

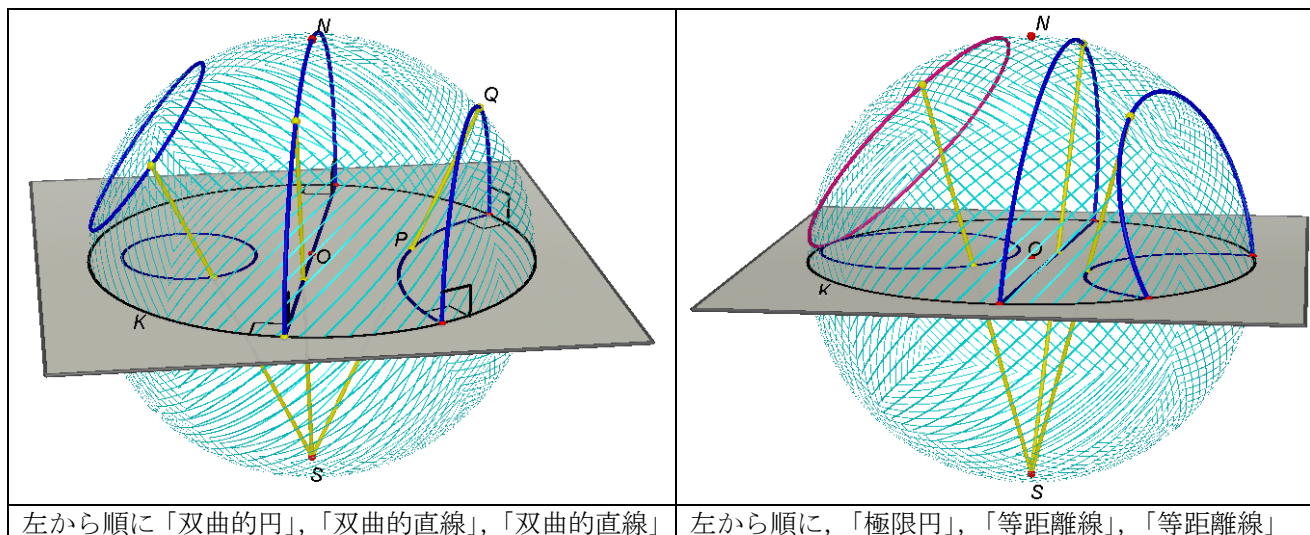
3. 球面モデルに於ける基本図形

xy 平面上の単位円を K , xyz 空間内の単位球面を Ω , その北極を N , 南極を S とし, xy 平面上の点 P に対し, 直線 SP と Ω の交点 Q を対応させる変換 f は, 「立体射影」(第2節) となります. f は, K の内部 (ポアンカレ円盤) を上半球面 (Ω の $z > 0$ の部分) に移します. また f は単位円 K を動かしません.

「上半球面モデル」は, ポアンカレ円盤(単位円 K の内部)を, 立体射影したモデルです. その基本図形 (双曲的直線, 円など) は, ポアンカレ円盤上の対応する基本図形を, 立体射影で移した図形です.

3-1. 双曲的直線と双曲的円

立体射影 f は「対応する2曲線間の角度は変えず (等角性)」また「円→円対応」をします. ポアンカレ円盤上では, 双曲的直線は「 K と直交している一般化された円 C 」なので, $f(K)$ と $f(C)$ も直交します. ところが「 $f(K) = K$ 」だから, **ポアンカレ円盤上の双曲的直線は, xy 平面と直交する半円に移ります.** また, **ポアンカレ円盤上の双曲的円は, 上半球面内の円に移ります.** これらが, 上半球面の双曲的直線と双曲的円になります. (左下図)



左から順に「双曲的円」, 「双曲的直線」, 「双曲的直線」

左から順に, 「極限円」, 「等距離線」, 「等距離線」

3-2. 極限円と等距離線

ポアンカレ円盤上では, 極限円は「 K と接している円」なので, その立体射影は「 K と接している上半球面上の円」となります. また, 等距離線は「 K と2点で交わるが, 直交していない円, または線分」なので, その立体射影は「 K と2点で交わるが, 直交していない上半球面上の円」となります. これらが, 上半球面の極限円と等距離線になります. (右上図)

3-3. Cabri3D による検証

3-3-1. 双曲的直線と双曲的円

A,B,C,D,E,P を動かしてみてください. A,B,D は円上の点, C は円の中心です. line&circle.html

3-3-2. 極限円と等距離線

P と K 内の黄色い点を動かしてみてください. 黄色い点は円や線分の図形を定めます. P はその図形上の動点です. hori_circle&equidistant_line.html