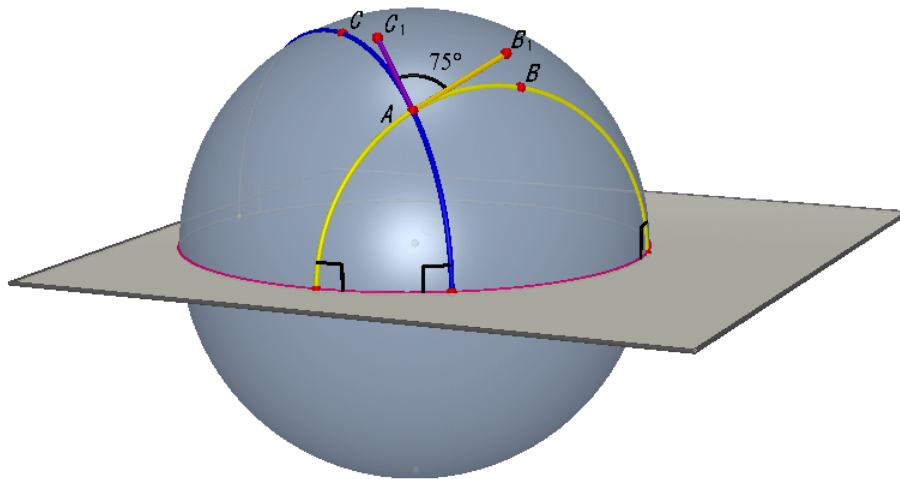


## 5. 双曲的角度と双曲的距離

### 5-1. 双曲的角度

ポアンカレ円盤上では、双曲的角度はユークリッド的角度と等しく、立体射影によって角度は保存されるので、半球面モデルでも、**角度はユークリッド的角度と等しいです**。すなわち、下図で直線  $AB_1$ ,  $AC_1$  がそれぞれ半円  $AB, AC$  の  $A$  に於ける(ユークリッド的)接線になっている時、双曲的直線  $AB$  と  $AC$  のなす角は、ユークリッド的角度  $\angle B_1AC_1$  と等しい。



#### Cabri による検証

点  $A, B, C$  を動かしてみてください。

[angle.html](#)

## 5-2. 双曲的距離

単位球 $\Omega$ の南極を $S$ ,  $S$ を中心とし単位円(ポアンカレ円盤) $K$ を含む球を $\Lambda$ ,  $S$ を極とした立体射影を $f$ ,  $K$ の内部の点を $P$ ,  $f$ による $P$ の像を $Q$ とすると, 「 $SQ \times SP = 2$ 」なので,  $f$ は $\Lambda$ に関する鏡像変換と一致します. また $P(x, y, 0)$ とすると,  $Q$ の成分は次のようになります. (2-2)

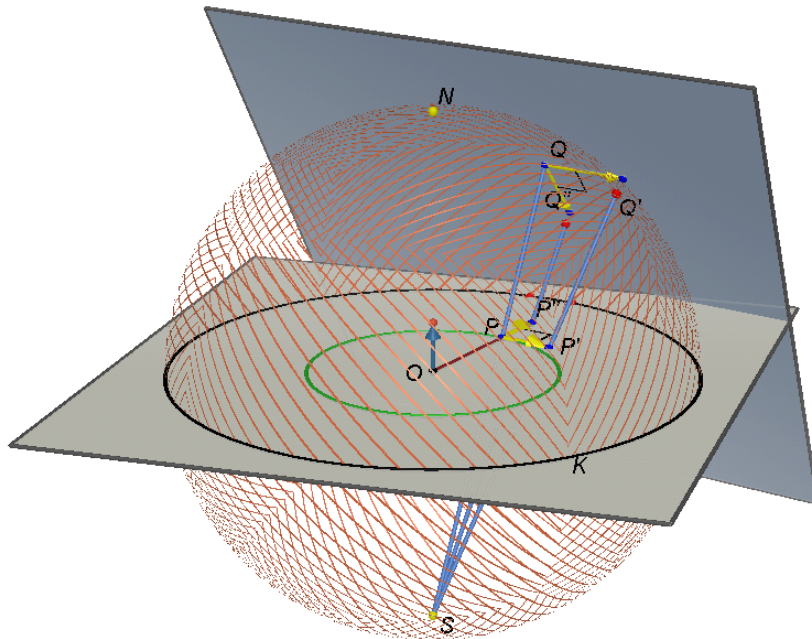
$$Q\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2+1}\right) \dots \textcircled{1}$$

[1]  $P$ が円盤内で微小距離 $dp$ 動いた時に $Q$ の動く微小距離 $dq$ を求めます. (ただし $dp, dq$ は共にユークリッド的距離とします.)

「 $P$ が動径 $OP$ と垂直な方向に動く時( $P$ が図の $P'$ へ動く時)」を考えると, 「 $dp \doteq |PP'|$ ,  $dq \doteq |QQ'|$ 」です.  $P$ が「少しだけ」動く時は,  $P$ は $O$ を中心とした円周上を動き「 $PS = P'S$ 」と考えてよいので,  $P$ も $P'$ も $S$ が中心で, 相似比の等しい相似変換で $Q$ や $Q'$ に移されます. よって

$$dp : dq = SP : SQ, \quad \therefore dq = \frac{SQ}{SP} dp = \frac{SQ \times SP}{SP \times SP} dp = \frac{2}{SP^2} dp = \frac{2}{1+x^2+y^2} dp \dots \textcircled{2}$$

ここで, 「鏡像変換の等方性」(1-3-6)より, ②の関係は $P$ がどの方向へ動く時も成り立ちます.



[2] 次に, 双曲的距離を考えます. ポアンカレ円盤上で「 $dp$ 」に対する双曲的距離を「 $ds$ 」と書くと,

$$ds = \frac{2}{1-(x^2+y^2)} dp \dots \textcircled{3}$$

よって ②, ③より,

$$ds = \frac{2}{1-(x^2+y^2)} dp = \frac{2}{1-x^2-y^2} \cdot \frac{1+x^2+y^2}{2} dq = \frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2} dq = \frac{dq}{Z}$$

ただし, ③より,  $Z$ は点 $Q$ の $z$ 成分です. ゆえに, 半球面上での双曲的微小距離「 $ds$ 」は,

$$ds = \frac{dq}{Z} \quad (\text{但し } dq \text{ はユークリッド的微小距離, } Z \text{ は } Q \text{ の } z \text{ 成分}) \dots (*)$$

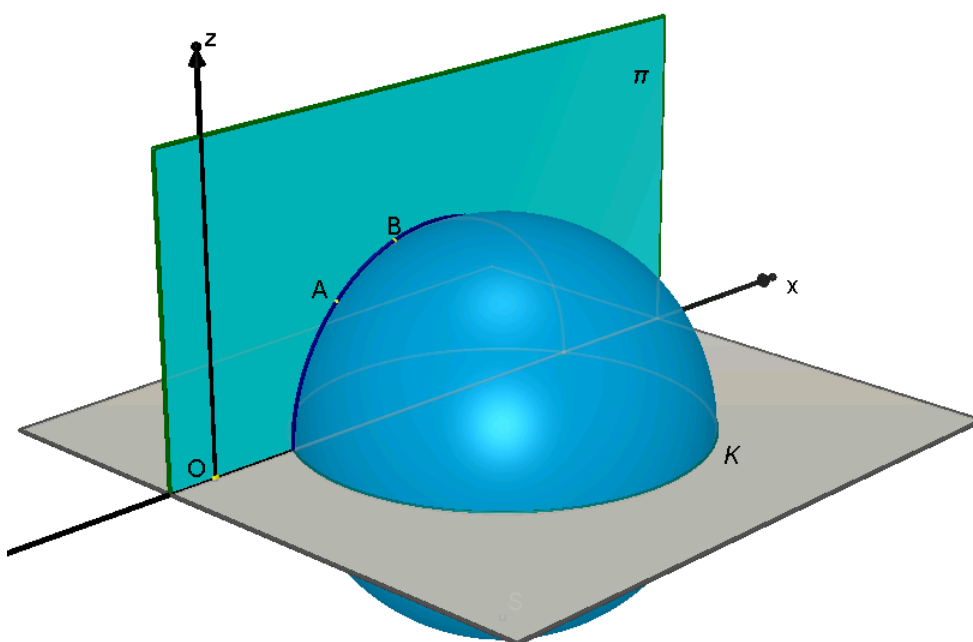
なお、以上のより詳しい計算は、[ここ](#)をご覧ください。(Ctrl+Click)

### 5-2-1. 「半球面モデル」と「ポアンカレ上半平面」の双曲的距離

$$ds = \frac{dq}{Z} \quad (\text{但し } dq \text{ はユークリッド的微小距離, } Z \text{ は } Q \text{ の } z \text{ 成分}) \quad \dots(*)$$

上の距離の公式は、ポアンカレ上半平面に於ける双曲的距離の定義「 $ds = \frac{|dz|}{y}$ 」と全く一致します。

よって、半球面上の2点A,Bが与えられた時、A,Bを含むxy平面に垂直な平面 $\pi$ を考え、それをポアンカレ上半平面とみなせば、2点間の双曲的距離は求まります。



#### Cabri による検証

点 A,B,K を動かしてみてください。

[distance.html](#)