平面による断面】

対称性より, $z \geq 0$ の領域に含まれる立体の体積を求めて, 2 倍すればよい. xy 平面と垂直で x 軸となす角が θ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の平面 π と円: $(x-1)^2 + y^2 = 1, z = 0$ の交点を P とする. 球の π による切り口は半径が 2 の円, また上図より $\overline{OP} = 2 \cos \theta$ だから, 平面 π による立体の切り口は右上図の斜線のようなになる. よって立体の切り口は $r-z$ 平面では

$$z = \sqrt{4 - r^2}, \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \theta$$

よって θ が $\theta + \Delta\theta$ に変わるまでに, 右上の図形の描く立体の体積を ΔV とすると,

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta\theta \int_0^{2 \cos \theta} r \cdot z dr = \Delta\theta \int_0^{2 \cos \theta} r \cdot \sqrt{4 - r^2} dr = \Delta\theta \int_0^{2 \cos \theta} \frac{-1}{2} (4 - r^2)' \sqrt{4 - r^2} dr \\ &= \Delta\theta \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (4 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2 \cos \theta} = \Delta\theta \left(-\frac{8}{3} \sin^3 \theta + \frac{8}{3} \right) = \frac{8}{3} (1 - \sin^3 \theta) \Delta\theta \end{aligned}$$

よって $z \geq 0$ の部分の体積を V' とすると,

$$V' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(\cos \theta)' (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \left[\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

よって

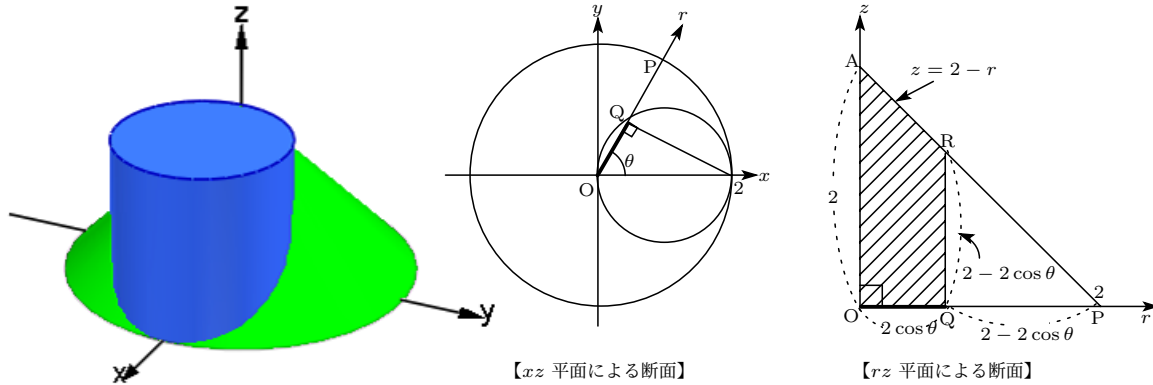
$$V' = \frac{16}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \pi - \frac{32}{9}$$

求める体積は, この 2 倍ですから先の結果と一致します. しかも計算はずーと楽です. 実はこれは大学の 1~2 年生の教科書に載っている有名問題で, 大学では (本質的には) これと同じ解法をします. それを入試では わざと, $z = k$ に関して切って求めさせるので, 計算が非常に難しくなります.

今度は, 円錐と円柱をやってみましょう. こちらはもっと速くできます.

例題 20

xyz 空間内に, 底面が $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$, 頂点が $(0, 0, 2)$ の円錐と, 底面が $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, z = 0$, 上面が $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, z = 2$ の円柱がある. (ただし円柱と円錐は, 内部も含むものとする.) この円錐と円柱の共通部分を D とする. D の体積を求めよ. (東大・理系 2003 年の 類題)



xy 平面における直線 $y = (\tan \theta)x$ を z 軸に平行移動してできる平面を $\pi(\theta)$ とする. さらに $A(0, 0, 2)$, $P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$ とすると, 円錐の $\pi(\theta)$ による断面は三角形 OAP . 次に xy 平面において, 線分 OP と円 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ の交点のうち原点でない方を点 Q とすると, 左上図より

$$OQ = 2 \cos \theta$$

$\pi(\theta)$ による D の断面は, 線分 OQ を z 軸に平行移動したときにできる長方形と $\triangle OAP$ の共有部分だから, 右上図の台形 $OQRA$ になる. θ が $\Delta\theta$ だけ増加するとき, この台形の通過する立体の体積を ΔV とすると

$$\Delta V = \Delta\theta \int_0^{2 \cos \theta} r \cdot z dr = \Delta\theta \int_0^{2 \cos \theta} r(2 - r) dr = \Delta\theta \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^{2 \cos \theta} = \left(4 \cos^2 \theta - \frac{8}{3} \cos^3 \theta \right) \Delta\theta$$

誤差は $\Delta\theta$ より高位の微小量. また, D は yz 平面に関し対称だから, 求める体積を V とすると,

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 \cos^2 \theta - \frac{8}{3} \cos^3 \theta \right) d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta - \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta - \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)' (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= 4 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{16}{3} \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{16}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= 2\pi - \frac{32}{9} \end{aligned}$$

これまた, とても簡単に計算できました.

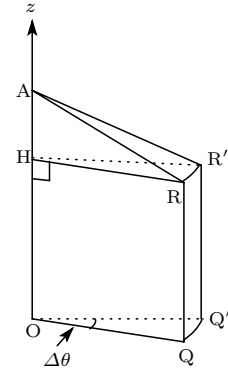
Comment

この場合は直線で囲まれていますから, 「ショートケーキ分割」などは用いなくとも ΔV が求まります. 円柱の底面のうち, 平面 $\pi(\theta)$ と $\pi(\theta + \Delta\theta)$ で囲まれた領域の面積を ΔS , さらに点 R を前頁の台形の頂点の 1 つ, 点 R から z 軸に下ろした垂線の足を H とする. $\Delta\theta \rightarrow 0$ のとき,

$$\Delta S - \triangle OQQ' = \frac{1}{2} \cdot \overline{OQ}^2 \Delta\theta = 2 \cos^2 \theta \Delta\theta$$

誤差は $\Delta\theta$ より高位の微小量となる. よって, その誤差の範囲で

$$\begin{aligned} \Delta V &= (\text{三角すい } A\text{-}HRR' \text{ の体積}) + (\text{三角柱 } HRR'\text{-}OQQ' \text{ の体積}) \\ &= \frac{1}{3} \triangle HRR' \cdot HA + \triangle OQQ' \cdot OH \\ &= \frac{1}{3} \cdot HA \cdot \Delta S + HO \cdot \Delta S \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cos \theta \cdot \Delta S + (2 - 2 \cos \theta) \cdot \Delta S \\ &= \left(2 - \frac{4}{3} \cos \theta \right) \Delta S \\ &= \left(2 - \frac{4}{3} \cos \theta \right) \cdot 2 \cos^2 \theta \Delta\theta \end{aligned}$$

Comment

— 本当に速く解けますね. 「ショートケーキ分割」を公式としていきなり使っていていいんでしょうか? —

残念ながら, 証明して使わないといけなと思います. そしてその証明は, 「バームクーヘン分割」をまず証明し, そのあと 2 つの小回転体片でハサミウチ」というやり方で, 結局「ハサミウチ」を 2 回やっていることとなります. かなり面倒な証明といえます.

— じゃ, 余り役には立たないですね. —

純粋に試験のためだけなら, 確かにそうです. しかし, 試験に出ることばかりをやっていると, 逆にできなくなります. 英作文は試験に出ないから, 並べ替え問題だけやっていると, 簡単な会話もできません. リスニングは試験に出ないからといってリスニングをおろそかにしていると, 単語は覚えられないし, English が Japanish になってしまいます. 大切なのは, とりあえず試験のことは忘れて「解る」, 「実力をつける」ということです. お金持ちになることばかりを考えていると, 逆に信用がなくなり, 貧乏になるようなものです. まずは 理解してください, 点数は後からついてきます.

— しかし試験は近いし何か対策を下さい. —

そんなことを私に聞かないでください. どんなやり方が良いかは人によって違うのですから. しかし, もし計算は得意だが証明は苦手というならば,

$$\int \sin^3 \theta d\theta, \quad \int \cos^3 \theta d\theta, \quad \int \theta \sin^3 \theta d\theta, \quad \int \theta \cos^3 \theta d\theta$$

の積分がすぐできるようになっておけばよいと思います. さらにウォリスの公式「 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ とおくと $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)」も証明付で使えるようになっておけば言うことないです.

— 「ショートケーキ分割」の名前がいやなのですが —

この名前は私が勝手につけたので, 勘弁してください. (test で使っても誰も意味が解らないでしょう.)

第12章 立体の曲面積

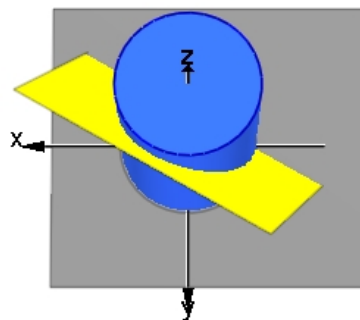
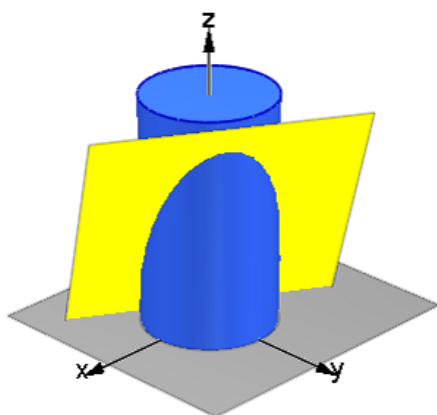
立体の曲面の面積は、定義からして教科書に載っていない^{注1)}ので、実際に入試に出題されるのは、平面上に展開できる曲面、すなわち、円すいと円柱(の一部)だけです。したがって展開図を書くか、または直接、微小長方形(円柱の場合)や微小扇形(円すいの場合)の面積をもとめて積分します。

12.1 円柱の側面積

例題 21

z 軸を軸とする半径1の円柱の側面で、 xy 平面より上(z 軸の正の方向)にあり、平面 $\pi: z = x + \sqrt{3}y + 1$ より下(z 軸の負の方向)にある部分 D の面積を求めよ。(東大・理系 1976 年, 改)

注2)



円柱の底面の周り: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ 上に点 $P(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ をとり, P を通り z 軸に平行な直線と平面 π の交点を点 $Q(\cos \theta, \sin \theta, z)$ とすると, Q は π 上にあるので

$$z = x + \sqrt{3}y + 1 = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

さらに Q が D 内の点のとき, $z \geq 0$ だから

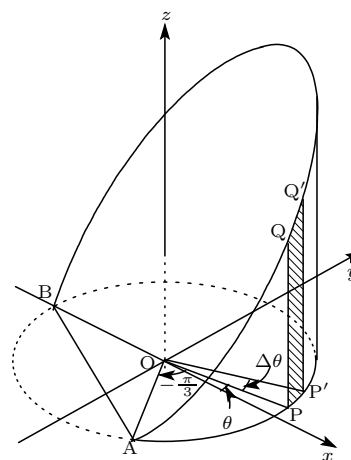
$$\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta + 1 \geq 0 \iff 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \geq -1 \iff -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$$

この範囲で θ が $\Delta \theta$ 増加したとき, 線分 PQ が動く小曲面の面積を ΔS とすると

$$\Delta S \approx \overline{PQ} \times (\text{弧 } PP' \text{ の長さ}) = (\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta + 1) \Delta \theta$$

誤差は $\Delta \theta$ より高位の微小量となる。よって, 求める面積は

$$S = \int_{-\pi/3}^{\pi} (\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta + 1) d\theta = \left[\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta + \theta \right]_{-\pi/3}^{\pi} = \frac{4}{3} \pi + 2\sqrt{3}$$



注1) 直感的に言うと, 「曲面を細かく切って, それを平面上に貼り付けたときの合計の面積」とすれば良さそうですが, いくら細かく切っても正確には貼り付けられないので難しい。

注2) 元の問題では $\pi: x - \sqrt{3}y + z = 1$ でした。CG の都合で変えています。

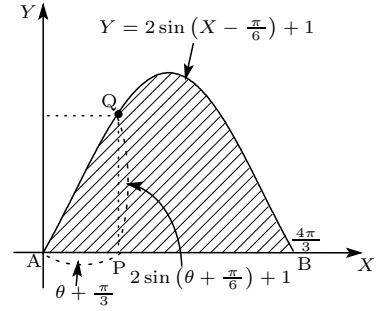
Comment

$\theta = -\frac{\pi}{3}$ に対応する P を A, $\theta = \pi$ に対応する P を B とおくと,

$$\begin{cases} (\text{弧 AP の長さ}) = \theta + \frac{\pi}{3}, \\ \overline{PQ} = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta + 1 = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) + 1 \end{cases}$$

よって, A を通り z 軸に平行な直線で円柱を切って展開し平面上に貼り付け, A を原点, $\overrightarrow{AB}$ 方向に X 軸, $\overrightarrow{PQ}$ に並行に Y 軸をとり, $Q(X, Y)$ とおくと

$$\begin{cases} X = \theta + \frac{\pi}{3} \\ Y = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) + 1 \end{cases} \iff Y = 2 \sin \left(X - \frac{\pi}{6} \right) + 1 \quad \left(0 \leq X \leq \frac{4\pi}{3} \right)$$



よって 展開図は 図のようになります. この斜線部分の面積を求めても同じです. また, 一般に「円柱を平面で切ったときの切り口の曲線は, 展開図上では三角関数」になります.

12.2 円すいの側面積

今度は円すいの表面積を考えてみましょう.

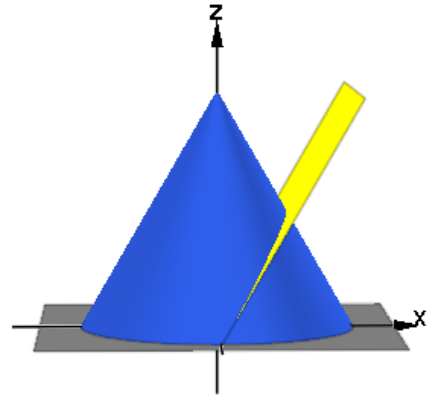
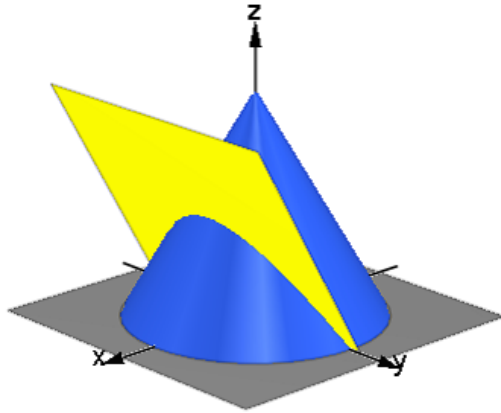
例題 22

xyz 空間に 底面が $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$ で頂点が $A(0, 0, 2\sqrt{3})$ の直円錐と, 平面 $\pi: z = \sqrt{3}x$ がある. 直円錐の側面と π の交線を C とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 底面の円周上に $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ をとり, 線分 AP と C の交点を Q とする. このとき $\overrightarrow{AQ}$ を θ の式で表せ.

(2) 円すいの側面のうち, xy 平面と C で囲まれた部分の表面積を求めよ.

平面は円錐の母線と平行になっています. このとき, 切り口は**平面上では放物線**ですが, 展開図上ではどうなるのでしょうか?



(1) $Q(x, y, z)$ とすると, $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ (t は実数) と置けるので,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける. Q は π 上にもあるから

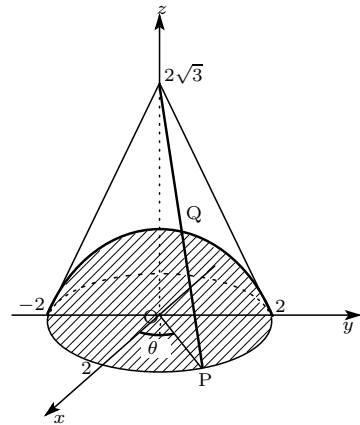
$$z = \sqrt{3}x \quad \dots \textcircled{2}$$

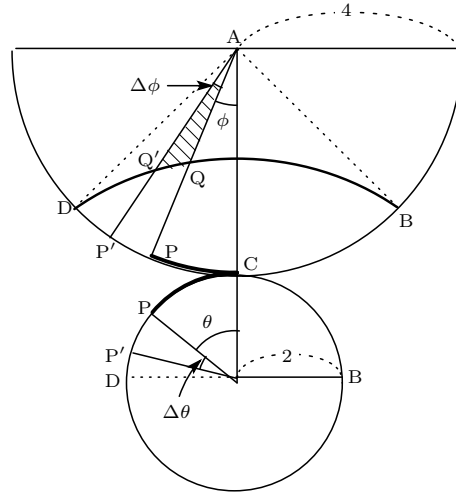
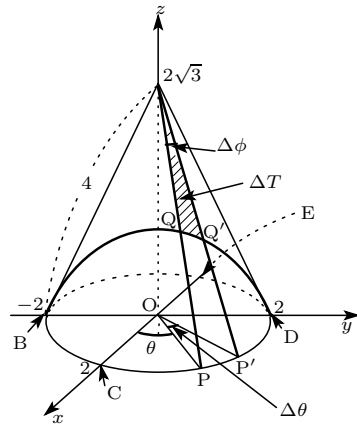
①, ② を連立して $\cos\theta \neq -1$ のとき

$$2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}t = \sqrt{3} \cdot 2t\cos\theta \iff t = \frac{1}{1 + \cos\theta} \quad \dots \textcircled{3}$$

(Q の z 成分) $= \sqrt{3}(2 - t) \geq 0$ だから, $t \leq 2 \iff \cos\theta \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. このとき

$$|\overrightarrow{AQ}| = |t| |\overrightarrow{AP}| = 4|t| = \frac{4}{1 + \cos\theta}$$





(2) θ が $\Delta\theta$ 増加したときに、点 P, Q がそれぞれ点 P', Q' に移るとし、線分 AQ の通過領域の面積を ΔT とする。さらに円すいの底円上に点 B(0, -2, 0), C(2, 0, 0), D(0, 2, 0), E(-2, 0, 0) をとり、線分 AE で円すいの側面を切って、平面上に展開したとし、展開図上で $\angle BAP = \phi$ とする。^{注3)} このとき、(母線) : (半径) = $\overline{AB} : \overline{BO} = 2 : 1$ だから

$$\phi = \frac{1}{2}\theta \quad \dots \textcircled{4}$$

ゆえに ③, ④ を使って

$$\Delta T = \frac{1}{2} \overline{AQ}^2 \Delta\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{1 + \cos 2\phi} \right)^2 \cdot \Delta\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\cos^2 \phi} \right)^2 \cdot \Delta\phi = \frac{2}{\cos^4 \phi} \Delta\phi$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ だから、線分 AQ がその間に動く領域の面積を T とすると

$$\begin{aligned} T &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^4 \phi} d\phi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 \phi} d\phi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\cos^2 \phi} \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 \phi) (\tan \phi)' d\phi = 4 \left[\tan \phi + \frac{\tan^3 \phi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

一方 $\overline{AP} = 4$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ だから、線分 AP が描く領域は、展開図上では中心角が $\frac{\pi}{2}$, 半径が 4 の扇形 ABD となる。よって求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{\pi}{2} - T = 4\pi - \frac{16}{3}$$

Comment

結局、展開図上では Q の軌跡は

$$\overline{AQ} = \frac{2}{\cos^2 \phi}$$

と極表示されることになります。これを $\overrightarrow{AC}$ 方向に x 軸を取り直交座標に変えると

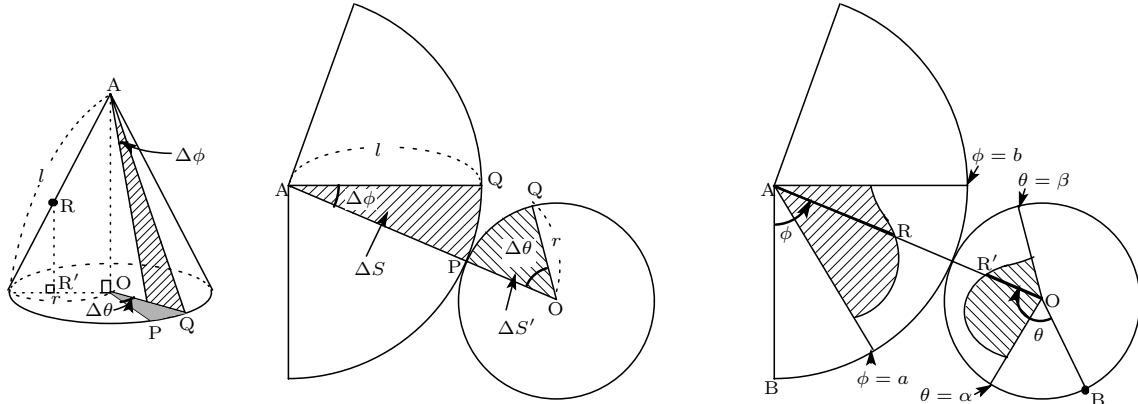
$$\begin{cases} x = \frac{2}{\cos^2 \phi} \cos \phi = \frac{2}{\cos \phi} \\ y = \frac{2}{\cos^2 \phi} \sin \phi = \frac{2 \sin \phi}{\cos^2 \phi} \end{cases} \implies y = \pm \frac{x\sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

もはや放物線でも何でもありません。また、この式を使って面積を求めることもできます。

^{注3)} ϕ は「ファイ」と読みます。ギリシャ語アルファベットの第 21 字。「プログレッシブ英和中辞典 第 3 版」より。

12.3 円すいの側面積と正射影

円錐の側面積と正射影の間には密接な関係があります。注4)



母線と半径の長さがそれぞれ l と r の円錐の側面のうち、図の扇形 APQ の面積を ΔS , 扇形 OPQ の面積を $\Delta S'$ とする。一般に $\Delta\phi : \Delta\theta = r : l$ だから

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \Delta\phi = \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \Delta\theta \cdot \frac{r}{l} = \left(\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \Delta\theta \right) \times \frac{l}{r} = \frac{l}{r} \times \Delta S' \quad \dots (*)$$

これは任意の $\Delta\theta, \Delta\phi$ に対し厳密に正しい。一般に円錐の側面上の点を R , 円錐を展開したとき、展開図上で $\angle BAP = \phi$. そして点 R の底面への正射影を点 R' , $\angle BRP' = \theta$ とすると三角形の相似などから

$$\frac{\overline{OR'}}{\overline{AR}} = \frac{r}{l}, \quad \phi = \frac{r}{l}\theta$$

よって R の描く曲線と直線 $\phi = a, \phi = b$ ($a < b$) で囲まれる領域の面積を S , R' の描く曲線と直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ で囲まれた領域の面積を S' とすると

$$S = \int_a^b \frac{1}{2} \overline{AR}^2 d\phi = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r} \overline{OR'} \right)^2 \cdot \frac{r}{l} d\theta = \frac{l}{r} \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} (\overline{OR'})^2 d\theta = \frac{l}{r} \times S' \quad \dots (**)$$

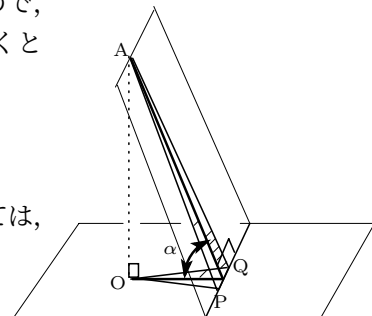
扇形 OPQ は扇形 APQ の平面 OPQ に関する正射影、また R' の描く図形も R の描く図形の正射影になっている。すなわち、次の公式が成り立つ。

$(\text{円すいの側面の図形の面積}) : (\text{それを底面に正射影した図形の面積}) = l : r = (\text{母線}) : (\text{半径})$

扇形 OPQ は扇形 APQ の平面 OPQ に関する正射影になっているので、点 P における扇形の接平面を考え、2つの平面のなす角を α とおくと $\cos \alpha = \frac{r}{l}$. よって (*) と (**) は

$$(\text{正射影の面積}) = (\text{元の面積}) \times \cos \alpha \quad (\alpha \text{ は 2 つの平面のなす角})$$

という公式が、平面上の図形に限らず、円すいの側面上の図形に関しては、厳密に成り立っていることを表す。



注4) 平面 π への正射影とは、任意の点 X にその π への垂線の足 H を対応させる変換のこと。正射影に関しては「立体を上手に切断する」のセクションを見てください。

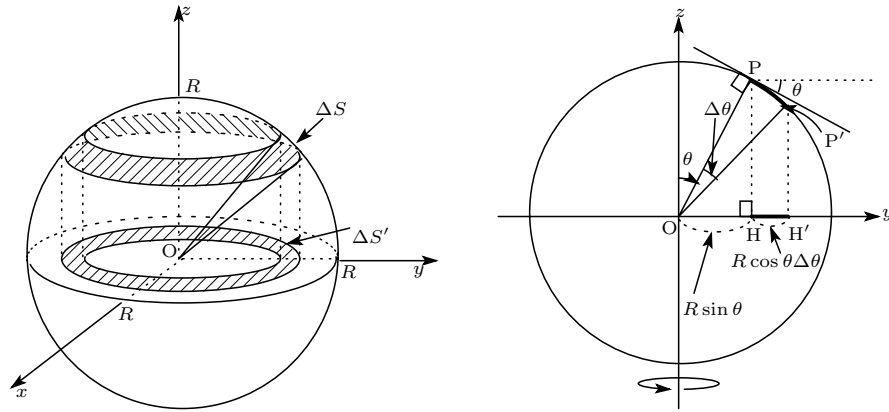
【参考】

一般の曲面においても，曲面を細かく分けたときの面積を ΔS ，^{注5)} それを定平面に正射影した面積を $\Delta S'$ とするとき， $\Delta S = \Delta S' \times \frac{1}{\cos \alpha}$ （ただし α は定平面と小曲面片の接平面のなす角）を使って求めます．しかし一般の曲面においては α は一定でないので，積分することになる．

球の表面積

半径 R の球の表面積を上を考え方を使って求めよ．

(ヒント：接平面が赤道面と一定の角をなすのは，緯度が等しいとき．)



原点中心の球を考える．球面上で z 軸からなす角が θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) と $\theta + \Delta\theta$ になっている点の集まりは左上図のベルト地帯を作る．このベルト地帯は，右上図の弧 PP' を z 軸の周りに回転させたものだから， P における接平面と xy 平面とのなす角は θ に等しい．よってベルトの面積を ΔS ，これを xy 平面に正射影した円環の面積を $\Delta S'$ とすると

$$\Delta S = \Delta S' \times \frac{1}{\cos \theta} \quad \dots \textcircled{1}$$

一方， P, P' から xy 平面に下ろした垂線の足を H, H' とするとき， $\overline{OH} = R \sin \theta$ ．ゆえに

$$\overline{HH'} = (R \sin \theta)' \Delta\theta = R \cos \theta \Delta\theta$$

よって，円環の面積は

$$\Delta S' = 2\pi \cdot \overline{OH} \times \overline{HH'} = 2\pi R \sin \theta \cdot R \cos \theta \Delta\theta = 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta \Delta\theta \quad \dots \textcircled{2}$$

ゆえに

$$\Delta S = \Delta S' \times \cos \theta = 2\pi R^2 \cos^2 \theta \sin \theta \Delta\theta \quad \dots \textcircled{3}$$

よって

$$S = 2\pi \int_0^\pi R^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta (-\cos \theta)' d\theta = 2\pi R^2 \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = \frac{4}{3}\pi R^2$$

注6)

注5) それぞれの小曲面片において接平面を考え，その接平面上にまず小曲面片を正射影する．この面積が ΔS で，接平面と小曲面片が近ければ，実際の面積に非常に近い．(あとは，誤差の程度が正射影された面積に比べれば無視できるくらいであることを証明すればよい)

注6) 誤差がすべて $\Delta\theta$ より高位の微小量であることについては省略した．

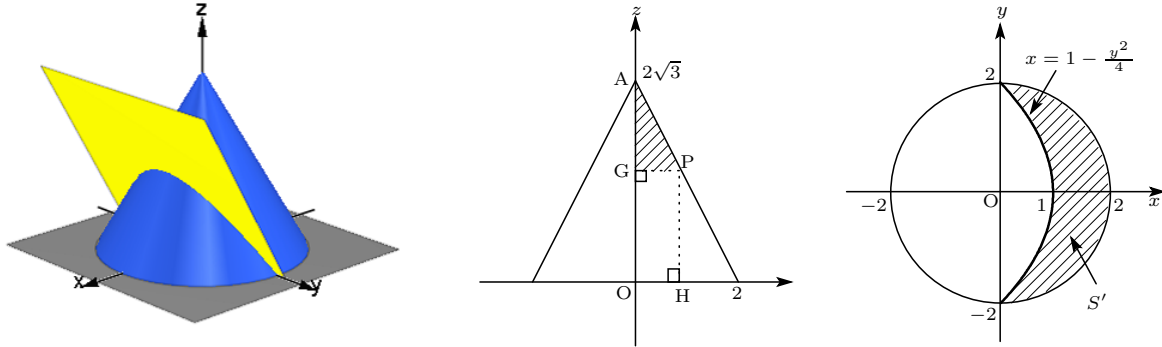
それではさっきの問題の【別解】です。正射影がわかっていれば早く解けます。

例題 23

xyz 空間に 底面が $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$ で頂点が $A(0, 0, 2\sqrt{3})$ の直円錐と、平面 $\pi: z = \sqrt{3}x$ がある。直円錐の側面と π の交線を C とするとき、次の問いに答えよ。

(1) C を xy 平面に正射影した曲線の式 C' を求めよ。

(2) 円すいの側面のうち、 xy 平面と C で囲まれた部分 D の表面積 S を求めよ。



(1) まず円すいの側面の式を立てます。点 P を側面上の点とし、点 H , 点 G をそれぞれ P から xy 平面, z 軸に下ろした垂線の足とします。このとき 三角形の相似を考えて $\overline{AG} : \overline{GP} = 2\sqrt{3} : 2 = \sqrt{3} : 1$ 。よって $P(x, y, z)$ とおくと

$$\overline{AG} = \sqrt{3} \cdot \overline{GP} \iff |z - 2\sqrt{3}| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \iff (z - 2\sqrt{3})^2 = 3(x^2 + y^2) \quad \dots \textcircled{1}$$

平面の式: $z = \sqrt{3}x$ と連立して

$$(\sqrt{3}x - 2\sqrt{3})^2 = 3(x^2 + y^2) \iff x^2 - 4x + 4 = x^2 + y^2 \iff x = 1 - \frac{y^2}{4}$$

$0 \leq z = \sqrt{3}x \leq 2\sqrt{3}$ と合わせると, C' の軌跡は

$$C' : x = 1 - \frac{y^2}{4} \quad (x \geq 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

(2) ② より, D を xy 平面に正射影した領域は右上図の斜線部分となる。この面積を S' とすると

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 - \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) dy = 2\pi - \frac{8}{3} \quad \dots \textcircled{3}$$

円すいの母線と半径の比は $2 : 1$ なので, S と S' の比も $2 : 1$ 。よって

$$S = 2 \left(2\pi - \frac{8}{3}\right) = 4\pi - \frac{16}{3}$$

Comment

「立体を上手に切断する」のセクションで述べたように

$$z = f(x) \text{ を } z \text{ 軸の周りに回転した立体の式は } z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

この場合は $z = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x$ を z 軸の周りに回転した図形だから,

$$z = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} \iff z - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$$

これは ① の表す図形の半分です。① は $z - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ (円すいの上半分) を含んでいます。

12.4 練習問題

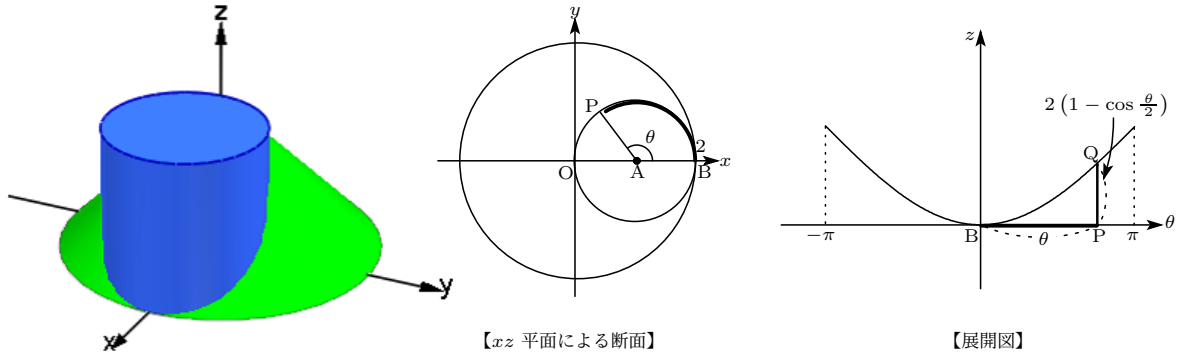
少しいろいろ練習してみます。まずは、円すいと円柱です。以前、体積を求めたのと同じ図形です。

練習 1

xyz 空間内に、底面が $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$, 頂点が $(0, 0, 2)$ の円錐と、底面が $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, z = 0$, 上面が $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, z = 2$ の円柱がある。(ただし円柱と円錐は、内部も含むものとする。)

(1) この円柱の側面のうち円錐の内部にもある部分の面積 S_1 を求めよ。

(2) この円すいの側面のうち円柱の内部にもある部分の面積 S_2 を求めよ。



(1) まず円すいの側面の式を立てましょう。この側面は xz 平面の線分 $z = 2 - x$ ($0 \leq z \leq 2$) を z 軸の周りに回転した曲面だから

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \iff (z - 2)^2 = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

もちろん図形的にやっても求まる。さて、円柱の底の円の中心を点 $A(1, 0, 0)$, 円周上に点 $B(2, 0, 0)$, 点 $P(\cos \theta + 1, \sin \theta)$ をとる。P を通り z 軸に平行な直線上の点を $Q(x, y, z)$ とするとき,

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 \\ \sin \theta \\ t \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

Q が l と円すいの側面の交点のとき, ①, ② を連立して

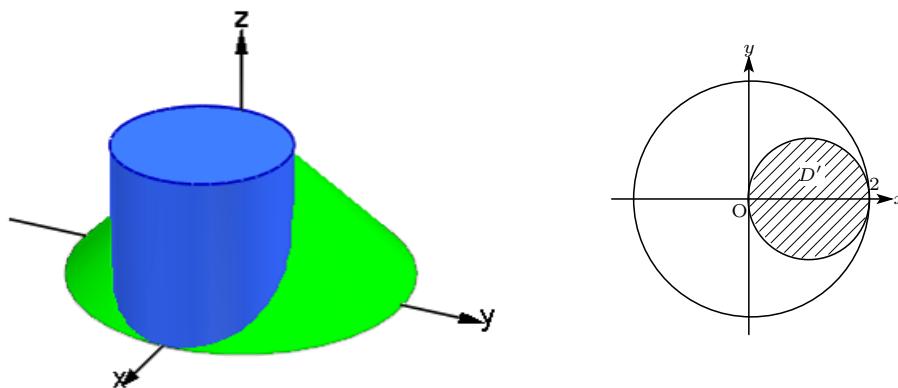
$$(t - 2)^2 = (\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta = 2(1 + \cos \theta) = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad \therefore t = 2 \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad \dots \textcircled{3}$$

ここで $0 \leq z \leq 2$ より $0 \leq t \leq 2$ となることを使った。さて ③ より

$$\overline{PQ} = (Q \text{ の } z \text{ 成分}) = 2 \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad \dots \textcircled{4}$$

(弧 BQ の長さ) = θ だから, θ が $\Delta \theta$ 増加したとき, 線分 PQ の描く領域の面積は $\Delta \theta \times \overline{PQ}$ 増加する。よって

$$S_1 = \sum \overline{PQ} \times \Delta \theta = \int_{-\pi}^{\pi} 2 \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) d\theta = 2 \left[\theta - 2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 4(\pi - 2)$$



(2) 円すいの側面のうち円柱の内部にもあるような点の集まりを D , D を xy 平面に正射影した領域を D' とすると, D' は円柱の底面と一致する. よって D' の面積を S_2' とすると

$$S_2' = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

円すいの母線と半径の比は $\sqrt{2}:1$ なので, S と S' の比も $\sqrt{2}:1$. よって

$$S_2 = \sqrt{2} S_2' = \sqrt{2}\pi$$

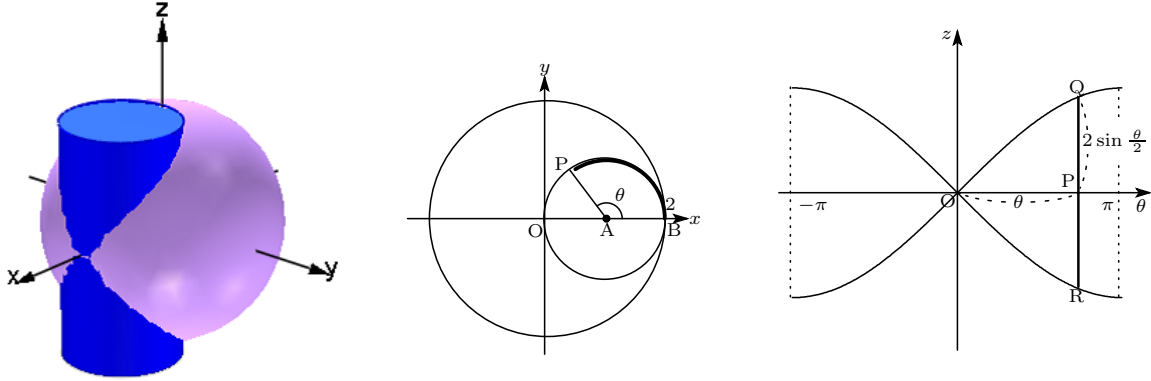
Comment

- 1 体積を求めた際に得られた式を使えば もっと楽にできましたが, 一からやり直してみました.
- 2 円すいの側面積は「あっ」という間に 求まってしまうですね.

今度は球と円柱をやってみます。これも以前と同じ図形です。まず自分でやってみてください。

練習 2

xyz 空間において円柱 $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ と球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ がある。円柱の側面のうち球の内部にもある点 $P(x, y, z)$ の全体からなる図形を考える。この図形の表面積 S を求めよ。



先の練習と殆ど同じですね。円柱の底の円の中心を点 $A(1, 0, 0)$ 、円周上に点 $B(2, 0, 0)$ 、点 $P(\cos \theta + 1, \sin \theta)$ をとる。 P を通り z 軸に平行な直線を l 、 l と球が 2 つ交点を持つとき その交点を Q と R とする。 l の方向ベクトルを $\vec{n} = (0, 0, 1)$ にとると、

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 \\ \sin \theta \\ t \end{pmatrix} \quad \dots ①$$

① と 球の方程式を連立して

$$(\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta + t^2 = 4 \iff t^2 = 2(1 - \cos \theta) = 4 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2. \quad \therefore t = \pm 2 \sin \frac{\theta}{2} \quad \dots ②$$

$|\vec{n}| = 1$ だから、③ より

$$\overline{QR} = |\vec{n}|(t \text{ の値の差}) = 4 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \quad \dots ③$$

(弧 BQ の長さ) $= \theta$ だから、 θ が $\Delta \theta$ 増加したとき、線分 QR の描く領域の面積は $\Delta \theta \times \overline{QR}$ 増加する。よって

$$S_2 = \sum \overline{QR} \times \Delta \theta = \int_{-\pi}^{\pi} 4 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 8 \int_0^{\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 16 \left[-\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 16$$

Comment

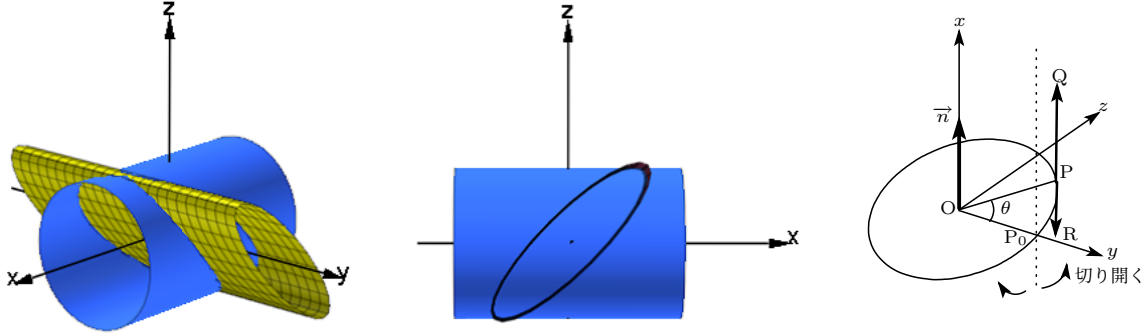
こちらの方が球の方程式がわかっているので簡単でした。

今度は側面積ではありませんが、挑戦してみてください。

練習 3

xyz 空間において、 x 軸と平行な柱面 $A = \{(x, y, z) | y^2 + z^2 = 1, x, y, z \text{ は実数} \}$ から y 軸と平行な柱面 $B = \{(x, y, z) | x^2 - \sqrt{3}xz + z^2 = \frac{1}{4}, x, y, z \text{ は実数} \}$ により囲まれる部分を切り抜いた残りの図形を C とする。図形 C の展開図を描け。ただし、点 $(0, 1, 0)$ を通り x 軸と平行な直線に沿って C を切り開くものとする。(東大・理系 1992 年)

$x^2 - \sqrt{3}xz + z^2 = \frac{1}{4}$ は楕円柱になります。しかしそんなことは知らなくとも問題ありません。



円柱の側面と yz 平面の交線の円: $y^2 + z^2 = 1, x = 0$ 上に点 $P_0(0, 1, 0)$, 点 $P(0, \cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) をとる。 P を通り x 軸に平行な直線を l , l と B が交点を持つとき、その交点の座標を (x, y, z) とする。 l の方向ベクトルを $\vec{n} = (1, 0, 0)$ にとると、

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

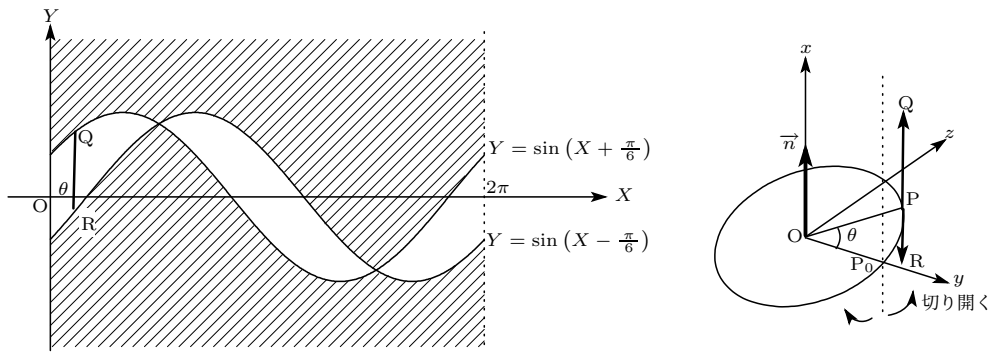
① と B の方程式を連立して

$$t^2 - \sqrt{3}t \sin \theta + \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \iff t = \frac{\sqrt{3} \sin \theta \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \pm \frac{1}{2} \cos \theta = \sin \left(\theta \pm \frac{\pi}{6} \right) \quad \dots \textcircled{2}$$

$t_1 = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$, $t_2 = \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$, それぞれに対応する (x, y, z) で表される点を Q, R とおくと、これらは B と l の交点を表す。

$$\begin{cases} \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t_1 \vec{n}, \\ \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t_2 \vec{n} \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = t_1 \vec{n}, \\ \overrightarrow{PR} = t_2 \vec{n} \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

点 P_0 を通り x 軸に平行な直線で円柱を切って開いたとすると、展開図上で $\overline{P_0P} = \theta$ 。よってこの展開図上で $\overline{P_0P}$ を X 軸正方向、 $\vec{n}$ を Y 軸方向にとると、 Q と R の Y 成分は t_1, t_2 で表されるので、求める図は 2 つの曲線 $Y = \sin \left(X + \frac{\pi}{6} \right)$, $Y = \sin \left(X - \frac{\pi}{6} \right)$ の外側の領域となる。(次図の斜線部分)



Comment

この問題と今までの問題の違いは,

(i) わけのわからない曲面との交点を考えている. (ii) $\overline{QR}$ ではなく Q や R の z 成分が問題になっているの2点でしょう. 因みに A の表面上で B によって囲まれた領域の面積を S を求めてみましょう.

$$\overline{QR} = \left| \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right| = |\cos \theta|$$

よって

$$S = \int_0^{2\pi} |\cos \theta| = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 4$$

となります. つまりこちらの方が上下関係が解らなくて良いぶん楽だといえます. (その代わり積分しないといけないが...)

— 「独り言」 —

それより気になるのは (i) です. 入試問題というのは往々にしてそうですが, 余り一般的でない関数を選ぶので問題が汚くなって印象に残りづらいです. 入試問題は大学が入学者の選抜のために作ったもので 高校生の数学の力をつけさせようと作ったものではありません. 従って 入試問題ばかりやっている と, 一番大切な「イメージ」がもてず「知識がばらばら」になってしまいます. 「力がついてからやる」のは良いですが, また「傾向を知るためにちょっと見る」のもとても大切ですが, 入試問題 (または入試問題しか入っていない問題集) ばかりやるのは, 「世界史の勉強で教科書を余り読まず問題集ばかり解いているようなもの」です. あるいは「英語で, 長文を読まず穴あき問題ばかりやっているようなもの」, 「英作文の問題は並べ替えしかなかったようなもの」です. すべて, イメージが持てず 数学も英語も歴史も **雑学** になってしまいます. 「百聞は一見にしかず」という言葉がありますが, これは「人間にとって, 雑学よりもイメージが大切なことを言っている」と私は解釈しています. 私にとって (小説のような) 筋のない本を読むほど苦痛なものではなく, 数学の問題集や英単語集などは, 数学嫌い, 英語嫌いを作り出すだけだと思います. もっと自分の感覚を信じてください. 人がなんと云おうと, 自分が力のついた気がしたら, それが自分にとっては良いやり方です. この本はよくある「入試問題の解き方を並べた本」では有りません. この本を読んできて, もしこの練習問題がすんなり解けたなら, このやり方はあなたにあっていきます. 似た様な, またはより高度な本を読んでいってください. またこの本が合わなければ別のあなたに合う本を探してください. 私はもちろん私に合う本しか書けないのですから...

第III部

演習 編

第13章 問題編

ここには入試問題や自作の問題のうち，程度も適当で，また興味深いと思った問題を入れました．余り時間制限とかなしないでやってみて下さい．「基本編」と「発展編」に分けてありますが，これは問題の難易でなく扱った内容で分けてあります．したがって「基本編」にも難しい問題があります．

13.1 基礎編

演習 1

- (1) $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$ を求めよ．
- (2) $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}}$ を求めよ．

演習 2

- (1) $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{4n-1} e^{\frac{k}{n}}$ を求めよ．
- (2) $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\left(\frac{k+1}{n} \right)^2 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) e^{\left(\frac{k}{n} \right)^2}$ を求めよ．

演習 3

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sin \frac{(k+1)\pi}{2n} - \sin \frac{k\pi}{2n} \right) \left(\sin \frac{k\pi}{2n} \right)^2 \text{ を求めよ.}$$

演習 4

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\tan \frac{(k+1)\pi}{4n} - \tan \frac{k\pi}{4n} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\tan \frac{k\pi}{4n} \right)^2} \text{ を求めよ.}$$

演習 5

放物線 $C: y = -x^2 + 2x$ と x 軸で囲まれる領域を y 軸の周りに回転した体積 V を求めよ．

演習 6

xy 平面上にあって 曲線 $y = -2x^2 + 2$ と x 軸で囲まれる領域を y 軸の周りに回転してできる立体 A を, さらに x 軸の周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ. (上智大・理工, 1982 年)

演習 7

xyz 空間に, 頂点が $A(0, 0, 2)$ で, 底面が $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ の円すいがある. この円すいを y 軸の周りに回転した回転体の体積を求めよ.

演習 8

xyz 空間内に, xy 平面上の円盤 $C: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ と, 原点を通り方向ベクトルが $\vec{n} = (1, 1, 1)$ の直線 $l: x = y = z$ がある. C を l の周りに一回転してできる立体の体積 V を求めよ. (東京理科大 1980 年)

演習 9

xyz 空間において次の 6 個の不等式で表される立体の体積 V を求めよ. (1988 年 東大・文系)

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 3, x + 2z \leq 4, y - z \leq 1$$

13.2 発展編

演習 10

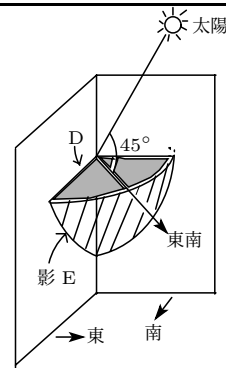
a を $0 < a < \frac{1}{4}$ をみたす実数とする. xy 平面で, 不等式

$$y^2 \leq x^2(1 - x^2) - a \quad \dots (*)$$

の表す領域を, y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ. (東大・理系 1997 年)

演習 11

図のように 2 つの壁がそれぞれ東, 南方向を向き, そこに半径 1 で中心角 90 度の扇形 D が水平に置かれている. いま太陽の光が東南方向から仰角 45 度で射し込んでいる時, D の影が 2 つの壁の間で作る空間領域 E の体積 V を求めよ. ただし D の厚さは考えないものとする.



演習 12

xyz 空間に 2 つの円柱 $C_1 : x^2 + y^2 \leq 1$, $C_2 : x^2 + z^2 \leq 1$ がある. この共通部分の立体を D とするとき, D の表面積 S , および D の表面のうち, 円柱 C_1 の表面上にある部分を展開した図を描け.

演習 13

r を正の実数とする. xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2 \cdots \textcircled{1}, \quad y^2 + z^2 \leq r^2 \cdots \textcircled{2}, \quad z^2 + x^2 \leq r^2 \cdots \textcircled{3}$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ. (東大・理系 2005 年)

演習 14

頂点が $A(0, 0, 2)$, 底面が $x^2 + y^2 \leq \frac{4}{3}$, $z = 0$ の円錐の側面と, 円柱 $y^2 + z^2 = 1$ の側面との交線を C とする. 円柱の側面のうち C によって囲まれている部分の面積を求めよ.

演習 15

頂点が $A(0, 0, 2)$, 底面が $x^2 + y^2 \leq \frac{4}{3}$, $z = 0$ の円錐の側面と円柱 $y^2 + z^2 = 1$ の側面で囲まれている立体の体積を求めよ.

演習 16

xyz 空間において条件 $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z^2 \leq x$, $0 \leq z \leq 1$ をみたす点 $P(x, y, z)$ の全体からなる立体を考える. この立体の体積を V とし, $0 \leq k \leq 1$ に対し, z 軸と直交する平面 $z = k$ による切り口の面積を $S(k)$ とする.

(1) $k = \cos \theta$ とおくととき $S(k)$ を θ で表せ. ただし, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする.

(2) V の値を求めよ. (東大・理系 1994 年)

演習 17

$x - z$ 平面内の曲線 $x^2 - z^2 = 1$ を z 軸の周りに回転したときできる曲面と平面 $z = 0, z = 1$ によって囲まれる立体を D_1 , 四角柱 $|x| \leq 1, |y| \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ を D_2 とする. D_2 のうち D_1 の外側にある領域の体積 V を求めよ.

演習 18

xyz 空間内に 2 直線

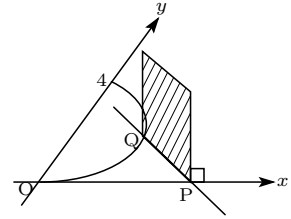
$$l; x = 1, y = z = 0$$

$$m; x = 0, y + z = 1$$

があり, l 上の点 P から m に降ろした垂線の足を Q とする. P が l 上を動く時, 線分 PQ が描く曲面 C と xy, yz, zx 平面で囲まれる領域を E とする. このとき, E の体積を求めよ.

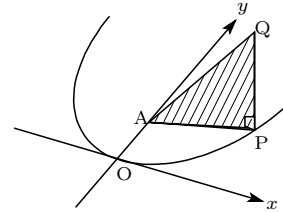
演習 19

円 C を $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, 点 P は x 軸上の点で, P を通り傾きが (-1) の直線を l , l と C が 2 点で交わるとき, その交点のうち x 成分の大きい方の点を Q とし, 線分 PQ を一辺とする正方形を図のように xy 平面に垂直に立てて作る. 点 P が x 軸上 (ただし $x \geq 0$) を原点から出発し, l が C と接するまで動くとき, この正方形が動いてできる立体の体積 V を求めよ.



演習 20

放物線 C を $y = x^2$, 点 A を $A(0, \frac{1}{4})$, 点 P は C 上の点で, 線分 AP を等辺とした直角二等辺三角形 $\triangle APQ$ を図のように xy 平面に垂直に立てて作る. 点 P が C 上を原点から点 $B(2, 4)$ まで動くとき, この三角形が動いてできる立体の体積 V を求めよ.



演習 21

底面が $x^2 + y^2 \leq 1$, 頂点が $A(0, 2)$ の円すいの側面を K とする. K を原点を通り母線と平行な平面 H で切る. 平面 H の下側にあって, 曲面 K と平面 H と xy 平面で囲まれた立体の体積を求めよ.

演習 22

xy 平面上の曲線 $C: x^3 + y^3 - 2\sqrt{2}xy = 0$ が囲む領域を $y = x$ の周りに回転した立体の体積を求めよ.

演習 23

デカルトの正葉線 $C: x^3 + y^3 - 2\sqrt{2}xy = 0$ が囲む領域の面積を求めよ.

第14章 演習解答

14.1 基本編

演習 1

- (1) $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$ を求めよ.
- (2) $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}}$ を求めよ.

注1)

(1) 区分求積法から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \quad \dots (\text{答})$$

(2) 一般に $x > 1, y > 0$ のとき,

$$(\sqrt{x} + y)^2 - (x + y) = (2\sqrt{x} - 1)y + y^2 > 0$$

よって $x > 1, y > 0$ のとき

$$\sqrt{x} < \sqrt{x+y} < \sqrt{x} + y \quad \dots \textcircled{1}$$

$x = 1 + \frac{k}{n}, y = \frac{k}{n^2}$ を代入して

$$\sqrt{1 + \frac{k}{n}} < \sqrt{1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}} < \sqrt{1 + \frac{k}{n}} + \frac{k}{n^2}$$

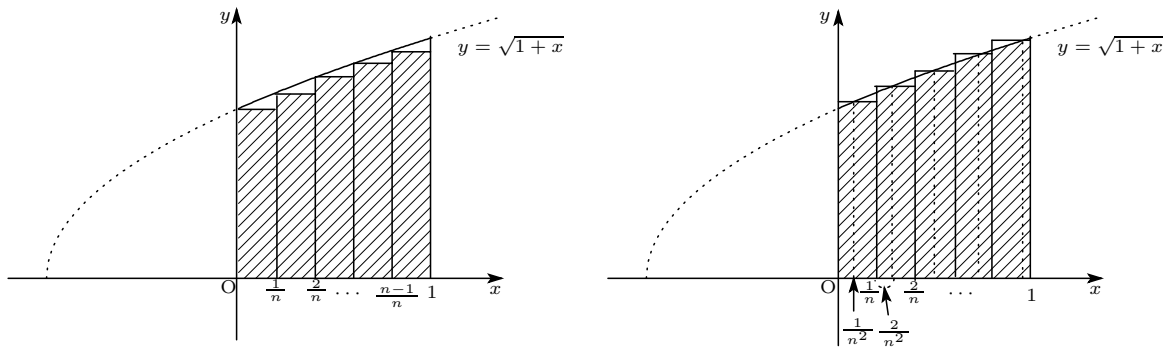
この式は $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対し成り立つから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} &< \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}} < \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \\ \therefore \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} &< \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}} < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \end{aligned}$$

(1) より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$. また $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^2} = 0$ であるから,
ハサミウチより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}} = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

注1) この問題は 群馬大の問題 (1988 年) を参考に作りました.



上左図は I を, 右上図は J を表す. ($n=5$ のとき)

(2) 【別解】

$f(x) = \sqrt{1+x}$ とおき 区間 $[0, 1]$ を n 等分して各分点 $\{x_k\}$ を $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = 1$ となるようにとる. $\frac{k}{n} < \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2} < \frac{k+1}{n}$ だから, $\eta_k = \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}$ とおくと, $x_k < \eta_k < x_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). よって積分の定義より

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k) \Delta x = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx \quad (\text{略})$$

Comment

(読んでね)

前頁① より, $\sqrt{1 + \frac{k}{n}}$ と $\sqrt{1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}}$ の誤差は $\frac{k}{n^2}$ より小さい. そして

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{k}{n^2}}{\Delta x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{k}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 0$$

であるから, $\frac{k}{n^2}$ は Δx より高位の微小量となる. そして $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x = 1$ (積分区間の長さ) であるから,

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} = 0$ となり, $\frac{k}{n^2}$ の和は J の値には影響しない. これが以前に述べた「 Δx より高位の微小量を

ϵ_k とすると, $\lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k = 0$ だから, 積分和に関係ない」ということ具体例です. 同様にして

$$K = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n} - \frac{k}{n^2}}, \quad L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{k}{n} + \frac{10k}{n^2}}$$

などもすべて I と同じ値に収束します. (下の表は数学ソフトの MuPAD を使って計算したものです.)

n	10	100	1000	10000
I	1.198118742	1.216879128	1.218744298	1.218930706
J	1.215697556	1.218812230	1.218939364	1.218950230
K	1.180213331	1.214942374	1.218549194	1.218911181
L	1.361763112	1.236049325	1.220693308	1.219125932

演習 2

(1) $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{4n-1} e^{\frac{k}{n}}$ を求めよ.

(2) $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\left(\frac{k+1}{n} \right)^2 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) e^{\left(\frac{k}{n} \right)^2}$ を求めよ.

(1) 区分求積法 (積分の定義) により

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{4n-1} e^{\frac{k}{n}} = \int_0^4 e^x dx = \left[e^x \right]_0^4 = e^4 - 1 \quad \dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} J &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\left(\frac{k+1}{n} \right)^2 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) e^{\left(\frac{k}{n} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{2k+1}{n^2} e^{\left(\frac{k}{n} \right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{2k}{n} e^{\left(\frac{k}{n} \right)^2} + \sum_{k=0}^{2n-1} e^{\left(\frac{k}{n} \right)^2} \right\} \end{aligned}$$

ここで (1) と同様にして $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} e^{\left(\frac{k}{n} \right)^2}$ は有限な値を持つので, 第 2 項は 0 に収束する. よって区分求積法から

$$J = \int_0^2 2x e^{x^2} dx$$

$x^2 = u$ とおくと, $2x dx = du$, $\frac{x}{u} \bigg|_0^2 \rightarrow \frac{2}{4}$. よって

$$J = \int_0^4 e^u du = e^4 - 1 \quad \dots (\text{答})$$

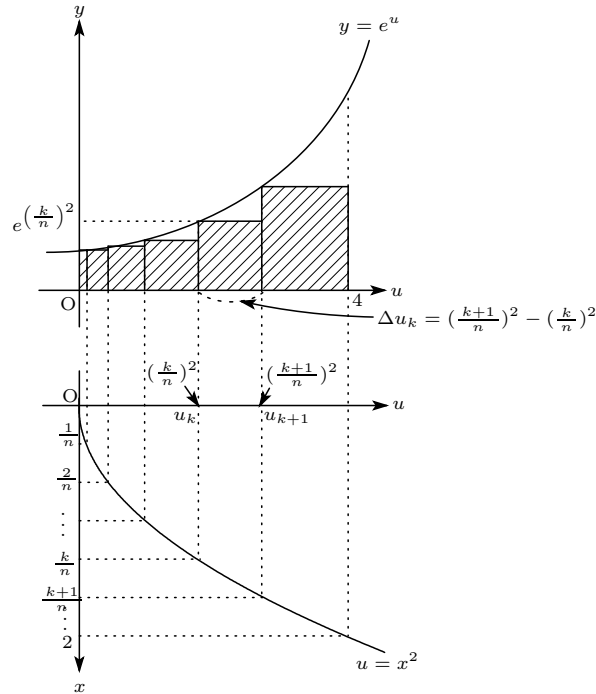
【別解】

(2) $u = x^2$ とおく. $x_k = \frac{k}{n}$, x_k に対応する u の値を u_k とおくと $u_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2$. さらに x が x_k から $\Delta x = \frac{1}{n}$ 増加したときの u の増加量を Δu_k とおくと $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k = \left(\frac{k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2$. よって

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\left(\frac{k+1}{n} \right)^2 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{2n-1} e^{u_k} \Delta u_k$$

ゆえに 積分の定義より

$$J = \int_0^4 e^u du \quad (\text{略})$$

Comment

先頁の解答から

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{2k}{n} e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^2 2xe^{x^2} dx$$

よって【別解】と合わせると

$$J = \int_0^2 2xe^{x^2} dx = \int_0^4 e^u du$$

すなわち, これは置換積分の図形的説明です. (基礎編参照) J は図の斜線部分の面積と等しくなります. (図は $n=3$ のとき) この例題と同様にして, $f(x), g'(x)$ が連続関数のとき,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(g(x_k)) (g(x_{k+1}) - g(x_k)) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(u_k) \Delta u_k = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du$$

(ただし $u = g(x)$ とおいた)

演習 3

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sin \frac{(k+1)\pi}{2n} - \sin \frac{k\pi}{2n} \right) \left(\sin \frac{k\pi}{2n} \right)^2 \text{ を求めよ.}$$

$x_k = \frac{k\pi}{2n} (k=0, 1, 2, 3, \dots, n-1)$ とおくと $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ となり $\{x_k\}$ は区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ を n 等分する. この分割の幅を Δx とおくと $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{2n}$. さらに $g(x) = \sin x$ とおくと, 平均値の定理より

$$\sin \frac{(k+1)\pi}{2n} - \sin \frac{k\pi}{2n} = \sin x_{k+1} - \sin x_k = g(x_{k+1}) - g(x_k) = g'(c_k)(x_{k+1} - x_k) = \cos c_k \Delta x$$

ただし, $x_k < c_k < x_{k+1}$ で c_k は区間 $[x_k, x_{k+1}]$ 内の適当に定まる点. そして

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sin \frac{(k+1)\pi}{2n} - \sin \frac{k\pi}{2n} \right) \left(\sin \frac{k\pi}{2n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \cos c_k (\sin x_k)^2 \Delta x$$

積分の定理より, 分割の幅を小さくしていけば, その区間に含まれる任意の点を取って和を取っても同じ値に収束するので, (基礎編参照)

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \cos c_k (\sin x_k)^2 \Delta x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (\sin x)' dx$$

$\sin x = u$ とおくと, $du = \cos x dx, \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ u & 0 \rightarrow 1 \end{array}$. よって

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x) = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad \dots (\text{答})$$

Comment

$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sin \frac{(k+1)\pi}{2n} - \sin \frac{k\pi}{2n} \right) \left(\sin \frac{k\pi}{2n} \right)^2$ は図の斜線部分の面積と等しくなります. (図は $n=6$) これは「置換積分の原理そのもの」です. 先の問題との違いは**平均値の定理を使わないと Δx が取り出せない** 点です. $u = \sin x = g(x)$, $f(u) = u^2$ とおくと

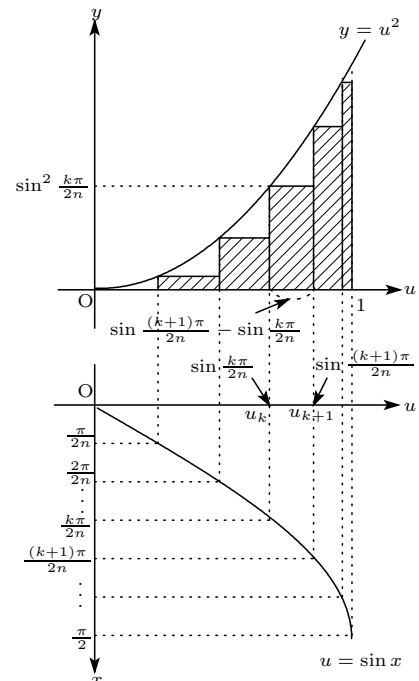
$$\begin{aligned} I &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(g(x_k)) (g(x_{k+1}) - g(x_k)) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(g(x_k)) g'(c_k) (x_{k+1} - x_k) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

一方, 前頁と同様に (右図をジーと見てください)

$$I = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(u_k) \Delta u_k \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から, $u = g(x)$ とおくと

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(u) du$$



演習 4

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\tan \frac{(k+1)\pi}{4n} - \tan \frac{k\pi}{4n} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\tan \frac{k\pi}{4n} \right)^2} \text{ を求めよ.}$$

$\theta_k = \frac{k\pi}{4n}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$) とおくと $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} = \frac{\pi}{4}$ となり $\{\theta_k\}$ は区間 $[0, \frac{\pi}{4}]$ を n 等分する. この分割の幅を $\Delta\theta$ とおくと $\Delta\theta = \theta_{k+1} - \theta_k = \frac{\pi}{4n}$. さらに $g(\theta) = \tan \theta$ とおくと, 平均値の定理より

$$\tan \frac{(k+1)\pi}{4n} - \tan \frac{k\pi}{4n} = \tan \theta_{k+1} - \tan \theta_k = g(\theta_{k+1}) - g(\theta_k) = g'(c_k)(\theta_{k+1} - \theta_k) = \frac{1}{\cos^2 c_k} \Delta\theta$$

ただし, $\theta_k < c_k < \theta_{k+1}$ で c_k は区間 $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ 内の適当に定まる点. そして

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\tan \frac{(k+1)\pi}{4n} - \tan \frac{k\pi}{4n} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\tan \frac{k\pi}{4n} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos^2 c_k} \cdot \frac{1}{1 + \left(\tan \theta_k \right)^2} \Delta\theta$$

前頁の問題と同様に, 積分の定理より

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos^2 c_k} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \theta_k} \Delta\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4} \quad \dots (\text{答})$$

Comment

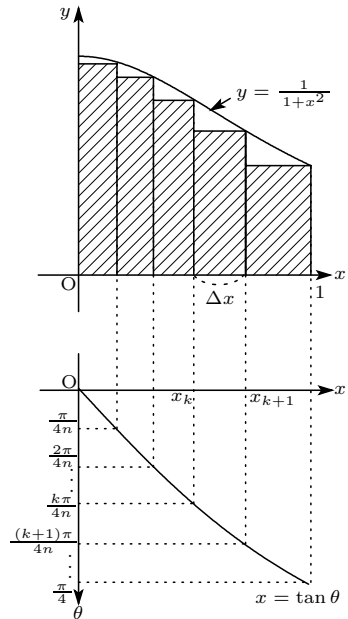
$x = g(\theta) = \tan \theta$, $x_k = g(\theta_k)$, $x_{k+1} - x_k = \Delta x$ とおくと

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\tan \theta_{k+1} - \tan \theta_k) \cdot \frac{1}{1 + (\tan \theta_k)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (g(\theta_{k+1}) - g(\theta_k)) \frac{1}{1 + g(\theta_k)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) \frac{1}{1 + (x_k)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (x_k)^2} \Delta x = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \end{aligned}$$

最後の式は区分求積法 (積分の定義) を使った. 解答の式と合わせると

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} (\tan \theta)' d\theta$$

すなわちこれも置換積分の説明になっている. しかし先の問題と逆に $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ (斜線部分の面積の極限) を求めるために $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(g(\theta_k)) (g(\theta_{k+1}) - g(\theta_k)) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(g(\theta_k)) g'(c_k) (\theta_{k+1} - \theta_k)$ を使っている点が異なります. $x = a \sin \theta$ において $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ を求めるのもこのタイプの置換です.



演習 5

放物線 $C: y = -x^2 + 2x$ と x 軸で囲まれる領域を y 軸の周りに回転した体積 V を求めよ。

【解1】「 $y = k$ で切った断面を考える」

$y = k$ と $y = -x^2 + 2x$ を連立すると

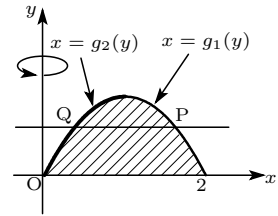
$$k = -x^2 + 2x \iff x^2 - 2x + k = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1-k}$$

ゆえに $0 \leq k < 1$ のとき, $y = -x^2 + 2x$ と 直線 $y = k$ は異なる2つの交点をもつ. y 軸に遠い方から点 P, Q とし P の方程式を $x = g_1(y)$, Q の方程式を $x = g_2(y)$ とすると, $0 \leq y < 1$ のとき

$$g_1(y) = 1 + \sqrt{1-y}, \quad g_2(y) = 1 - \sqrt{1-y}$$

よって求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \{g_1(y)\}^2 dy - \pi \int_0^1 \{g_2(y)\}^2 dy = \pi \int_0^1 \{(g_1(y))^2 - (g_2(y))^2\} dy \\ &= \pi \int_0^1 4\sqrt{1-y} dy = 4\pi \left[-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{8}{3}\pi \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

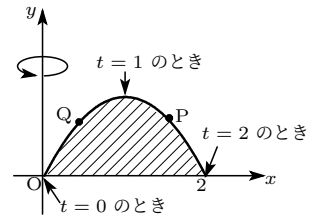


【解2】「パラメータ表示された曲線と考える」

C を $x = t, y = -t^2 + 2t$ とパラメータ表示された曲線と考えます。

$$\begin{array}{l|l} P(x(t), y(t)) \text{ が } x = g_1(y) \text{ 上にあるとき, } & \begin{array}{l} y \quad 0 \rightarrow 1 \\ t \quad 2 \rightarrow 1 \end{array} \\ Q(x(t), y(t)) \text{ が } x = g_2(y) \text{ 上にあるとき, } & \begin{array}{l} y \quad 0 \rightarrow 1 \\ t \quad 0 \rightarrow 1 \end{array} \end{array} \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi \{g_1(y)\}^2 dy - \int_0^1 \pi \{g_2(y)\}^2 dy = - \int_1^2 \pi \{x(t)\}^2 \frac{dy}{dt} dt - \int_0^1 \pi \{x(t)\}^2 \frac{dy}{dt} dt \\ &= - \int_0^2 \pi \{x(t)\}^2 \frac{dy}{dt} dt = - \pi \int_0^2 t^2(-2t+2) dt = - \pi \left[-\frac{t^4}{2} + \frac{2}{3}t^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$



Comment

基礎編で述べたように, パラメータ表示された曲線の回転体の体積は y に関する積分から変換せずに, 「パラメータに関する積分」の方から考えた方が式が立てやすいです. $I = \pi \int_0^2 x(t)^2 dt$ とおくと $I = \pi \int_0^1 x(t)^2 dt + \pi \int_1^2 x(t)^2 dt$. ここで I_1, I_2 の意味を考えます。

$$0 < t < 1 \text{ のときは } t \text{ が増加するとき } y \text{ も増加するので } \frac{dy}{dt} > 0$$

$$1 < t < 2 \text{ のときは } t \text{ が増加するとき } y \text{ は減少するので } \frac{dy}{dt} < 0$$

$$\therefore I_1 = \pi \int_0^1 x(t)^2 dt = \pi \int_0^1 x(t)^2 \frac{dy}{dt} dt > 0, \quad I_2 = \pi \int_1^2 x(t)^2 dt = \pi \int_0^1 x(t)^2 \frac{dy}{dt} dt < 0$$

よって I_1 は $x = g_2(y)$ と $y = 1, x = 0$ で囲まれる部分の回転体の体積 $V_{\text{内}}$ と等しく, $(-1)I_2$ は $x = g_1(y)$ と $y = 1, x = 0$ で囲まれる部分の回転体の体積 $V_{\text{外}}$ と等しくなるので, $I = I_1 + I_2 = V_{\text{内}} - V_{\text{外}} = -V$ となります. 一般に 閉曲線 $C: x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ が y 軸の右側にあり, t が増加するにつれて $(x(t), y(t))$ が時計回りに動くとき C の囲む領域を y 軸の周りに回転した立体の体積は $V_y = -\pi \int_\alpha^\beta t^2 \frac{dy}{dt} dt$ となります. (より正確な説明は「基礎編」参照)

【解 3】「バームクーヘン分割 (発展編参照) する」

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 2\pi x f(x) dx = \int_0^2 2\pi x (-x^2 + 2x) dx = \pi \int_0^2 (x^2)' (-x^2 + 2x) dx \\ &= \pi \left[x^2 (-x^2 + 2x) \right]_0^2 - \pi \int_0^2 x^2 (-2x + 2) dx = -\pi \int_0^2 x^2 (-2x + 2) dx \text{ (以下【解 2】と同じ)} \end{aligned}$$

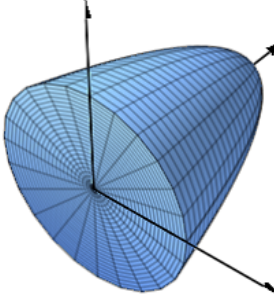
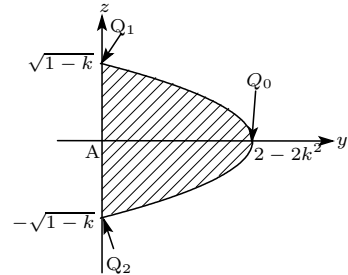
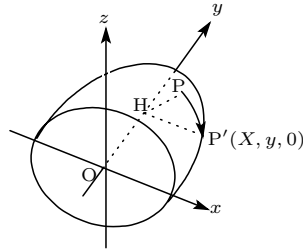
Comment

このように「パラメーターに関し積分する」ことと、「バームクーヘン分割して積分する」ことは、本質的には同じです。(発展編参照)

演習 6

xy 平面上にあって 曲線 $y = -2x^2 + 2$ と x 軸で囲まれる領域を y 軸の周りに回転してできる立体 A を、さらに x 軸の周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ。(上智大・理工, 1982 年)

A は立体ですから、立体の回転体になります。したがって軸に垂直な断面を考え、その上で軸から最も遠いまでの距離を求めます。(基礎編「立体の回転体」参照)

【立体 A 】【平面 $x = k$ による切り口】

A の側面の点を $P(x, y, z)$, P から y 軸に下ろした垂線の足を $H(0, y, 0)$, P を y 軸の周りに回転してできる円と xy 平面との交点を $P'(X, y, 0)$ とすると, $y = -2X^2 + 2$, かつ $|X| = \sqrt{x^2 + z^2}$ だから, $y = -2(x^2 + z^2) + 2$. すなわち, A の側面の方程式は, 注2)

$$y = -2(x^2 + z^2) + 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

A を平面 $x = k$ ($-1 < k < 1$) で切った断面を考えます. $x = k$ と $\textcircled{1}$ の式を連立して

$$y = -2z^2 - 2k^2 + 2$$

これは平面 $x = k$ 上の放物線を表す. $y \geq 0$ だから, A の $x = k$ による断面は右上図の斜線部分. この放物線上の点を $Q(k, -2t^2 - 2k^2 + 2, t)$ ($-\sqrt{1-k^2} \leq t \leq \sqrt{1-k^2}$), $A(k, 0, 0)$ とおくと

$$(\overline{AQ})^2 = (-2t^2 - 2k^2 + 2)^2 + t^2 = 4t^4 + (8k^2 - 7)t^2 + (-2k^2 + 2)^2 = 4s^2 + (8k^2 - 7)s + (-2k^2 + 2)^2$$

ただし, ここで $s = t^2$ とおいた. このとき $0 \leq s \leq 1 - k^2$ で $(\overline{AQ})^2$ は下に凸の二次関数だから, $(\overline{AQ})^2$ は区間の端点, すなわち $s = 0$ (図の Q_0 の点) または $s = 1 - k^2$ (図の Q_1, Q_2 の点) で最大値をとる. ゆえに

$$((\overline{AQ})^2 \text{の最大値}) = \max((-2k^2 + 2)^2, 1 - k^2) \quad \dots \textcircled{2}$$

どちらが大きいか比べるために 引き算してみると

$$(-2k^2 + 2)^2 - (1 - k^2) = 4(1 - k^2)^2 - (1 - k^2) = (1 - k^2)(-4k^2 + 3)$$

$1 - k^2 > 0$ だから

$$((\overline{AQ})^2 \text{の最大値}) = \begin{cases} 0 < k < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき, } (-2k^2 + 2)^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \leq k < 1 \text{ のとき, } 1 - k^2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

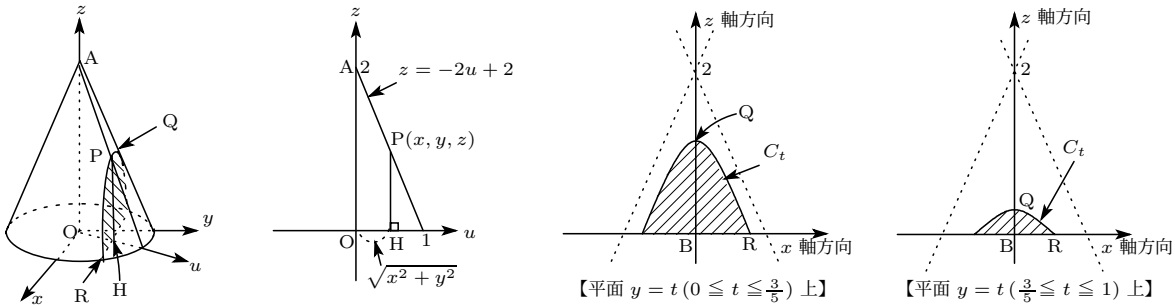
$\textcircled{3}$ が $x = k$ による断面の円の半径の 2 乗に等しい. よって yz 平面に関する対称性も考えると

$$V = 2 \left\{ \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi(-2k^2 + 2)^2 dk + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \pi(1 - k^2) dk \right\} = \left(\frac{4}{3} + \frac{17\sqrt{3}}{10} \right) \pi$$

注2) このように xy 平面の曲線 $y = f(x)$, $x \geq 0$ を y 軸の周りに回転してできる回転体の方程式は $y = f(\sqrt{x^2 + z^2})$ となります. 「立体を上手に切る」参照.

演習 7

xyz 空間に、頂点が $A(0,0,2)$ で、底面が $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ の円すいがある。この円すいを y 軸の周りに回転した回転体の体積を求めよ。



円すいの側面上の点を $P(x, y, z)$, P から xy 平面に下ろした垂線の足を $H(x, y, 0)$ とし, u 軸を $\overrightarrow{OH}$ 方向にとると「直線 AP の方程式は $z = -2u + 2$ 」 P の u 成分 $= \overline{OH} = \sqrt{x^2 + y^2}$ だから, P の方程式は

$$z = -2\sqrt{x^2 + y^2} + 2 \quad \dots ①$$

これは円すいの側面の方程式を表す。平面 $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$) 上では

$$z = -2\sqrt{x^2 + t^2} + 2 \longrightarrow (z - 2)^2 = 4(t^2 + x^2) \iff \frac{x^2}{t^2} - \frac{(z - 2)^2}{(2t)^2} = -1 \quad \dots ②$$

よって平面 $y = t$ による円すいの切り口は、双曲線 C_t になる。 $B(0, t, 0)$ として P が C_t 上を動くとき B からの距離の最大値を求めればよい。 $P(x, y, z)$ が C_t 上にあるとき ② より

$$\overline{BP}^2 = x^2 + z^2 = \frac{(z - 2)^2}{4} - t^2 + z^2 = \frac{5}{4}z^2 - z + 1 - t^2$$

これは下に凸の2次関数だから、最大値は C_t 上において z が最大、または最小のときとる。 すなわち、 C_t 上で $x = 0$ の点を Q , $z = 0$ の点を R とするとき、 $\overline{BQ}^2$ と $\overline{BR}^2$ の値を比べればよい。 ② で $x = 0$ とおくと、 $u - z$ 平面で円すいの側面の式が $z = -2u + 2$ であることから $Q(0, t, -2t + 2)$ 。 よって

$$\overline{BQ}^2 = (-2t + 2)^2 = 4(1 - t)^2 \quad \dots ③$$

③ で $z = 0$ において

$$\overline{BR}^2 = x^2 = 1 - t^2 \quad \dots ④$$

③, ④ より

$$\overline{BQ}^2 - \overline{BR}^2 = 4(1 - t)^2 - (1 - t^2) = (1 - t)(3 - 5t) \quad \dots ⑤$$

ゆえに $0 \leq t \leq \frac{3}{5}$ のとき、 $\overline{BQ} \geq \overline{BR}$, $\frac{3}{5} \leq t \leq 1$ のとき、 $\overline{BQ} \leq \overline{BR}$ 。 よって 平面 $y = t$ による断面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = \begin{cases} \pi \overline{BQ}^2 = 4\pi(1 - t)^2 \\ \pi \overline{BR}^2 = \pi(1 - t^2) \end{cases}$$

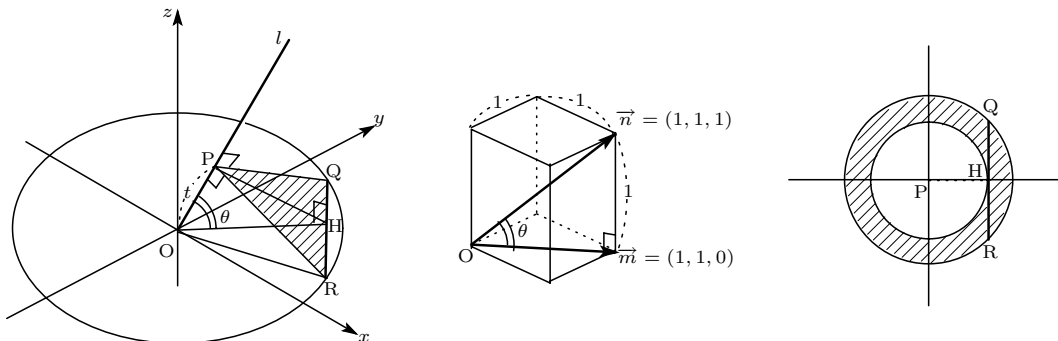
ゆえに求める体積は

$$V = \int_0^1 S(t) dt = \int_0^{\frac{3}{5}} 4\pi(1 - t)^2 dt + \int_{\frac{3}{5}}^1 \pi(1 - t^2) dt = \frac{104\pi}{75} \quad \dots (\text{答})$$

演習 8

xyz 空間内に、 xy 平面上の円盤 $C: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ と、原点を通り方向ベクトルが $\vec{n} = (1, 1, 1)$ の直線 $l: x = y = z$ がある。 C を l の周りに一回転してできる立体の体積 V を求めよ。 (東京理科大 1980 年)

概形は想像し難いでしょうが、体積には断面積さえ分かればよく、「円盤を $\vec{n}$ に垂直な平面で切ると線分 QR になる」ので、「立体の切り口はその線分 QR を回転させた円環 (ドーナツ) になります。」^{注3)}



l 上に点 P をとり $\overline{OP} = t$, P を通り l と垂直な平面 π と円 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ との交点を Q と R , さらに P から線分 QR に下ろした垂線の足を H とする。 $\triangle OPR$ は直角三角形だから

$$(\overline{PR})^2 = (\overline{OR})^2 - (\overline{OP})^2 = 1 - t^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、方向ベクトルの長さは $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\vec{n}$ の xy 平面への正射影を $\vec{m}$ とすると、 $|\vec{m}| = \sqrt{2}$. したがって $\angle POH = \theta$ とすると $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. よって

$$\overline{OH} = \frac{\overline{OP}}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t. \quad \therefore (\overline{PH})^2 = (\overline{OH})^2 - (\overline{OP})^2 = \frac{3}{2} t^2 - t^2 = \frac{1}{2} t^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

そして円盤 C の平面 π による切り口は、線分 QR となる。この線分を l の周りに回転させた円環 (右上図の斜線部分) が、求める立体の平面 π による切り口となる。この面積を $S(t)$ とおくと

$$S(t) = \pi \left\{ (\overline{PR})^2 - (\overline{PH})^2 \right\} = \pi \left(1 - t^2 - \frac{1}{2} t^2 \right) = \pi \left(1 - \frac{3}{2} t^2 \right) \quad \dots \textcircled{3}$$

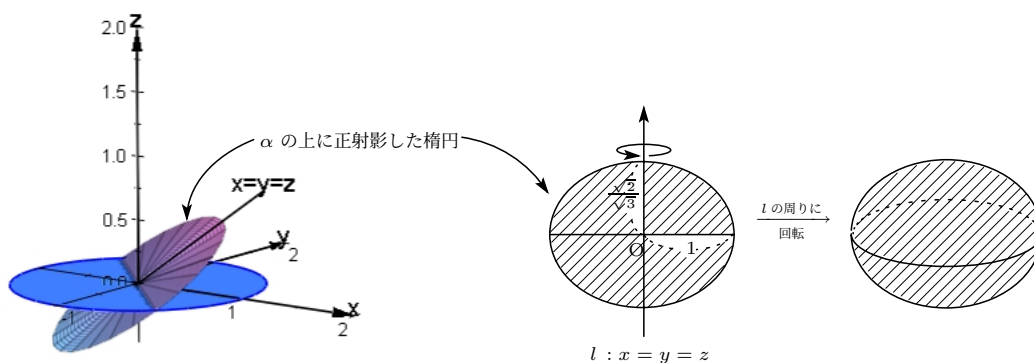
$\overline{OH} \leq 1$ より $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. さらに対称性より P が l の $z \geq 0$ の部分を動くときの立体の体積の2倍が求める体積だから

$$V = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} S(t) dt = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \pi \left(1 - \frac{3}{2} t^2 \right) dt = 2\pi \left[t - \frac{1}{2} t^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{6}}{9} \pi \quad \dots (\text{答})$$

【別解】 l を含む直線 QR と平行な平面を α , 円盤 C を α に正射影した楕円を C' とする。 $S(t) = \pi \left\{ (\overline{PR})^2 - (\overline{PH})^2 \right\} = \pi (\overline{RH})^2$ だから、^{注4)} 楕円 C' の平面 π による断面の面積と、 C の平面 π による断面の面積 $S(t)$ は一致する。断面積が等しいので、 C を l の周りに回転した立体の体積と、 C' を l の周りに回転した立体の体積は等しい。

注3) 「廻してから切るのではなく、切ってから廻せ」です。

注4) 発展編「接線の描く領域の面積」を見れば、これがもっと一般的なことの特別な例であることが分かります。



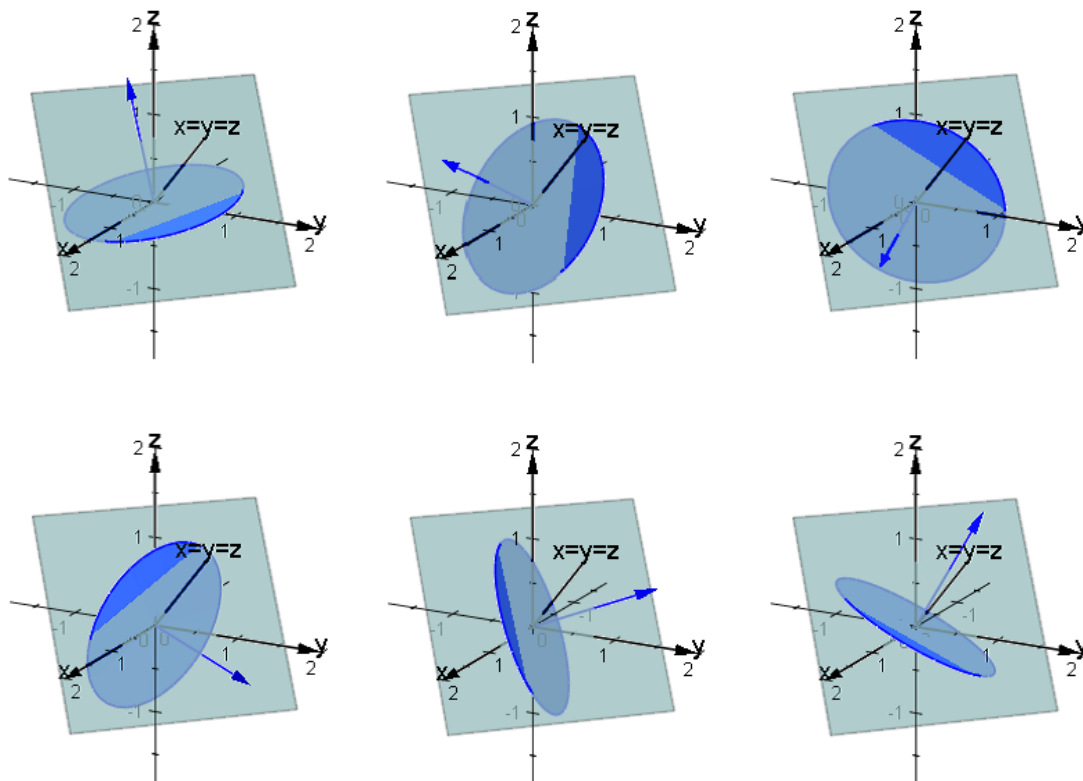
α と xy 平面のなす角は、先の解答の θ と一致するので、 C の α の上への正射影は、半径 1 の円盤を α と xy 平面との交線 ($y = -x, z = 0$) と垂直な方向に $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 倍に拡大した楕円となる。すなわち短軸の長さが $2 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 、長軸の長さが $1 \times 2 = 2$ の楕円となる。これを l の周りに回転した立体の体積と V は等しいから、

$$V = (\text{半径 1 の球の体積}) \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\pi \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{9}\pi$$

Comment

平面図形 C の l の周りの回転体の体積は、 l を含み C に平行な平面 α に C を正射影してできる α 上の図形 C' を l の周りに回転してできる立体の体積と等しくなります。(これは断面積が等しくなるため、二つの立体が合同というわけではありません。) 詳しくは「基礎編 立体の回転体」をご覧ください。

【参考】 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ を通り l と垂直な平面による立体の切り口は、切り口の弦が回転してできるドーナツ。



演習 9

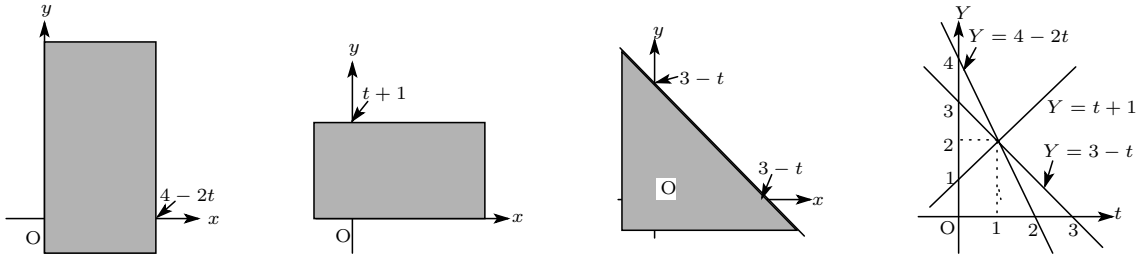
xyz 空間において次の6個の不等式で表される立体の体積 V を求めよ. (1988年 東大・文系)

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 3, x + 2z \leq 4, y - z \leq 1$$

$x = t$ とおくか, $y = t$ とおくか, $z = t$ とおくか迷うところですが, 後半の3つの不等式に x は2回, y も2回, z は3回出てくるので, おそらく $z = t$ と置くのが良いでしょう. $z = t$ と置いてみると (t は適当な範囲の定数)

$$\begin{cases} x + y \leq 3 - t & \cdots \textcircled{1} \\ 0 \leq x \leq 4 - 2t & \cdots \textcircled{2} \\ 0 \leq y \leq t + 1 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

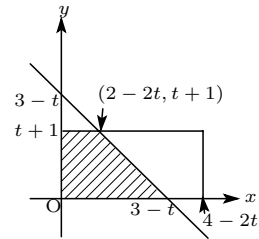
①, ②, ③ が空集合にならないために $0 \leq t \leq 2$ が必要で, このとき①, ②, ③ の領域は, 図のようになる. さらに, グラフより $t = 1$ を境に場合分けすればよいことが解る. $z = t$ による立体の断面積を $S(t)$ とおく.



(i) $0 \leq t \leq 1$ のとき

$z = t$ による断面は右図のようになるので,

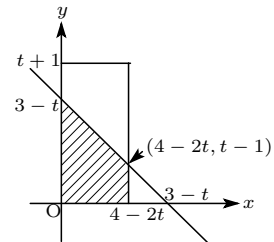
$$S(t) = \frac{1}{2} \{ (2 - 2t) + (3 - t) \} (t + 1) = \frac{1}{2} (-3t^2 + 2t + 5)$$



(ii) $1 \leq t \leq 2$ のとき

$z = t$ による断面は右図のようになるので,

$$S(t) = \frac{1}{2} \{ (t - 1) + (3 - t) \} (4 - 2t) = -2t + 4$$

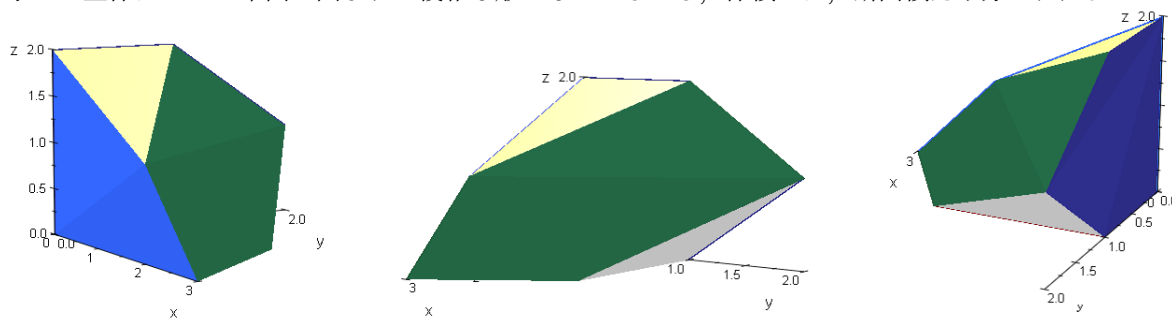


よって求める体積は

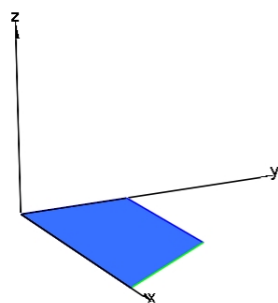
$$V = \int_0^2 S(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (-3t^2 + 2t + 5) dt + \int_1^2 (-4t + 8) dt = \frac{7}{2}$$

Comment

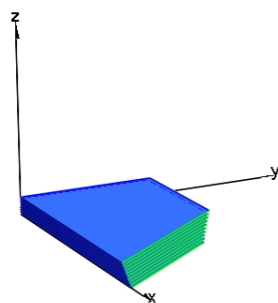
下図は立体の概形である．一般に $ax + by + cz = d$ はベクトル $\vec{u} = (a, b, c)$ に垂直な平面を表すので，求める立体は 6 つの平面に囲まれた複雑な形になる．しかし，体積には，断面積だけ分かればよい．



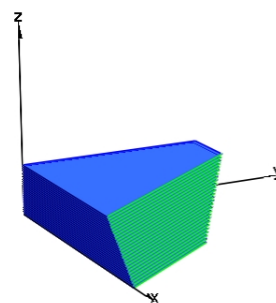
【参考】 $z = t$ による断面を重ねて描いたアニメーション



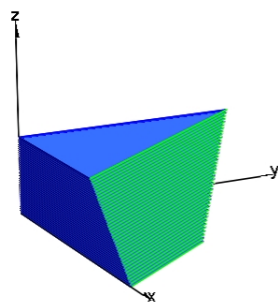
【 $t = 0$ のとき】



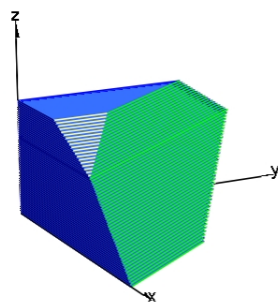
【 $t = 0.3$ のとき】



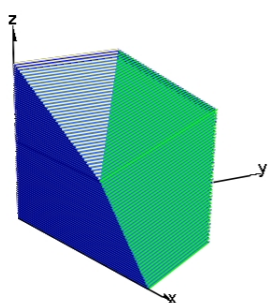
【 $t = 0.7$ のとき】



【 $t = 1$ のとき】



【 $t = 1.5$ のとき】



【 $t = 2$ のとき】

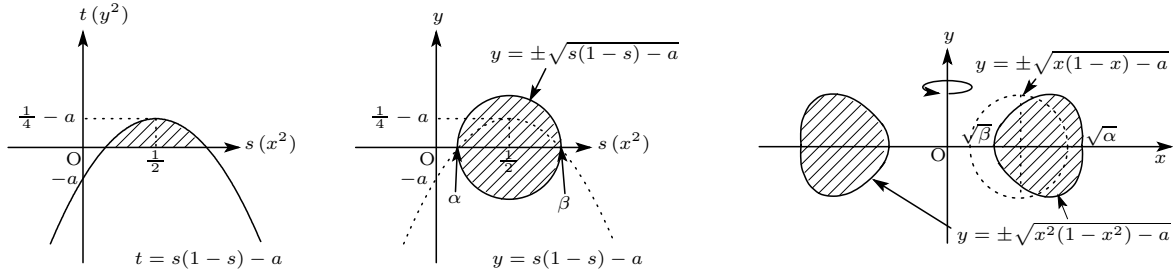
14.2 発展編

演習 10

a を $0 < a < \frac{1}{4}$ をみたす実数とする. xy 平面で, 不等式

$$y^2 \leq x^2(1-x^2) - a \quad \dots (*)$$

の表す領域を, y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ. (東大・理系 1997 年)



微分とかしなくとも立体の概形は分かります. $s=x^2, t=y^2$ とおくと (*) は

$$0 \leq t \leq s(1-s) - a$$

よって $s-t$ 平面における概形は左図の斜線部分のようになります. また $0 < a < \frac{1}{4}$ という条件の意味も図から分かります. すなわち「 $a > \frac{1}{4}$ 」は「放物線が s 軸と共有点を持つ」ための条件で, 「 $a > 0$ 」は「原点を斜線部分に含まない」という条件になります. これを $s-y$ 平面に移すと, $y = \pm\sqrt{s(1-s)-a}$ ですから, s 軸に対して対称な図形に移ります. (実は円になります.) 特に「 $t = s(1-s) - a$ と s 軸の交点」と「 $y = \pm\sqrt{s(1-s)-a}$ と s 軸の交点」は一致します. さらにこの領域を $x-y$ 平面に移すと $x = \pm s$ ですから, y 軸に関して対称な図形に移ります. そして中央図が原点を含まないので (*) も原点を含みません. すなわち (*) の表す領域は右上図の斜線部分となり, x 軸, y 軸に関して対称です. ゆえに, 右上図で $x \geq 0, y \geq 0$ の領域を y 軸の周りに回転した立体の体積を 2 倍すれば, 求める体積 V となります. とりあえず「バームクーヘン分割」して見ましょう. まず $y = \pm\sqrt{x^2(1-x^2)-a} = 0$ とおいて

$$(x^2)^2 - x^2 + a = 0 \iff x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\alpha = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$ とおくと $x = \pm\sqrt{\alpha}, \pm\sqrt{\beta}$. ゆえに

$$V = 2 \times 2\pi \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} x f(x) dx = 4\pi \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} x \sqrt{x^2(1-x^2)-a} dx$$

ここで $x^2 = s$ とおくと $2x dx = ds, \frac{x}{s} \Big|_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \rightarrow \frac{\sqrt{\beta}}{\beta}$. よって

$$V = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{s(1-s)-a} ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{1}{4} - a - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2} ds \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで α, β は $\sqrt{s(1-s)} - a = 0$ の解であり, $y = \sqrt{s(1-s)} - a$ とおくと 「 $(s - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} - a$ 」
 だから, 定積分は 中心が $(\frac{1}{2}, 0)$, 半径 $\sqrt{\frac{1}{4} - a}$ の半円の面積と一致する. (前頁の中央図の円と同じ円!)
 よって

$$V = 2\pi \times \pi \left(\sqrt{\frac{1}{4} - a} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \pi^2 \left(\frac{1}{4} - a \right) \quad \dots(\text{答})$$

Comment

東大は 1989 年にも

「 $y = \pi x^2 \sin \pi x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) と x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに回転した立体の体積を求めよ」
 ……(**)

という問題を出題しています. 一般に $y = f(x^2)$ で表される関数と x 軸で囲まれる領域 ($y \geq 0$ の部分にあると仮定します) を y 軸の周りに回転した回転体の体積は, 「バームクーヘン分割」によると

$$V = 2\pi \int x f(x^2) dx$$

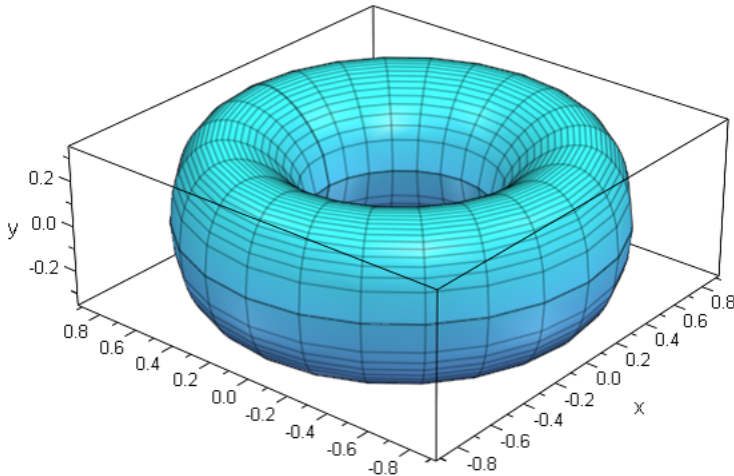
ここで $x^2 = t$ とおくと $2x dx = dt$ ですから

$$V = \pi \int f(t) dt$$

となり, $t-y$ 平面で $y = f(t)$ と t 軸で囲まれる面積の π 倍になります. 例えば, (**) の体積は $t-y$ 平面で $y = \pi t \sin \pi t$ ($0 \leq t \leq 1$) と t 軸で囲まれる領域の面積の π 倍になります.

【参考】

$y^2 = x^2(1-x^2) - a$ の概形 ($a = \frac{1}{8}$ の場合)



演習 11

図のように 2 つの壁がそれぞれ東, 南方向を向き, そこに半径 1 で中心角 90 度の扇形 D が水平に置かれている. いま太陽の光が東南方向から仰角 45 度で射し込んでいる時, D の影が 2 つの壁の間で作る空間領域 E の体積 V を求めよ. ただし D の厚さは考えないものとする.

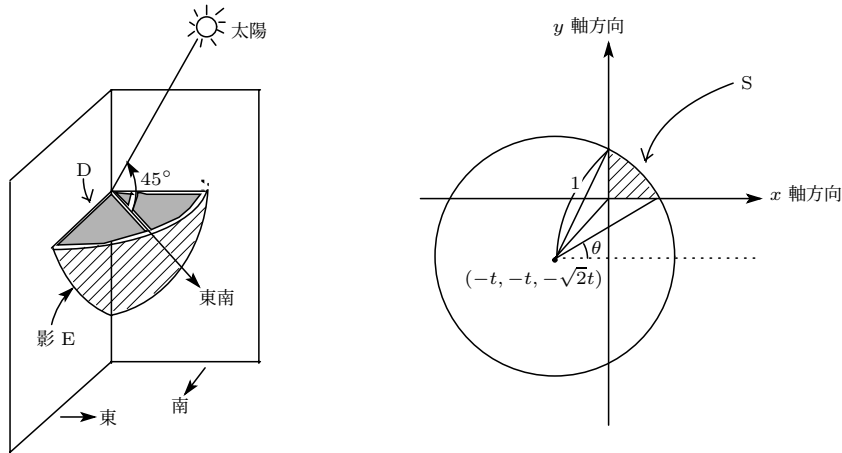
扇形 D の中心を O として, x, y, z 軸をそれぞれ南, 東, 真上方向にとる. このとき, 光の方向ベクトルは $(-1, -1, -\sqrt{2})$ であるから もし壁がなければ D の影は D を $(-1, -1, -\sqrt{2})$ 方向に平行移動したものとなる. よって平面 $z = -\sqrt{2}t (t \geq 0)$ による E の切り口は中心が $(-t, -t, -\sqrt{2}t)$ の $\frac{1}{4}$ 円盤 (ただし $x \geq 0, y \geq 0$) となる. そこで下図のように $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$ をとり, 平面 $z = -\sqrt{2}t (t \geq 0)$ による E の断面積を S とすると

$$t = \sin \theta, \quad \therefore z = -\sqrt{2}t = -\sqrt{2} \sin \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

(扇形の面積) から (三角形の面積) を引いて

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) - \frac{1}{2} t (\cos \theta - t) \times 2 = \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) - \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= \int_{-1}^0 \left(\frac{\pi}{4} - \theta + \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta \right) dz \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - \theta + \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta \right) \cos \theta d\theta \quad \dots \quad dz = -\sqrt{2} \cos \theta d\theta, \quad \left. \begin{array}{l} z \\ \theta \end{array} \right|_{-1}^{-1} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -1 \\ \frac{\pi}{4} \end{array} \right| \rightarrow 0 \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta - \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \cos \theta d\theta + \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta - \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2} \left[\theta \sin \theta + \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\sin^3 \theta + \cos^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi - \frac{2}{3} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$



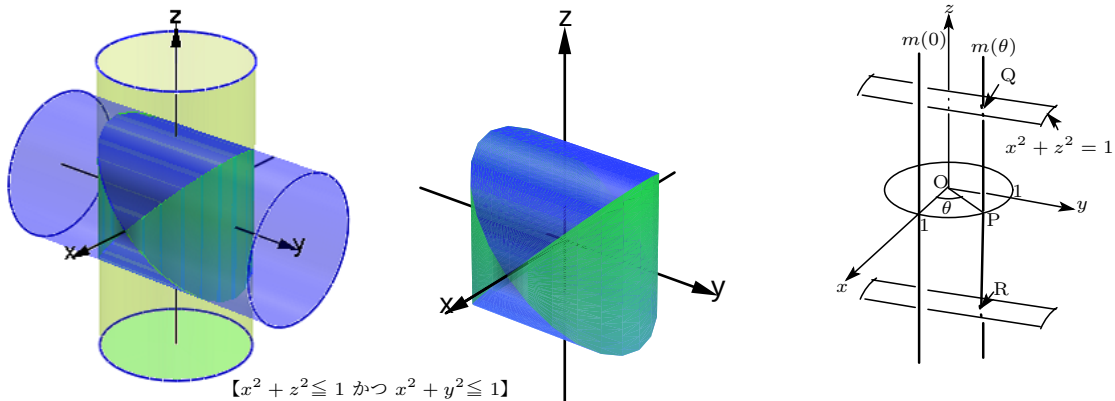
Comment

これは「大学への数学」(1999 年 1 月号)の「学力コンテスト」に採用された問題ですが, 解答を作成された方は, 東南方向に平行な平面で切っていました. 注5) このとき断面は全て直角 2 等辺三角形となり, すっきり求まります.

注5) 私も解答をつけて送ったが, 雑誌なのでそのまま答えが載るわけではない.

演習 12

xyz 空間に 2 つの円柱 $C_1: x^2 + y^2 \leq 1$, $C_2: x^2 + z^2 \leq 1$ がある. この共通部分の立体を D とするとき, D の表面積 S , および D の表面のうち, 円柱 C_1 の表面上にある部分を展開した図を描け.



対称性より 立体の側面のうち円柱 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある部分の面積を S_1 とすれば, 円柱 $x^2 + z^2 = 1$ 上にある部分の面積も S_1 と等しい. さて, $x^2 + y^2 = 1$ という C_1 の側面は 点 $P(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ を通り z 軸に平行な直線 $m(\theta)$ の集まりである.

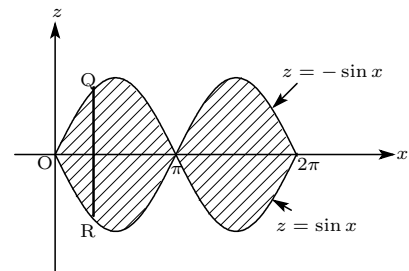
$$m(\theta): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ t \end{pmatrix} \quad (t \text{ は実数})$$

$m(\theta)$ と C_2 の側面の方程式 $x^2 + z^2 = 1$ を連立して

$$\cos^2 \theta + t^2 = 1 \iff t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \pm \sin \theta$$

よって, $m(\theta)$ と C_2 の交点の座標は

$$Q(\cos \theta, \sin \theta, \sin \theta) \text{ と } R(\cos \theta, \sin \theta, -\sin \theta)$$



一方, C_1 の側面を $m(0)$ から切り開いたとすると, 展開図上で $m(0)$ と $m(\theta)$ の距離は θ だから, 展開図は右図のようになる. また C_1 上の立体 D の表面積は

$$S_1 = \int_0^{2\pi} \overline{QR} d\theta = \int_0^{2\pi} |2 \sin \theta| d\theta = \int_0^{\pi} 4 \sin \theta d\theta = 4 \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi} = 8$$

よって求める表面積は

$$S = 2S_1 = 16$$

…(答)

Comment

体積は以前求めました. (有名問題) 展開図を上 C.G. と見比べて結果を納得してください. また, 半径が r の場合は, 表面積は相似比の 2 乗に比例するので, $S = 16r^2$ となります.

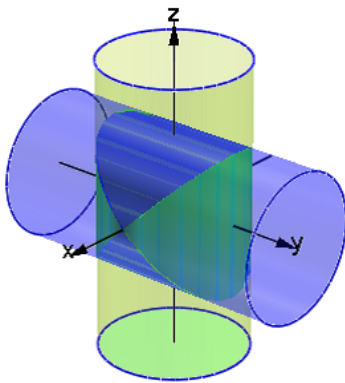
演習 13

r を正の実数とする. xyz 空間において

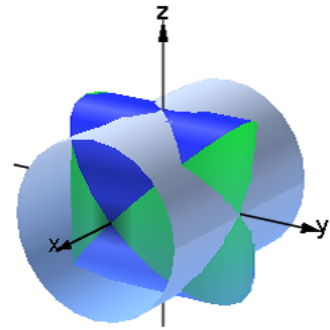
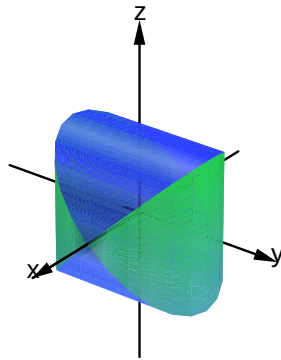
$$x^2 + y^2 \leq r^2 \dots \textcircled{1}, \quad y^2 + z^2 \geq r^2 \dots \textcircled{2}, \quad z^2 + x^2 \leq r^2 \dots \textcircled{3}$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ. (東大・理系 2005 年)

「二つの円柱の内部にあって、もう一本の円柱の外部になっているような点の集まり」ということです. $x^2 + z^2 \leq r^2$ と $x^2 + y^2 \leq r^2$ は、それぞれ y 軸, z 軸に平行な半径 r の円柱の内部 (および表面) を表しています. よってその共通部分は左下 および 中央下のような図形で、平面 $x = k$ ($-1 < k < 1$) で切ると、一辺が $2\sqrt{1-k^2}$ の正方形になります. また $y^2 + z^2 \geq r^2$ は x 軸に平行な半径 r の円柱の外部を表しています. よって右下図の「突き出た角」のような部分の体積が問題になっています. しかし、たとえば概形が分からなくとも、 $x = k$ ($-1 < k < 1$) で切った断面図は描けます. (基本編参照)



【 $x^2 + z^2 \leq r^2$ かつ $x^2 + y^2 \leq r^2$ 】



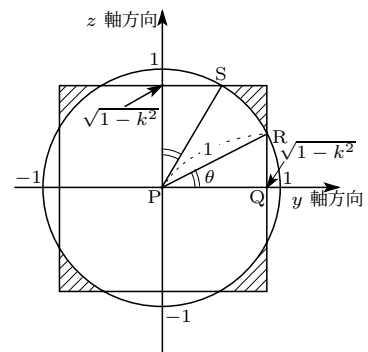
【3つの円柱】

求める立体を D , その体積を V とする. 「体積は相似比の 3 乗に比例する」ので, $r = 1$ のときの体積 V_0 を求めて、後でそれを r^3 倍すればよい. また明らかに立体は yz 平面に関し対称なので $x \geq 0$ の部分の体積を求める. $x = k$ ($0 \leq k \leq 1$) とおくと, ①, ③ の領域はそれぞれ

$$\begin{cases} k^2 + y^2 \leq 1 \\ z^2 + k^2 \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{1-k^2} \leq y \leq \sqrt{1-k^2} \\ -\sqrt{1-k^2} \leq z \leq \sqrt{1-k^2} \end{cases} \dots \textcircled{1}' \dots \textcircled{2}'$$

よって① と ③ の共通部分の平面 $x = k$ による切り口は、図の一辺が $2\sqrt{1-k^2}$ の正方形の内部となる. ② は $x = k$ 上では半径が 1 の円の外部を表すので, D の平面 $x = k$ による切り口は図の斜線部分になる. この面積を S とする. さらに図のように 角 θ を定めると $\overline{PQ} = \cos \theta$, $\overline{QR} = \sin \theta$. ゆえに

$$\sqrt{1-k^2} = \cos \theta \iff k = \sin \theta \dots \textcircled{4}$$



【平面 $x = k$ 上】

また、図から

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \overline{PQ}^2 - 2(\triangle PQR) - \text{扇形 PRS} = \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \\ \therefore S &= 4 \cos^2 \theta - (\pi - 4\theta) - 4 \sin \theta \cos \theta \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

$k = \sin \theta$ だから, $dk = \cos \theta d\theta$. また θ の動く範囲は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ だから

$$\begin{aligned} V_0 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(\theta) \cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{4 \cos^2 \theta - (\pi - 4\theta) - 4 \sin \theta \cos \theta\} \cos \theta d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \theta d\theta - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\pi - 4\theta) \cos \theta d\theta - 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin \theta)' (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{12} \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\pi - 4\theta) \cos \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\pi - 4\theta) (\sin \theta)' d\theta = \left[(\pi - 4\theta) \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-4) \sin \theta d\theta \\ &= 4 \left[-\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 - 2\sqrt{2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos \theta)' \cos^2 \theta d\theta = \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

よって

$$V_0 = 8 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{12} - 2(4 - 2\sqrt{2}) - 8 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12} \right) = 8\sqrt{2} - \frac{32}{3}$$

ゆえに

$$V = r^3 V_0 = \left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3} \right) r^3 \quad \dots (\text{答})$$

Comment

この問題は, 「ショートケーキ分割」などを用いると余計面倒になります. $x = k$ で切るのがもっとも自然だし, 計算量もそれほど多くないので適切な問題といえます. また**円と正方形が共有点を持つような k の取りえる範囲を求める必要はありません**. 結局は θ の範囲: $[0, \frac{\pi}{4}]$ を幅 $\Delta\theta$ の区間に細かく分割し,

$$V_0 = \sum \Delta V_0 = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \sum S(\theta) \Delta k = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \sum S(\theta) \cos \theta \Delta \theta$$

ということです.

演習 14

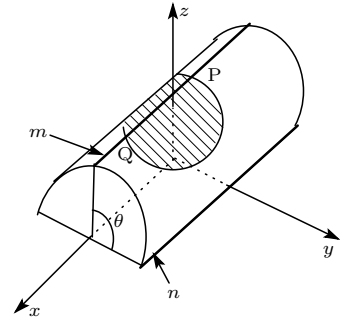
頂点が $A(0, 0, 2)$, 底面が $x^2 + y^2 \leq \frac{4}{3}, z = 0$ の円錐の側面と, 円柱 $y^2 + z^2 = 1$ の側面との交線を C とする. 円柱の側面のうち C によって囲まれている部分の面積を求めよ.

円柱の側面上の 1 点 $(0, \cos \theta, \sin \theta)$ を通り中心軸 (x 軸) と平行な直線を $m(\theta)$ とすると

$$m; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

円錐の側面の方程式は

$$3(x^2 + y^2) = (z - 2)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$



① と② を連立して

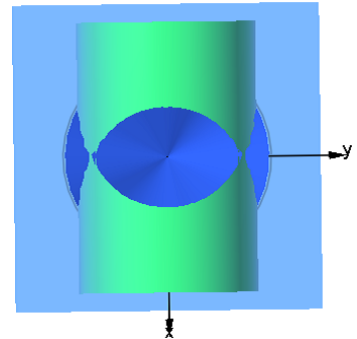
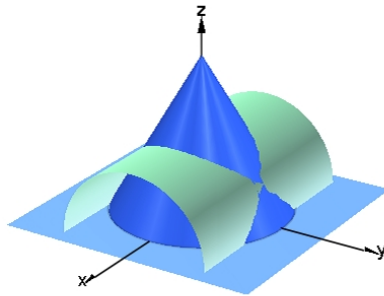
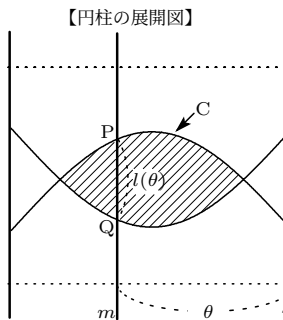
$$3(t^2 + \cos^2 \theta) = (\sin \theta - 2)^2 \iff 3t^2 = 4\sin^2 \theta - 4\sin \theta + 1 = (2\sin \theta - 1)^2$$

ゆえに① と② が 2 つ交点を持つとき, その交点の間の距離を $l(\theta)$ とすると

$$l(\theta) = 2|t| = \frac{2}{\sqrt{3}} |2\sin \theta - 1| \quad \dots \textcircled{3}$$

ところが円柱上に直線 $n; y = 1, z = 0$ をとると, $m(\theta)$ は n を x 軸の周りに θ 回転した直線であるから, n を切り口として円柱を展開したとすると, $m(\theta)$ と n の間の距離は $1 \times \theta = \theta$. よってその展開図 (但し $z \geq 0$ の範囲) は図のようになる. したがって求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} l(\theta) d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin \theta - 1) d\theta = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi \quad \dots (\text{答})$$

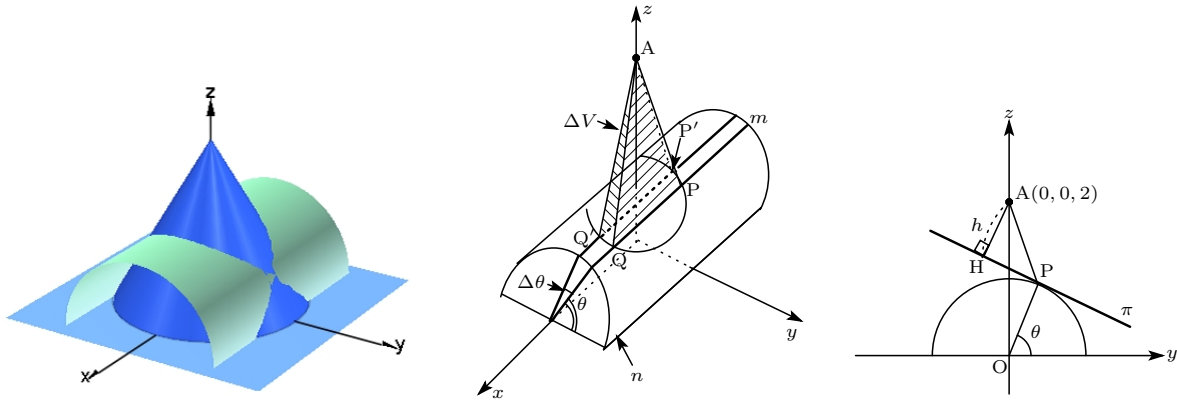


Comment

これは 1998 年 9 月号の「学力コンテスト」に採用された問題ですが, 読者のコメントを読むと「形が分からなかった」ので, ナスをくり抜いて実験した」という素晴らしいコメントがありました.

演習 15

頂点が $A(0, 0, 2)$ 、底面が $x^2 + y^2 \leq \frac{4}{3}$, $z = 0$ の円錐の側面と円柱 $y^2 + z^2 = 1$ の側面で囲まれている立体の体積を求めよ。



円柱の側面上の 1 点 $(0, \cos \theta, \sin \theta)$ を通り中心軸 (x 軸) と平行な直線を $m(\theta)$, m と円錐の側面との交点を P, Q とすると, 前問と同様にして,

$$PQ = \frac{2}{\sqrt{3}} |2 \sin \theta - 1| \quad \dots \textcircled{1}$$

次に, 直線 PQ における円柱の接平面を π とすると,

$$\pi : \cos \theta y + \sin \theta z = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

π と $A(0, 0, 2)$ との距離を h とすると, h は yz 平面における直線 $\cos \theta y + \sin \theta z - 1 = 0$ と点 $A(0, 0, 2)$ との距離と等しいから

$$h = \frac{|2 \sin \theta - 1|}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = |2 \sin \theta - 1| \quad \dots \textcircled{3}$$

平面 $\pi(\theta)$ を, 直線 $m(\theta)$ と $A(0, 0, 2)$ で定まる平面とし, K のうち, $\pi(\theta)$ と $\pi(\theta + \Delta \theta)$ で囲まれる部分の体積を ΔV とすると, $\Delta \theta \rightarrow 0$ のとき, ΔV は, 底面が四角形 $PP'Q'Q$, 高さが h の四角錐の体積で近似できるので

$$\Delta V = \frac{1}{3} \times (\text{四角形 } PP'Q'Q \text{ の面積}) \times h = \frac{1}{3} \times (PQ \times 1 \cdot \Delta \theta) \times h = \frac{2}{3\sqrt{3}} (2 \sin \theta - 1)^2 \Delta \theta \quad \dots \textcircled{4}$$

誤差は $\Delta \theta$ より高位の微小量となる. よって

$$V = \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2 \sin \theta - 1)^2 d\theta = \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi - 2 \quad \dots (\text{答})$$

Comment

この問題は, A を原点にとり, A と直線 m の距離を r , $\overline{PQ} = h$ として「ショートケーキ分割」をしても求まります. しかし, かなり面倒です. 実際の計算では, 「公式にとらわれず, とにかくうまく切る」ことを考えた方が計算が楽です.

演習 16

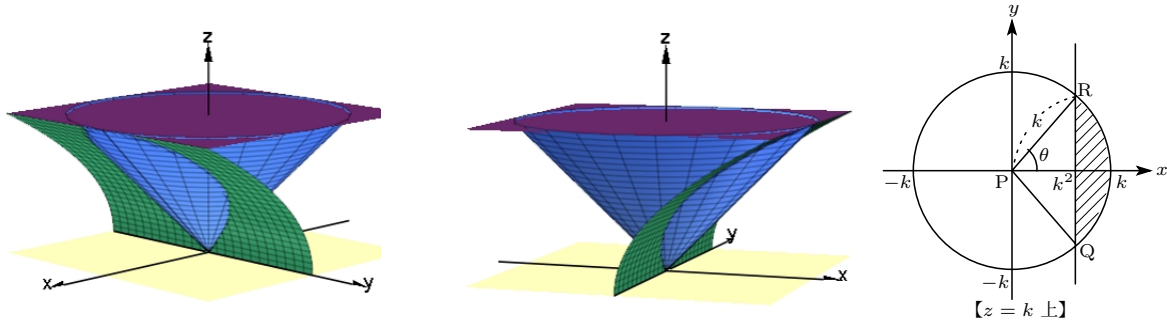
xyz 空間において条件 $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z^2 \leq x$, $0 \leq z \leq 1$ をみたす点 $P(x, y, z)$ の全体からなる立体を考える. この立体の体積を V とし, $0 \leq k \leq 1$ に対し, z 軸と直交する平面 $z = k$ による切り口の面積を $S(k)$ とする.

(1) $k = \cos \theta$ とおくと $S(k)$ を θ で表せ. ただし, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする.

(2) V の値を求めよ.

(東大・理系 1994 年)

$x^2 + y^2 = z^2$ は xz 平面の直線 $x = z$ を z 軸の周りに回転した円錐,^{注6)} 一方 $z^2 = x$ は zx 平面の放物線 $z^2 = x$ を zx 平面に垂直に平行移動してできる柱体である. ちょっと概形は想像できないかもしれないが体積を求めるには概形が分からなくとも解けます. (1) のヒントは無視して解いてみましょう.



さて概形は左上図のようになるが, どのように切ればよいだろう? 一般に「円錐は母線に平行な平面で切ると放物線になるが, それ以外は楕円や双曲線になって難しい。」そこで $z = k$ で切ることにする. $z = k$ ($0 \leq k \leq 1$) で切ると, $z = k$ 上では $x^2 + y^2 \leq z^2$ と $z^2 \leq x$ は, それぞれ

$$x^2 + y^2 \leq k^2 \text{ (円の内部)}, \quad k^2 \leq x \text{ (直線 } x = k^2 \text{ の右側)}$$

よって $z = k$ による切り口は右上図のようになる. ここで図のように θ を定めると

$$k \cos \theta = k^2 \iff \cos \theta = k$$

$0 \leq k \leq 1$ だから $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ である. $z = k$ による断面積を $S(k)$ とすると 図より

$$S(k) = (\text{扇形 PQR の面積}) - (\text{三角形 PQR の面積}) = \frac{1}{2} k^2 \angle QPR - \frac{1}{2} \cdot k \cdot \sin 2\theta$$

$k = \cos \theta$ だから

$$S(k) = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \theta \cdot (2\theta) - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \cdot \sin 2\theta = \theta \cos^2 \theta - \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$k = \cos \theta \text{ だから } dk = -\sin \theta d\theta. \quad \frac{k}{\theta} \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0 \rightarrow \frac{1}{0}. \quad \text{ゆえに}$$

$$V = \int_0^1 S(k) dk = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\theta \cos^2 \theta - \sin \theta \cos^3 \theta) (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta \cos^2 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta$$

注6) 「立体を上手に切る」の項で述べたように, xz 平面上の曲線 $z = f(x)$ を z 軸の周りに回転した立体の式は $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$

ここで $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$ に対し $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ が成り立つことを利用して計算する.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta \cos^2 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right)' d\theta \\ &= \left[\theta \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} I_3 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \cos^3 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = I_3 - I_5 \end{aligned}$$

一般に $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ が成り立つので

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}, \quad I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

ゆえに

$$V = \frac{1}{3} I_3 - (I_3 - I_5) = I_5 - \frac{2}{3} I_3 = \frac{8}{15} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{45} \quad \dots (\text{答})$$

Comment

z 軸に垂直に切って $z = \cos \theta$ と置くタイプですが, 有名な公式 (ウォリスの公式) を使わないと計算が大変なことになります. できれば証明して使いましょう. $n = 0, 1, 2, \dots$ のとき

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} (\sin \theta)' d\theta = \left[\cos^{n+1} \theta \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n+1} \theta)' \sin \theta d\theta \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin \theta \cdot \sin \theta d\theta = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2} \end{aligned}$$

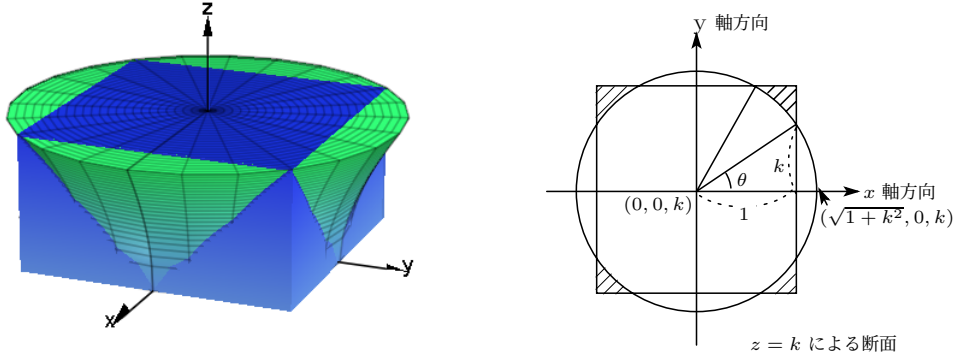
ゆえに $n = 0, 1, 2, \dots$ のとき

$$I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2} \iff I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad (\text{ウォリスの公式})$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$, $\int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ ですから 左のような場合にも応用できます. しかし「積分区間が $\theta = 0$ から $\frac{\pi}{4}$ 」などのときは基本的には あまり使えません. (工夫すれば不可能ではないが...)

演習 17

$x-z$ 平面内の曲線 $x^2 - z^2 = 1$ を z 軸の周りに回転したときできる曲面と平面 $z = 0, z = 1$ によって囲まれる立体を D_1 , 四角柱 $|x| \leq 1, |y| \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ を D_2 とする. D_2 のうち D_1 の外側にある領域の体積 V を求めよ.



平面 $z = k (0 \leq k \leq 1)$ による断面積を $S(k)$ とする. $z = k$ 上で, 図の様に θ をとると,

$$k = \tan \theta, dk = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \left. \frac{k}{\theta} \right|_{0 \rightarrow \frac{\pi}{4}}^{0 \rightarrow 1}$$

対称性より $x \geq 0, y \geq 0$ に含まれる断面積は, 平面 $z = k$ による断面積の $\frac{1}{4}$ になるから, 図より

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= 1 - \left\{ k + \frac{(\sqrt{1+k^2})^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \right\} = 1 - \tan \theta - \frac{1 + \tan^2 \theta}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \\ \therefore \frac{V}{4} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \left\{ 1 - \tan \theta - \frac{\pi(1 + \tan^2 \theta)}{4} \right\} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \theta(1 + \tan^2 \theta) \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

右辺の第 1 項, 第 2 項をそれぞれ I_1, I_2 とおくと

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \left\{ 1 - \tan \theta - \frac{\pi(1 + \tan^2 \theta)}{4} \right\} (\tan \theta)' d\theta \\ &= \left[\tan \theta - \frac{\tan^2 \theta}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\tan \theta + \frac{\tan^3 \theta}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \theta(1 + \tan^2 \theta) \cdot (\tan \theta)' d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \theta \left(\tan \theta + \frac{\tan^3 \theta}{3} \right)' d\theta \\ &= \left[\theta \left(\tan \theta + \frac{\tan^3 \theta}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \left(\tan \theta + \frac{\tan^3 \theta}{3} \right) d\theta \end{aligned}$$

ここで

$$\int \tan^3 \theta d\theta = \int \tan \theta \cdot \tan^2 \theta d\theta = \int \tan \theta \left(-1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta$$

であるから

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \right) - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{2}{3} \tan \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\tan \theta}{3} (\tan \theta)' d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \left[\log |\cos \theta| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{\tan^2 \theta}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{6} - \frac{\log 2}{3} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

①,② より

$$V = 4(I_1 + I_2) = \frac{4}{3}(1 - \log 2) \quad \dots (\text{答})$$

Comment

今までこの本で取り上げた類似の問題の中では計算は最難です. そして, これも「ショートケーキ分割」ではうまくいきません.

演習 18

xyz 空間内に 2 直線

$$l; x = 1, y = z = 0$$

$$m; x = 0, y + z = 1$$

があり, l 上の点 P から m に降ろした垂線の足を Q とする. P が l 上を動く時, 線分 PQ が描く曲面 C と xy, yz, zx 平面で囲まれる領域を E とする. このとき, E の体積を求めよ.

P, Q の座標はそれぞれ,

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ s - t \\ 1 - s \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{PQ} \perp m$ より

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2s - t - 1 = 0, \quad \therefore t = 2s - 1 \quad \dots ①$$

次に線分 PQ 上で x 座標が X の点を R とすると, R は直線 PQ を $X : (1 - X)$ に内分する点だから,

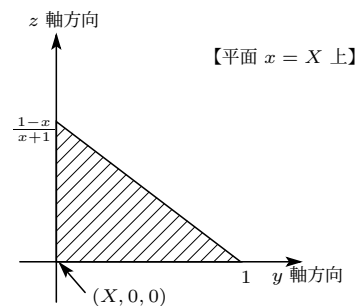
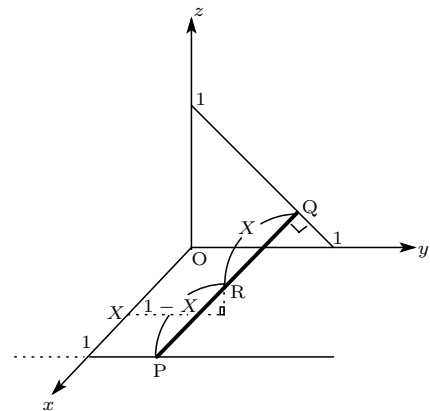
$$\overrightarrow{OR} = (1 - X)\overrightarrow{OQ} + X\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} X \\ X(t - s) + s \\ (X - 1)(s - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X(s - 1) + s \\ (X - 1)(s - 1) \end{pmatrix} \quad \dots ②$$

ここで ① を使った. ② より R の y, z 成分はそれぞれ,

$$\begin{cases} y = X(s - 1) + s \\ z = (X - 1)(s - 1) \end{cases} \quad \dots ③$$

s が全ての実数をとって変化するとき, (X, y, z) の描く軌跡が平面 $x = X$ による曲面 C の切り口となる. これから s を消去すると

$$z = \frac{1 - X}{X + 1} \cdot (1 - y)$$



これは、平面 $x = X$ 上では直線を表す。従って、 K の平面 $x = X$ による断面は図のようになる。よって $x = X$ による E の断面積を $S(X)$ とすると、

$$S(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-X}{X+1}$$

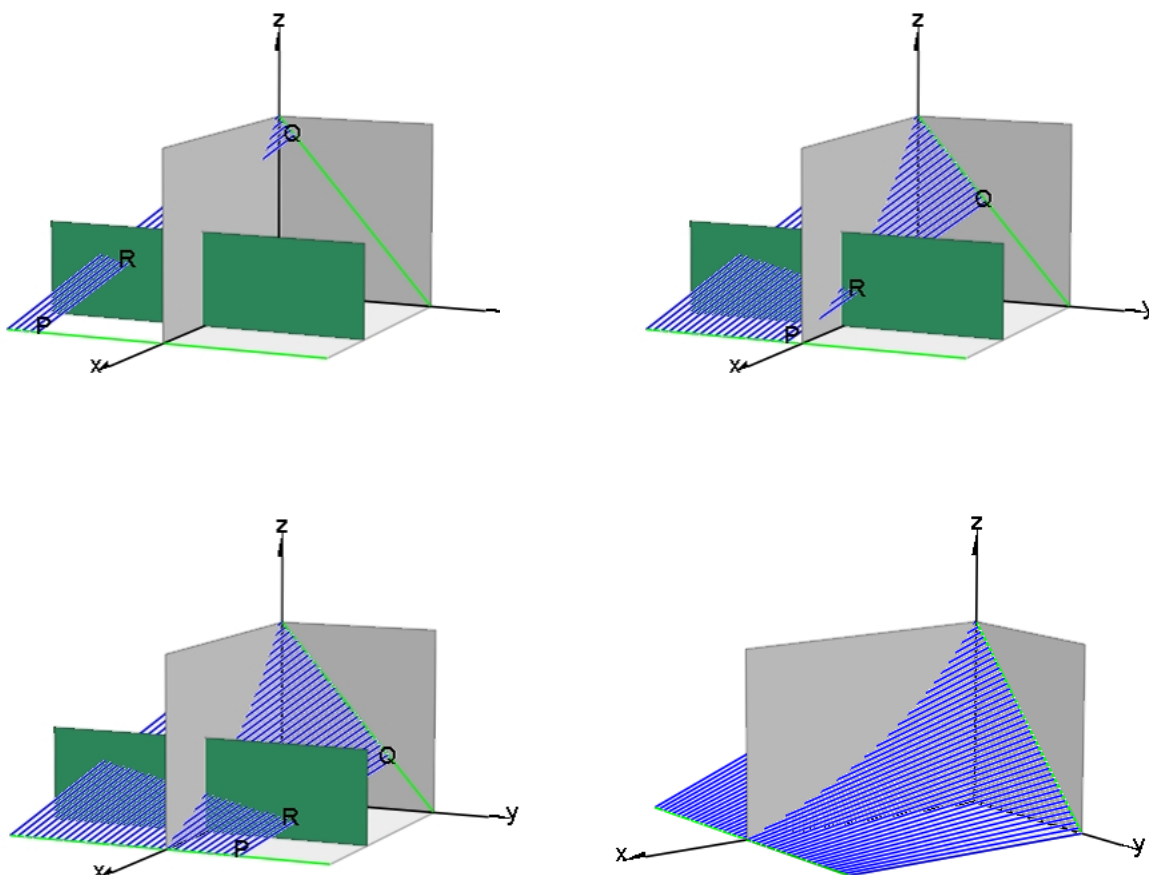
ゆえに E の体積 V は

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-x}{x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \left[2 \log(x+1) - x \right]_0^1 = \log 2 - \frac{1}{2} \quad \dots (\text{答})$$

Comment

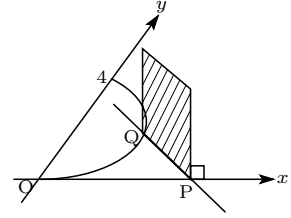
直線 PQ の通過領域の断面を求めるために $x = X$ と直線の式を連立して R が s でパラメーター表示されました。これが C の軌跡で、それさえ分かれば、断面積はすぐ求まります。体積の問題というよりは通過領域の問題です。

【参考】 PQ の通過していく様子の C.G. ($x = \frac{2}{3}$ による断面) ならびに見取り図

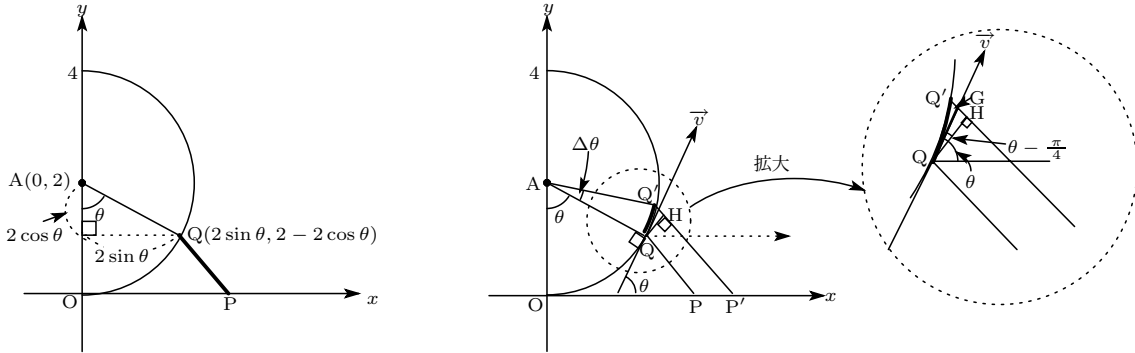


演習 19

円 C を $x^2 + (y-2)^2 = 4$, 点 P は x 軸上の点で, P を通り傾きが (-1) の直線を l , l と C が2点で交わるとき, その交点のうち x 成分の大きい方の点を Q とし, 線分 PQ を一辺とする正方形を図のように xy 平面に垂直に立てて作る. 点 P が x 軸上 (ただし $x \geq 0$) を原点から出発し, l が C と接するまで動くとき, この正方形が動いてできる立体の体積 V を求めよ.



「スライス集め」のタイプです. この問題は, Q の座標を θ で表し, $\Delta V = f(\theta)\Delta\theta$ の形に持っていった方が楽です.



円の中心を $A(0, 1)$, $\angle OAQ = \theta$ とおくと l が C と接するのは, $\theta = \frac{3}{4}\pi$ のときだから, θ の動く範囲は $0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$. このとき $\overrightarrow{AQ} = 2(\sin\theta, -\cos\theta)$ だから, Q の座標は $Q(2\sin\theta, 2 - 2\cos\theta)$ となる. ゆえに

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \times (Q \text{ の } y \text{ 成分}) = 2\sqrt{2}(1 - \cos\theta)$$

したがって正方形の面積を $S(\theta)$ とおくと

$$S(\theta) = \overline{PQ}^2 = 8(1 - \cos\theta)^2 \quad \dots ①$$

一方, θ が $\Delta\theta$ 増加したときに P, Q がそれぞれ P', Q' に移動したとし, Q から直線 $P'Q'$ に下ろした垂線の足を H , また Q における C の接線と直線 $P'Q'$ の交点を G とすると, $\vec{v}$ と x 軸のなす角も θ だから, $\theta \geq \frac{\pi}{4}$ のとき, $\angle HQG = \theta - \frac{\pi}{4}$. ゆえに

$$\overline{QH} = \overline{QG} \times \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{これは } \theta < \frac{\pi}{4} \text{ のときも正しい})$$

$\overline{QG}$ (弧 QQ' の長さ) $= 2\Delta\theta$ であり, 誤差は $\Delta\theta$ より高位の微小量なので

$$\overline{QH} = \overline{QG} \times \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\Delta\theta = \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)\Delta\theta \quad \dots ②$$

θ が $\Delta\theta$ 増加したときに正方形の通過領域の体積を ΔV とすると, 底面が正方形で高さが $\overline{PH}$ の四角柱と近似できるので

$$\Delta V = S(\theta) \times \overline{PH} = 8(1 - \cos\theta)^2 \cdot \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)\Delta\theta \quad (\text{誤差は } \Delta\theta \text{ より高位の微小量})$$

ゆえに求める体積は

$$V = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} 8\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)(1 - \cos\theta)^2 d\theta = 8\sqrt{2} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \{\cos\theta(1 - \cos\theta)^2 + \sin\theta(1 - \cos\theta)^2\} d\theta$$

(以下単純計算) ここで

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos \theta (1 - \cos \theta)^2 d\theta &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos \theta (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\cos \theta - 2\cos^2 \theta + \cos^3 \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left\{ \cos \theta - (1 + \cos 2\theta) + (1 - \sin^2 \theta)(\sin \theta)' \right\} d\theta \\
 &= \left[\sin \theta - \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + \left(\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} \\
 &= \frac{11}{12} \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \pi \\
 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta (1 - \cos \theta)^2 d\theta &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos \theta)' (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \left[\frac{(1 - \cos \theta)^3}{3} \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{5}{6} + \frac{7}{12} \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

したがって

$$V = 8\sqrt{2} \left(\frac{11}{12} \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \pi + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} \sqrt{2} \right) = \frac{32}{3} \sqrt{2} - 6\sqrt{2} \pi + 24$$

【参考】

この問題では C の速度ベクトル $\vec{v}$ の向きが変化するので $\Delta\theta$ と (小柱体の厚さ) Δd の比が一定ではありません。一般に「スライス集め」のとき, $C: (x(t), y(t))$ の速度ベクトルを $\vec{v}$, スライスの単位法線ベクトルを $\vec{n}$, t が Δt 増加したときの x, y の増加量をそれぞれ $\Delta x, \Delta y$, 小柱体の厚さを Δd とすると,

$$(\Delta x, \Delta y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \Delta t = \Delta t \vec{v}$$

$P(x(t), y(t)), P'(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$, P から P' を通るスライスに下ろした垂線の足を H , $\angle HPP' = \phi$ とすると, ϕ が鋭角のとき

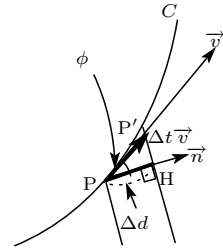
$$\Delta d = \overline{PH} = \overline{PP'} \cos \phi = \vec{n} \cdot \Delta t \vec{v} = (\vec{n} \cdot \vec{v}) \Delta t \quad \dots (*)$$

すなわち一般に「 Δt と Δd の比は $\vec{n} \cdot \vec{v}$ 」となります。この問題では

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad \vec{v} = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta} \right) = (2\cos \theta, 2\sin \theta)$$

よって

$$\Delta d = (\vec{n} \cdot \vec{v}) \Delta \theta = \sqrt{2}(\cos \theta + \sin \theta) \Delta \theta \quad (\text{前頁の②の式と一致})$$



【別解】 $P(t, 0)$ とおくと, $l: y = -x + t$. C の式に代入して整理すると,

$$\begin{aligned}
 x^2 + (-x + t - 2)^2 &= 4 \iff 2x^2 - 2(t-2)x + t^2 - 4t = 0 \iff x = \frac{t-2 \pm \sqrt{-t^2 + 4t + 4}}{2} \\
 \therefore \overline{PQ} &= \sqrt{2} \cdot \left(t - \frac{t-2 + \sqrt{-t^2 + 4t + 4}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (t+2 - \sqrt{-t^2 + 4t + 4})
 \end{aligned}$$

したがって

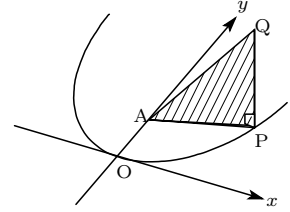
$$S(t) = \overline{PQ}^2 = \frac{1}{2} (t+2 - \sqrt{-t^2 + 4t + 4})^2$$

$\Delta V = S(t) \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta t$ だから

$$V = \int_0^{2+2\sqrt{2}} S(t) \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \int_0^{2+2\sqrt{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} (t+2 - \sqrt{-t^2 + 4t + 4})^2 dt \quad (\text{以下略})$$

演習 20

放物線 C を $y = x^2$, 点 A を $A(0, \frac{1}{4})$, 点 P は C 上の点で, 線分 AP を等辺とした直角二等辺三角形 $\triangle APQ$ を図のように xy 平面に垂直に立てて作る. 点 P が C 上を原点から点 $B(2, 4)$ まで動くとき, この三角形が動いてできる立体の体積 V を求めよ.

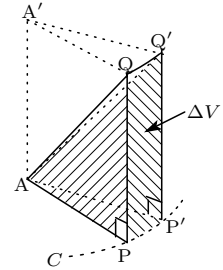


$P(t, t^2)$ とおき, t が Δt 増加したときの P, Q をそれぞれ P', Q' とし, A を $\overrightarrow{PQ}$ 平行移動した点を A' , また $\triangle APQ$ が $\triangle AP'Q'$ まで移動したときにできる小立体の体積を ΔV とおくと,

ΔV 四角すい $(A - PQQ'P')$ の体積 (誤差は Δt より高位の微小量)

ところが, 四角すい $(A - PQQ'P')$ は 三角柱 $(APP' - A'QQ')$ から, 三角すい $(A - A'QQ')$ を除いたものだから, $\triangle APP'$ の面積を ΔS とおくと,

$$\Delta V = (A - PQQ'P' \text{ の体積}) = \Delta S \times \overline{PQ} - \frac{1}{3} \Delta S \times \overline{PQ} = \frac{2}{3} \Delta S \times \overline{PQ} \dots \textcircled{1}$$

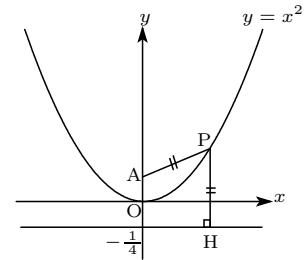


ここで C の準線 $y = -\frac{1}{4}$ に, P から下ろした垂線の足を H とすると, A は C の焦点だから

$$\overline{AP} = \overline{PH} = t^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) = t^2 + \frac{1}{4}$$

仮定より $\overline{PQ}$ もこの値と等しい. また $A(0, \frac{1}{4}), P(t, t^2)$ だから

$$\overrightarrow{AP} = \left(t, t^2 - \frac{1}{4}\right), \quad \overrightarrow{AP'} = \left(t + \Delta t, (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{4}\right)$$



ゆえに

$$\Delta S = \frac{1}{2} \left| t \left((t + \Delta t)^2 - \frac{1}{4} \right) - \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) (t + \Delta t) \right| = \left| \left(t^2 + \frac{1}{4} \right) \Delta t + t(\Delta t)^2 \right| \left(t^2 + \frac{1}{4} \right) \Delta t$$

誤差は Δt より高位の微小量となる. よって ① より

$$\Delta V = \frac{2}{3} \left(t^2 + \frac{1}{4} \right) \Delta t \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{3} \left(t^2 + \frac{1}{4} \right)^2 \Delta t$$

ゆえに求める体積は

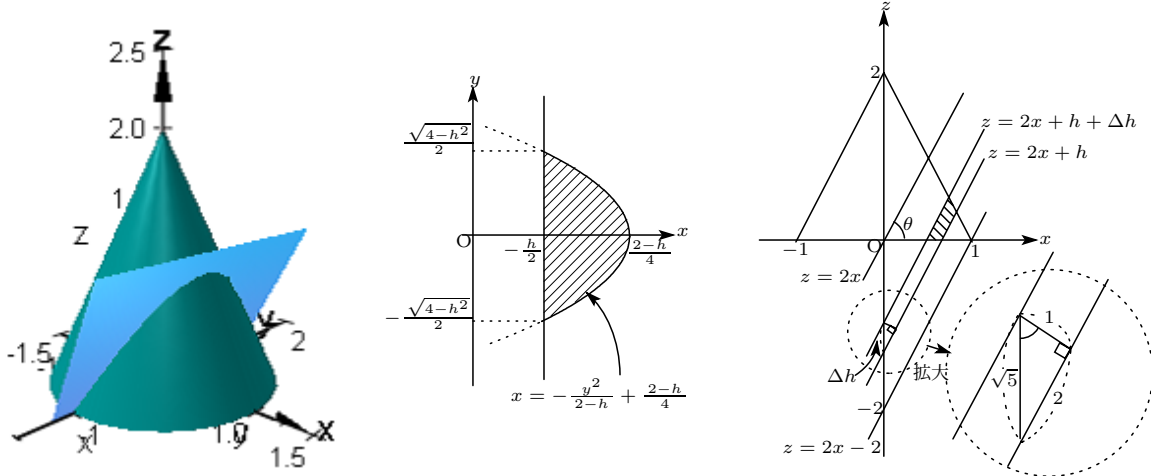
$$V = \int_0^2 \frac{2}{3} \left(t^2 + \frac{1}{4} \right)^2 dt = \frac{2}{3} \int_0^2 \left(t^4 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{16} \right) dt = \frac{943}{180}$$

Comment

もちろん「ショートケーキ分割」でも ΔV は求まりますが, 直線で囲まれた立体に関しては, 錐体, 柱体の公式を使って, 簡単に求めることができます.

演習 21

底面が $x^2 + y^2 \leq 1$, 頂点が $A(0, 2)$ の円錐の側面を K とする. K を原点を通り母線と平行な平面 H で切る. 平面 H の下側にあつて, 曲面 K と平面 H と xy 平面で囲まれた立体の体積を求めよ.



K は xz 平面上の直線: $z = 2 - 2x$ ($0 \leq z \leq 2$) を z 軸の周りに回転した図形だから, (前の例題の”コメント”で述べたように,) K の方程式は,

$$z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq z \leq 2)$$

また H を $z = 2x$ としても一般性を失わない. H と平行な平面 $\pi: z = 2x + h$ で切った断面積を求める. (ただし π は H の下側なので $h \leq 0$). π の式と H の式を連立して

$$\begin{aligned} 2x + h &= 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \iff 2x + h - 2 = -2\sqrt{x^2 + y^2} \\ &\iff (2x + h - 2)^2 = 4(x^2 + y^2), 2x + h - 2 \leq 0 \\ &\iff x = \frac{y^2}{h - 2} - \frac{h - 2}{4} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

これが K と π の交線の xy 平面への正射影の式となる. $z = 2x + h \geq 0$ だから $x \geq -\frac{h}{2}$. ① と連立して

$$\frac{y^2}{h - 2} - \frac{h - 2}{4} = -\frac{h}{2} \iff y = \pm \frac{\sqrt{4 - h^2}}{2}$$

ただし y が実数となる条件と $h \leq 0$ から $-2 \leq h \leq 0$ である. よって K の π による切り口の面積を $S(h)$, 切り口を xy 平面へ正射影した領域の面積を $S_{proj}(h)$ とすると, いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式から

$$S_{proj}(h) = \frac{1}{6} \times \left| \frac{1}{h - 2} \right| (\sqrt{4 - h^2})^3 = \frac{(2 + h)\sqrt{4 - h^2}}{6}$$

π と xy 平面とのなす角を θ とすると $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ だから

$$S_{proj}(h) = \cos \theta \times S(h) = \frac{1}{\sqrt{5}} S(h). \quad \therefore S(h) = \sqrt{5} S_{proj}(h) = \frac{\sqrt{5}}{6} (2 + h)\sqrt{4 - h^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

平面 $z = 2x + h, z = 2x + (h + \Delta h)$ の間の距離は $\frac{1}{\sqrt{5}} \Delta h$ だから, 2 平面にはさまれる K の体積を ΔV とすると

$$\Delta V = S(h) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \Delta h + o(\Delta h)$$

よって求める体積 V は

$$V = \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{5}} S(h) dh = \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6} (2+h) \sqrt{4-h^2} dh = \frac{1}{3} \int_{-2}^0 \sqrt{4-h^2} dh + \frac{1}{6} \int_{-2}^0 h \sqrt{4-h^2} dh$$

ここで $\int_{-2}^0 \sqrt{4-h^2} dh$ は半径 2 の $\frac{1}{4}$ 円の面積と等しいから,

$$\int_{-2}^0 \sqrt{4-h^2} dh = \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \pi$$

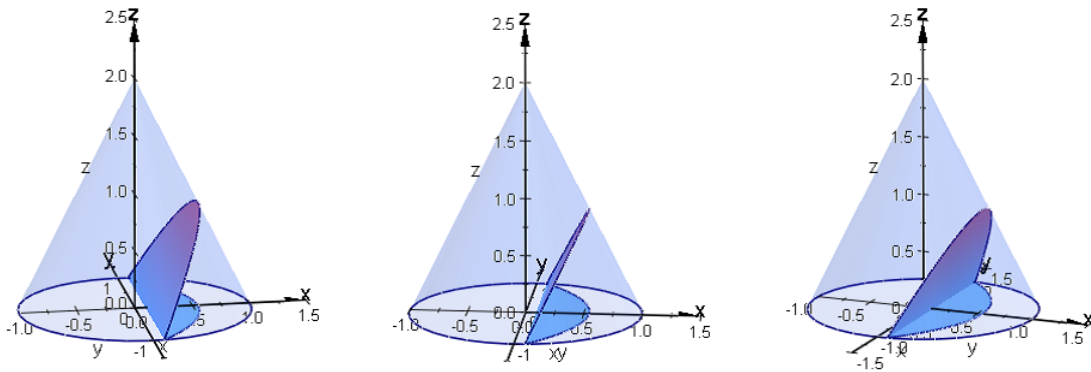
$(4-h^2)$ をまとめて考えて (置換積分して)

$$\int_{-2}^0 h \sqrt{4-h^2} dh = \frac{1}{(-2)} \int_{-2}^0 (4-h^2)' (4-h^2)^{\frac{1}{2}} dh = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(4-h^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^0 = -\frac{8}{3}$$

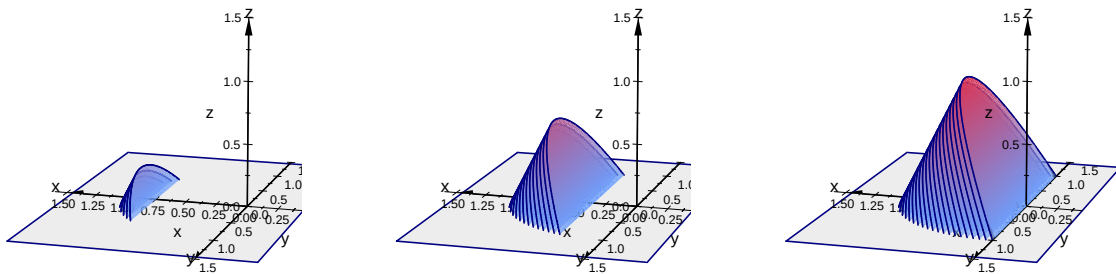
ゆえに

$$V = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}$$

【参考】円錐と π による切り口, およびその正射影の CG (π は一定で, 見る視点が変わる.)



【参考】小片が集まって K を作っていく様子



演習 22

xy 平面上の曲線 $C: x^3 + y^3 - 2\sqrt{2}xy = 0$ が囲む領域を $y = x$ の周りに回転した立体の体積を求めよ。

これは x, y ともに 3 次の陰関数で, $y = f(x)$ の形に直すのは大変なので「傘型分割」ではうまく行きません. C を原点 O の周りに (-45°) 回転した図形を求めます. C 上の点を $P(x, y)$, P を O の周りに (-45°) 回転した点を $Q(X, Y)$ とすると, 逆に Q を O の周りに 45° 回転した点が P になるので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

P は C 上にあるので

$$x^3 + y^3 - 2\sqrt{2}xy = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より

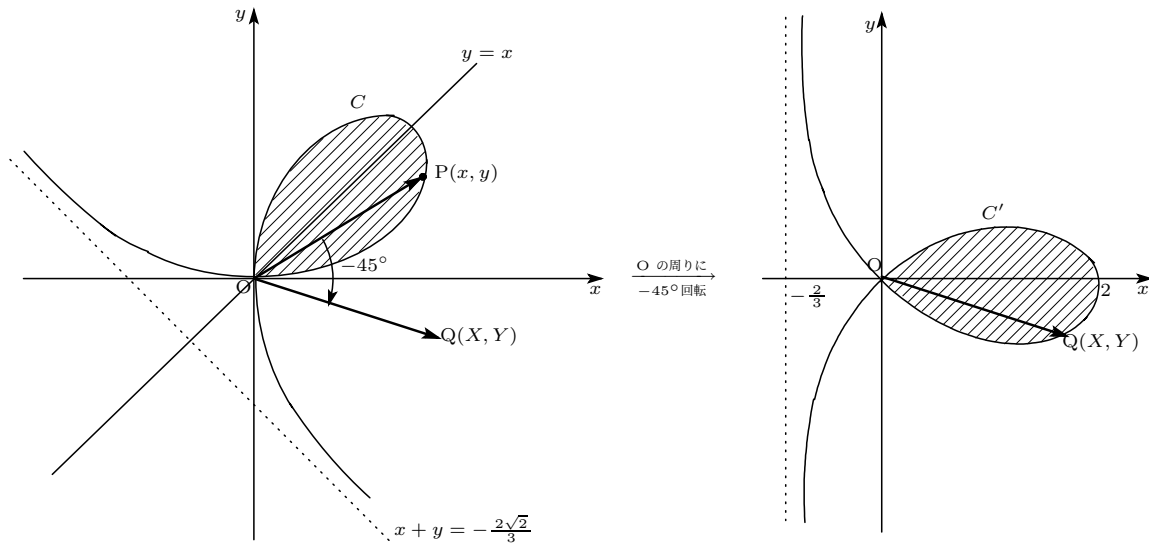
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(X-Y)^3 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(X+Y)^3 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) = 0 \iff Y^2 = \frac{X^2(2-X)}{3X+2}$$

これが点 Q の軌跡, すなわち C を O の周りに (-45°) 回転した曲線 C' の式となる. $Y = 0$ とおくと $X = 0, 2$. また C' は x 軸に関し対称となるので求める体積は

$$V = \pi \int_0^2 Y^2 dX = \pi \int_0^2 \frac{X^2(2-X)}{3X+2} dX \quad \dots \textcircled{3}$$

$$3X+2=u \text{ とおくと } 3dX = du, \quad \frac{X}{u} \begin{matrix} 0 & \rightarrow & 2 \\ 2 & \rightarrow & 8 \end{matrix}.$$

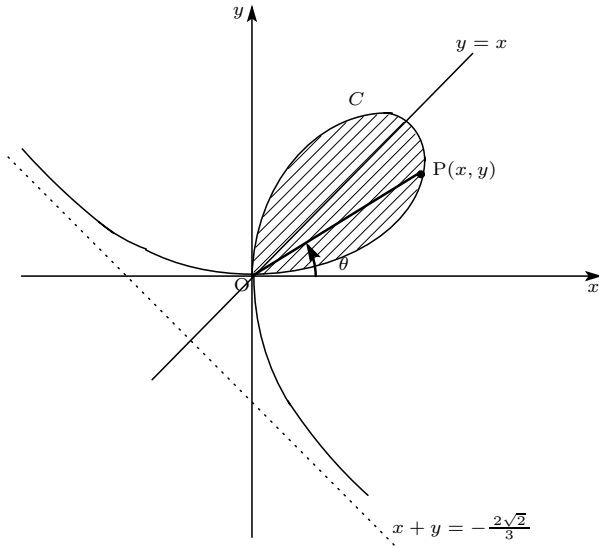
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^8 \frac{\left(\frac{u-2}{3}\right)^2 \frac{8-u}{3}}{u} \cdot \frac{du}{3} = \frac{\pi}{81} \int_2^8 \frac{-u^3 + 12u^2 - 36u + 32}{u} du = \frac{\pi}{81} \int_2^8 \left\{ -(u-6)^2 + \frac{32}{u} \right\} du \\ &= \frac{\pi}{81} \left[-\frac{(u-6)^3}{3} + 32 \log u \right]_2^8 = \left(-\frac{8}{27} + \frac{64}{81} \log 2 \right) \pi \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

**Comment**

C は「デカルトの正葉線」と呼ばれます. $Y = \pm \frac{X\sqrt{2-X}}{\sqrt{3X+2}}$ を微分することにより曲線 C' の概形は上図のようになります. また C' は $x = -\frac{2}{3}$ を漸近線に持ちます. これから C の概形も分かります.

演習 23

デカルトの正葉線 $C: x^3 + y^3 - 2\sqrt{2}xy = 0$ が囲む領域の面積を求めよ.



先の問題から $S = 2 \int_0^2 \frac{X\sqrt{2-X}}{\sqrt{3X+2}} dX$ ですが, 計算がやや面倒です. 実は極表示を使った方が速いです.

C 上の**原点以外**の点 P をとり $\overrightarrow{OP} = r$, $\overrightarrow{OP}$ の偏角を θ とすると

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

代入して

$$r^3(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - 2\sqrt{2}r^2(\sin \theta \cos \theta) = 0$$

$r \neq 0$ だから

$$r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - 2\sqrt{2}(\sin \theta \cos \theta) = 0 \iff r = \frac{2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta} \quad \dots \textcircled{1}$$

$y = x$ に関して対称なので, 求める面積は

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8 \tan^2 \theta}{(1 + \tan^3 \theta)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

よって $\tan \theta = t$ とおくと $\frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = dt, \frac{\theta}{t} \bigg|_0 \rightarrow \frac{\pi/4}{1}$.

$$S = \int_0^1 \frac{8t^2}{(1+t^3)^2} dt \quad \dots \textcircled{2}$$

さらに $1+t^2 = u$ とおくと $3t^2 dt = du, \frac{t}{u} \bigg|_0 \rightarrow \frac{1}{2}$. よって

$$S = \frac{8}{3} \int_1^2 \frac{1}{u^2} du = \frac{8}{3} \left[-\frac{1}{u} \right]_1^2 = \frac{4}{3} \quad \dots (\text{答})$$

Comment

極表示の方が速かったのは この曲線が原点を通るので $r = 0$ を解にもつからです. 一般に元の曲線が x または y の 3 次式の場合, 極表示しても r の 3 次方程式になります. しかし, $r = 0$ を重解に持つので $r = 0$ 以外の解が 1 次式になってくれました. なかなか気づくことではないので, 試験では, ヒントがついていると思います.

また ② の式が現れたのは偶然ではありません. $y = tx$ と C の式を連立すると,

$$x^3 + t^3 x^3 - 2\sqrt{2}x \cdot tx = 0 \iff x^2 \left\{ (1+t^3)x - 2\sqrt{2}t \right\} = 0$$

よって C と $y = tx$ の原点以外の交点を P とすると

$$P \left(\frac{2\sqrt{2}t}{1+t^3}, \frac{2\sqrt{2}t^2}{1+t^3} \right) \\ \therefore r = \overline{OP} = \sqrt{1+t^2} P_x = \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{2\sqrt{2}t}{1+t^3}$$

一方 $S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\theta$ において, $\tan \theta = t$ とおくと $dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = (1+t^2) d\theta$

$$\therefore S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^1 r^2 \left(\frac{dt}{1+t^2} \right) = \int_0^1 \left(\sqrt{1+t^2} \cdot \frac{2\sqrt{2}t}{1+t^3} \right)^2 \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

これは前のページの ② と同じ式です.

— 【陰関数の面積, 体積】 —

陰関数^{注7)} の面積や体積は

- $y = f(x)$ や $x = g(y)$ の形に直す.
- パラメータ表示する.
- 極表示する.
- 回転軸が x 軸や y 軸になるように回転してみる.

などいろいろな方法がありますが, 「パラメータ表示の利用」以外は「**適当な直線**($x = k, y = k, x + y = k, y = tx$ など) で切った切り口の長さを何らかのパラメータ (多くは k) で表わす.」ということです. 例えば「 $y = f(x)$ と直す」ということは「 $x = k$ のときの y の値を x の式で表す」ということすし, (-45°) 回転する場合 (前の問題) も $\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = X$ で切ったときの $\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) = Y$ の長さを X の式で表しました. 極表示も $y = \tan \theta x$ で切ったときの $\overline{OP}$ を θ の式で表すということです. どのような切り方が良いのかは簡単には言えないので, 一般に陰関数の問題は難しく実力と運の問題といえます. ^{注8)}

注7) $y = f(x)$ や $x = g(y)$ の形でなく $x^2 + y^2 = 1$ のように $F(x, y) = 0$ の形をした関数のこと. これに対し $y = f(x)$ や $x = f(y)$ の形をした関数は「陽関数」と呼ばれる.

注8) $x = f(t), y = g(t)$ とパラメータ表示することも $x = f(t)$ による切り口の長さを t の式で表すということで, 広く言えば上の場合に含むことができます.

あとがき

この本は 問題ばかり並んでいる参考書や問題集に対するアンチテーゼ (反論) として書きました。その点では先に書いた「目で見る 1 次変換」と同じ意図です。ただ今回は入試問題や自作の問題も多く入れて、演習書としても役立つようにしました。これは微積分が入試における (大学に行ってから) 最重要項目だからです。また 微積分は 1 次変換のように「目で見て分かる」という**だけ**には行かないので証明もたくさんつけました。そのため初心者の人にはちょっと難しい本となってしまいました。また初心者の方に限らず、とても厚く、内容の濃い本になってしまったので「自分の必要な所、自分の興味の持った所」を**読んで**ください。

読んでと強調したのは、殆どの参考書 (問題集) は問題が並んでいるだけで、読めないからです。それはあたかも「試験に出る数学 500 題」のような本です。「試験に出る英単語」を私は高校三年生の夏に全て覚えました。そのおかげで 英語の成績は急降下しました。また「チャート式数学 III」を高校三年生の春に読破しましたが、このときも数学の成績は急降下していました。理由を考えてみると、結局「試験に出る英単語」を中心にやっていたために 何より大切な「英語の感覚」というのを忘れていたのだと思います。「試験に出る英単語」を覚えても、もちろん知らない単語は山のように出てきます。このとき英語の単語を「意味を類推しながら読む」ことができなくなっていました。英語のリズムを忘れてしまっていました。数学の場合も同じです。「チャート式」で全てのパターンを身に着けたはずが、駿台模試などでは^{注9)} 知らないパターンを出題され、「自分で考える癖」を忘れていたのでとんでもない目にあいました。(旺文社の模試は成績が上がりましたが…)

しかしこのときは私はまだ「参考書が悪い」とは思っていませんでした。「重要な単語 (パターン) ばかり入っている本が悪いはずがない」と思っていました。その呪縛が解けたのは、30 歳を過ぎて 英語を自分で再学習し始めたときでした。学生時代と同じように単語帳を丁寧に作って、TOEIC のためには問題集までやっていました。しかし余り伸びませんでした。そのとき私は開き直って「試験を受ける必要はないのだから、自分が気持ちよくなるような勉強だけしよう」と思いました。人の評価など「いまさら」です。そしてラジオ講座を中心に「無理をしないで何回も**聞く**」という勉強法に変えました。その後は英字新聞を取り「無理をしないで興味のある記事の**意味をつかむ**(単語を拾うのではない)」という勉強法に変えました。CS 放送で英語のドラマなども見るようにしました。自然の興味の「流れ」と「聞くこと」を最重要視しました。そのせいもあって、TOEIC の試験などは試験準備を全くやらなかったにもかかわらず 200 点ぐらいアップしました。そのとき「英語の勉強の仕方」の本を何冊か読んで、私と同じように「単語集は役に立たない」といっている人が何人もいることに気づきました。^{注10)} 人間はコンピューターではないので、コンピューターのように覚えられません。人間は「イメージ」で覚えます。また興味のあることはすぐ覚えます。図や耳から自然に覚えます。そうして覚えたものでないと本当には使えないと思います。

数学に関しても同様の経験をしています。高校生のときはぜんぜん手も足も出なかった問題が、大学卒業後にはすらすら解けるようになっていました。しかし大学では「数学を何百時間も勉強したので当たり前」と思っていました。しかし考えてみると、大学では大学入試のパターン問題などはぜんぜんやらなかったのになぜ解けるようになったのでしょうか？やはり英語の勉強と同じで、「試験のことを忘れて興

注9) 今なら「東大オープン」、「東工大オープン」といったところでしょうか？

注10) 「TOEIC 最強の学習法」池田和弘著、「英語できますか？－究極の学習法－」井上一馬著、「ピーター流外国語習得法」ピーター・フランクフル著 など

味のある問題を読む(解く)」のが良かったのでしょう。難問を解く力をつけるには「興味の有る本を読む, 興味の湧いた問題を解く」のが一番だと思います。とすると, 当然数学の超得意な人は「大学の数学の本を読むのが一番」だと思います。しかしそれは誰でもできるものではないので, もう少し読みやすくした「読む本」を書いてみたかったのです。感想を知らせていただけると幸いです。

またこの本は「試験に出る英単語」や「チャート式数学」をやって成績が上がった人向けではありません。先に英語の勉強法の話をしました, 実は「試験に出る英単語」や「既成の単語帳」で力のついた人もいます。そういう人は記憶力が良くデジタル的にバラバラのことを覚えられる人なので, そういう勉強法でよいと思います。ただ私のように余り記憶力も良くなく, アナログ的に「”流れ”」の中でないと何も覚えられない」という人にはこういう本も良いのではないのでしょうか? 以下, 私のお勧めのアナログ本を挙げます。

— 参考書 —

- 「解析概論」高木貞治著 — もし読めるならば, あなたは数学科に進むべき。時代を超えた名著。
- 「ゼロから学ぶ微分積分」小島寛之 — 余り厳密性にとらわれず, 本質的な意味を説明している良い本 (こんな風に自由に書ければ良いですね)
- 「好きになる数学入門 6」宇沢弘文著 — 面白い体積や面積の問題が「山」のように有る本
- 「解法の探求 II」東京出版 — 受験参考書ですが「読める」本。とても実戦的。