# Taylor 展開の係数を「目で」発見する試み
(with Geogebra & MuPAD)

ATCM in Kuala Lumpur, Dec 18th / 2010
Ogose shigeki

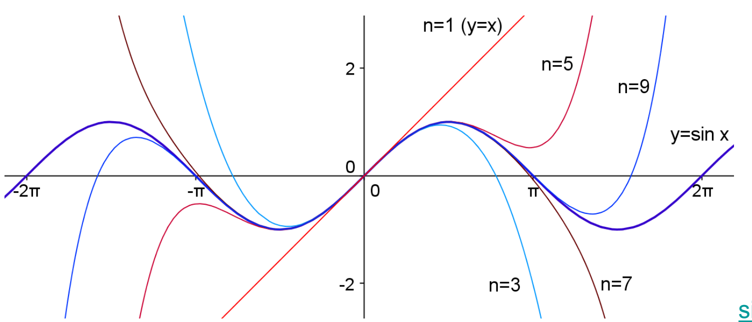
http://mixedmoss.com/atcm/2010/

# 1. Taylor展開の「静的な」表現

Ex1. $\sin x$ の Taylor 展開 ( $x=0$の周り)

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots (-\infty < x < \infty)}$$

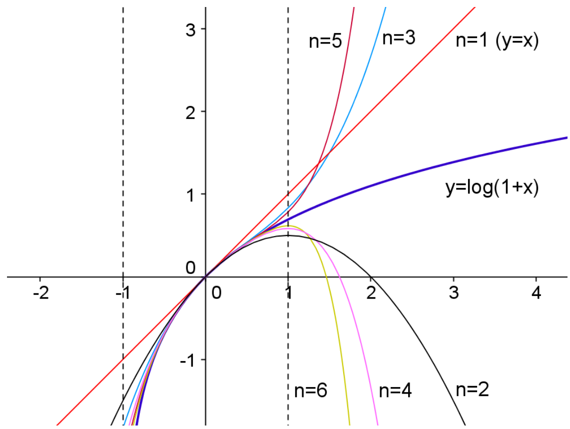
$$\left( \begin{array}{l} f_n(x) \text{ は, } n \text{ 次多項式までの展開. 例えば,} \\ f_1(x) = x,\ f_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3!},\ f_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!},\ \cdots \end{array} \right)$$




sinx.ggb

## Ex2. log(1 + $x$)のTaylor展開　( $x = 0$ の周り)

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots \ (-1 < x < 1)}$$



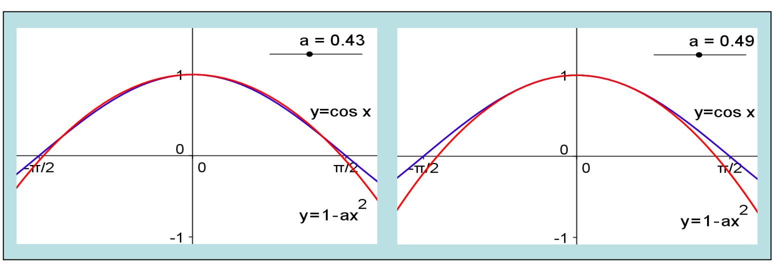

log(1+x).ggb

# 2. Taylor展開の係数を「目で」見つける

## 例1. $\cos x$ の 2次のTaylor 展開 ($x = 0$の周り)

$y = f(x) = \cos x$ の (0,1) に置ける接線は「$y = 1$」よって，$\boxed{\cos x \approx 1 \text{ (1 次近似)}}$

2次の近似を見つけるには，「$R_2(x) = f(x) - (1 \text{ 次近似式}) = \cos x - 1$」と $ax^2$を比較.




「$x = 0$の近く」では $a = 0.49$ の方が，より良い近似となっている.

よって，「$x \approx 0$ のとき $\cos x - 1 \approx 0.49x^2 \approx \dfrac{1}{2}x^2$」と目で読める.

即ち，$\boxed{\cos x \approx 1 + \dfrac{1}{2}x^2 \text{ (2次近似)}}$

taylor.mn

**[証明]**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=\frac{1}{2}$$

故に (直感的ではあるが...)

$x\approx 0$ のとき,

$$\frac{1-\cos x}{x^2}\approx\frac{1}{2}\iff 1-\cos x\approx\frac{1}{2}x^2\iff\cos x\approx 1-\frac{1}{2}x^2$$

即ち,

$$\boxed{\cos x\approx 1-\frac{1}{2}x^2\quad(x\approx 0)}\ \text{(2次のTaylor 展開)}$$

## 例2. $f(x)=e^x$の3次のTaylor展開 ($x=0$の周り)

taylor.mn

I. $y=e^x$ の接線は $y=1+x$ なので, $x\approx 0$ のとき $\boxed{e^x\approx 1+x\quad(\text{1次近似})}$

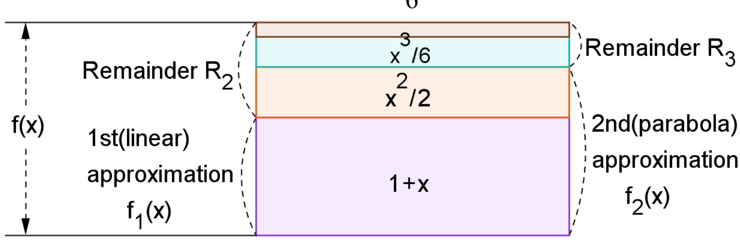
II. 2次近似式は, 「$R_2(x)=f(x)-(\text{1次近似})=e^x-(1+x)$」と$ax^2$を比較.

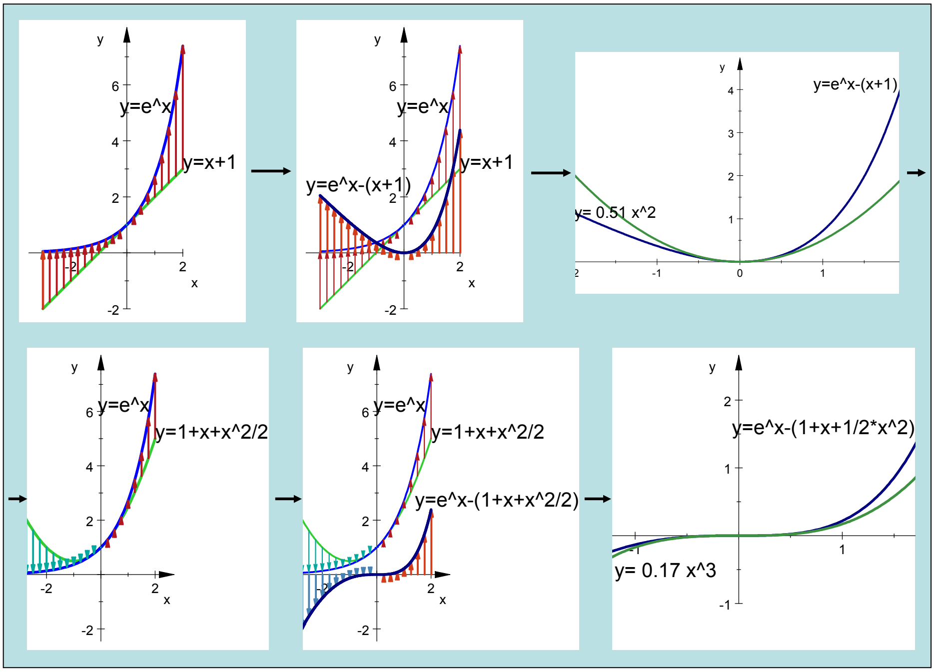
$x=0$の近くで, $y=\frac{1}{2}x^2$ が $R_2(x)$ に最も近く見えるので, $x\approx 0$ のとき

$$\boxed{e^x\approx 1+x+\frac{1}{2}x^2\ \ (\text{2次近似式})}$$

III. 3次近似式は, 「$R_3(x)=f(x)-(\text{2次近似})=e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$」と

$ax^3$ を比較する. $x=0$の近くで, $y=\frac{1}{6}x^3$ が $R_3(x)$ に最も近く見える.






# 3. Taylor 展開の証明

## 3-1. Caushy の平均値の定理

$f(x)$ と $g(x)$ が区間 $a<x<b$ で微分可能で, $a \leq x \leq b$ で連続とする.
このとき，次の様な $\xi$ が存在する.

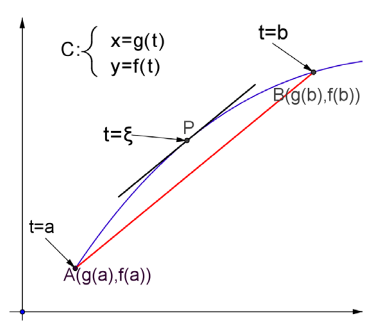
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a \lesssim \xi \lesssim b)$$

* 但し, $(f'(x))^2+(g'(x))^2 \neq 0$ かつ $g(a) \neq g(b)$

幾何学的説明

C: $x=g(t),\ y=f(t)\ (a \leq t \leq b)$

上のような曲線Cを考え,その上に
2点 $A(g(a), f(a)),\ B(g(b), f(b))$ をとる.
定理の式の左辺は,直線ABの傾きと等しく,右辺は,
C上の点 P(g($\xi$), $f(\xi)$)における接線の傾きと等しい.
即ち, "曲線C上で点AとBの間に，接線の傾きが
直線ABの傾きと等しくなるような点Pが存在する".



# 3-2. Taylor展開の証明 (n=2, 3 のとき)

## n=2のとき

$x=a$ を含む区間で $f(x)$が 2 回微分可能のとき ,この区間内の任意の $x$ について

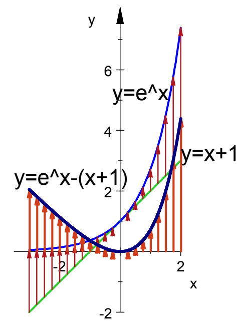
$$R(x)=f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)\},\ G(x)=(x-a)^2$$

とすると, $R(a)=G(a)=0$. よって Caushyの定理より

$$\frac{R(x)-R(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)\}}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{f'(x_1)-f'(a)}{2(x_1-a)}\quad (a\leqq x_1\leqq x)$$

$$=\frac{1}{2}f''(\xi)\quad (a\leqq \xi\leqq x_1)$$




$$\therefore\ \boxed{f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2\ (a\leqq \xi\leqq x)}$$

## n=3のとき

$x=a$ を含む区間で $f(x)$が 3 回微分可能のとき ,この区間内の任意の $x$ について

$$R(x)=f(x)-\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\right\},\ G(x)=(x-a)^3$$

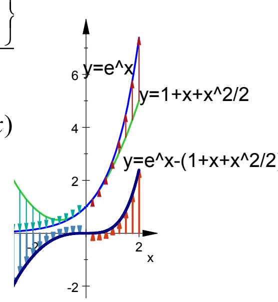
とすると, $R(a)=G(a)=0$. よってCaushyの定理の繰り返しにより

$$\frac{R(x)-R(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{f(x)-\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\right\}}{(x-a)^3}$$

$$=\frac{f'(x_1)-\{f'(a)+f''(a)(x_1-a)\}}{3(x_1-a)^2}\quad (a\leqq x_1\leqq x)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{f''(x_2)-f''(a)}{x_2-a}\quad (a\leqq x_2\leqq x_1)$$

$$=\frac{1}{6}f'''(\xi)\quad (a\leqq \xi\leqq x_2)$$




$$\therefore\ \boxed{f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-a)^3\ (a\leqq \xi\leqq x)}$$

# Taylor 展開

$x=a$ を含むある区間で $f(x)$ が $n$ 回微分可能の時, 区間内の任意の $x$ に対し

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n$$

$n$次剰余: $R_n=\dfrac{f^n(\xi)}{n!}(x-a)^n, \qquad a\leqq\xi\leqq x$

Examples

$$\begin{cases} e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n \\ \sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-+\cdots+(-1)^{2n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_n \\ \cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-+\cdots+(-1)^{2(n-1)}\dfrac{x^{2(n-1)}}{(2n-2)!}+R_n \\ \log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{n-1}}{n-1}+R_n \end{cases}$$

ご視聴ありがとうございました.
Geogebraなどのファイルは,
http://mixedmoss.com/atcm/2010/index.html
に置いておきます.
これをメモる必要もありません.
YouTube　のコメント欄に書いてあります.

またのお越しをお待ちしています.