

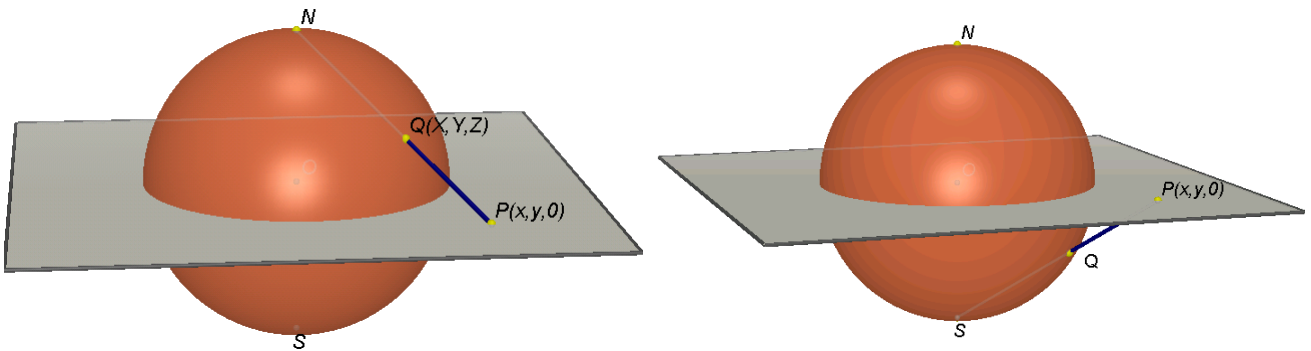
2. 立体射影

2-1. 定義

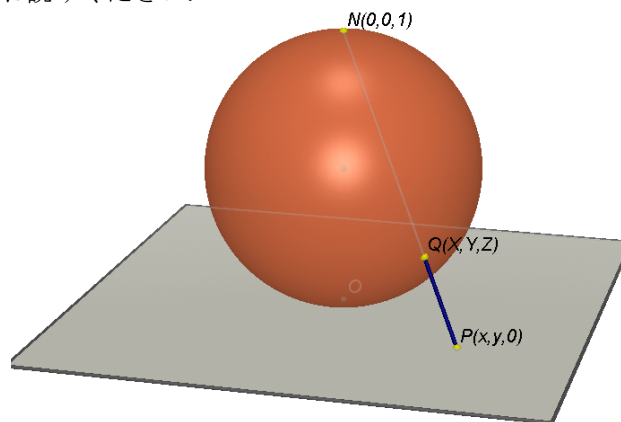
xyz 空間において、 xy 平面上の点 $P(x, y, 0)$ から、単位球面 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点 $Q(X, Y, Z)$ への左下図または右下図のような対応を「立体射影」と言います。すなわち Ω の北極を $N(0, 0, 1)$ 、南極を $S(0, 0, -1)$ とすると「 P に線分 NP (または SP) と球の交点 Q を対応させる変換」が「立体射影」です。以下、この節では「見易い」ので、左下図のような対応を「立体射影」と呼びます。逆に第 3 節では、右下図の対応を「立体射影」と呼びます。

また 立体射影は、 xy 平面に無限遠点を付け加えた平面から単位球への連続な 1対1 写像となります。

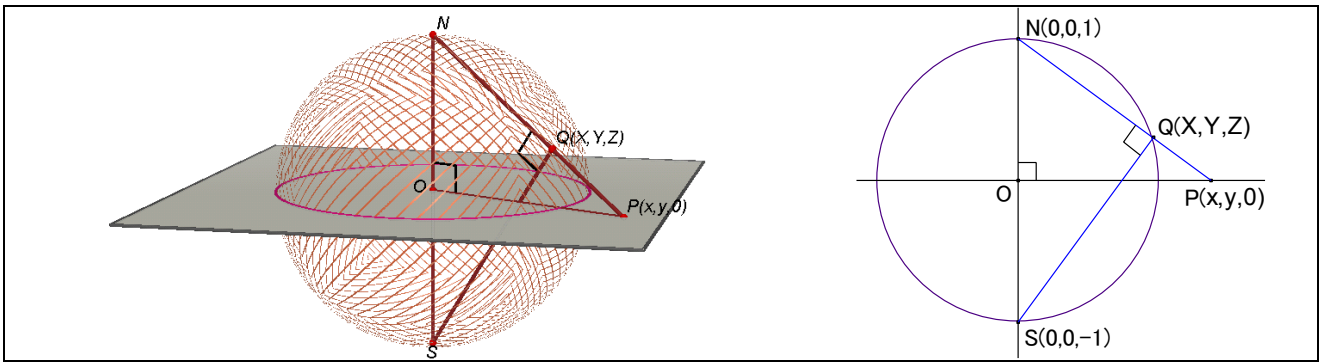
さらに、 Ω 上の点 Q に xy 平面(無限遠点を含む)上の点 P を対応させる変換も考えられますが、こちらも「立体射影」と呼びます。



[注] 下図のように、 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ の北極を $N(0, 0, 1)$ とするとき、 xy 平面上の点 P に、線分 NP と Σ の交点 Q を対応させる対応も「立体射影」と言います。しかしここでは、「立体射影」は、「 Ω 上への立体射影」を指すものとします。立体射影の詳細なことについては、「双曲幾何学への招待」をお読みください。



2-2. 式による表現



平面 NPS 上で考えます。△OPN ∽ △QSN だから、

$$NP : NO = NS : NQ \iff NP : 1 = 2 : NQ \quad \therefore NP \times NQ = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、 $P(x, y, 0)$ とすると、

$$\overrightarrow{NQ} = \frac{NQ}{NP} \overrightarrow{NP} = \frac{NP \times NQ}{NP^2} \overrightarrow{NP} = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \overrightarrow{NP} = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに、

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

従って、Q の座標は、

$$Q \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

2-3. 立体射影と鏡像

2-2 の①式は、次の式でした。

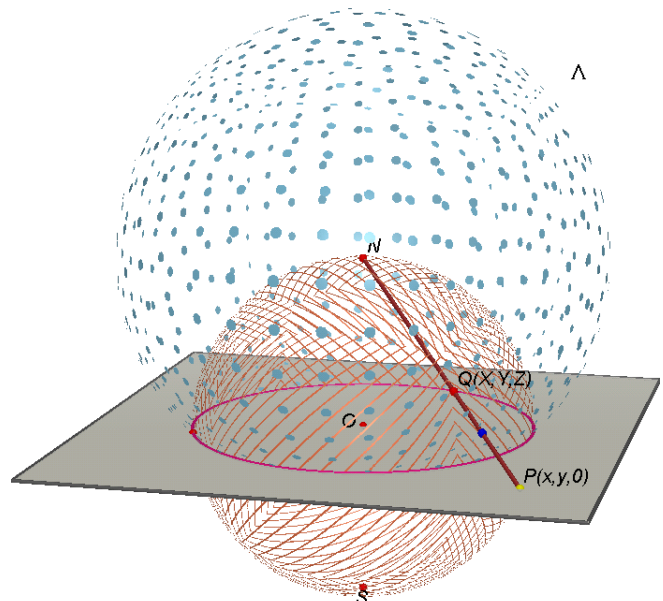
$$NP \times NQ = 2 \dots \textcircled{1}$$

「中心が N、半径 $\sqrt{2}$ の球」を Λ とすると、①は

P と Q が、互いに、 Λ に関する鏡像となる

ことを表しています。ゆえに、

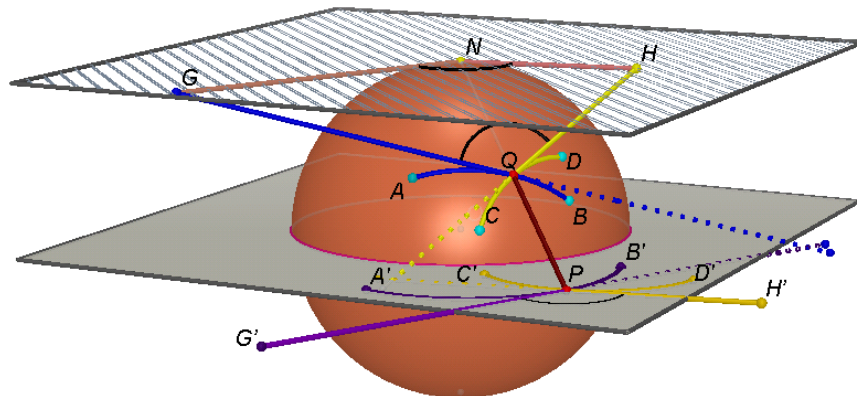
球に関する鏡像の性質と同様の性質が、立体射影でも成り立ちます。特に「等角性」と「円-円対応」が成り立ちます。



2-4. 立体射影の性質

2-4-1. 等角性

xy 平面上の 2 曲線 C_1', C_2' の立体射影を C_1, C_2 とします. このとき C_1, C_2 のなす角と C_1', C_2' のなす角は等しくなります. (下図では $\angle G'PH' = \angle GQH$.) すなわち, **立体射影は, 角度を保ちます.**



これは、「鏡像変換の性質より明らか」ですが, 次の証明が有名なので, ここに書きます. (「複素数と非ユークリッド幾何」より)

〔証明〕 xy 平面上の曲線 C_1 上に点 A', B' , 曲線 C_2 上に C', D' を取り, C_1, C_2 の交点を P , 点 A, B, C, D, P の立体射影を A, B, C, D, Q とします. さらに, Q に於ける C_1, C_2 の接線と平面 $z=1$ の交点を, それぞれ G, H とおき, G と H を \overline{NP} だけ平行移動した点をそれぞれ G', H' とします. この時, 平面 NGQ と xy 平面との交線が PG' なので, 直線 PG' は曲線 $A'B'$ の接線となります. 同様に, 直線 PH' は曲線 $C'D'$ の接線となります. よって, 曲線 $A'B'$ と曲線 $C'D'$ のなす角は $\angle G'PH'$. しかし「 $GG' // NP // HH'$ 」だから,

$$\angle G'PH' = \angle GNH \dots \textcircled{1}$$

ところが「球外の一点から, 球に引いた接線の長さは等しい (円錐の側面を作る)」から,

$$GQ = GN \text{ かつ } HQ = HN$$

ゆえに, 「 $\triangle NGH \equiv \triangle QGH$ 」となるので,

$$\angle GNH = \angle GQH \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$\angle G'PH' = \angle GQH$$

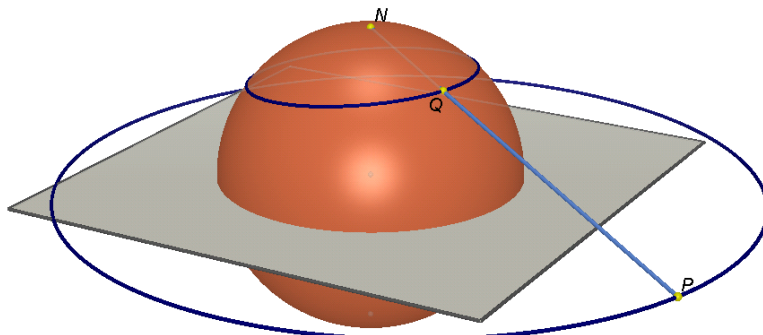
(Q.E.D)

Cabri3D による検証(立体射影の等角性)

点 Q, A, B, C, D を動かしてみてください. 因みに曲線 AB, CD 上にある薄緑の点も動かすことができます. 球面上の図形を xy 平面上の図形に移しています. angle.html

2-4-2. 円-円対応

Ω 上の曲線を C' , その xy 平面の上へ立体射影を C とします. C' が円となる時は, C も円または直線となります. 逆に C が円または直線のときは, C' も円になります.



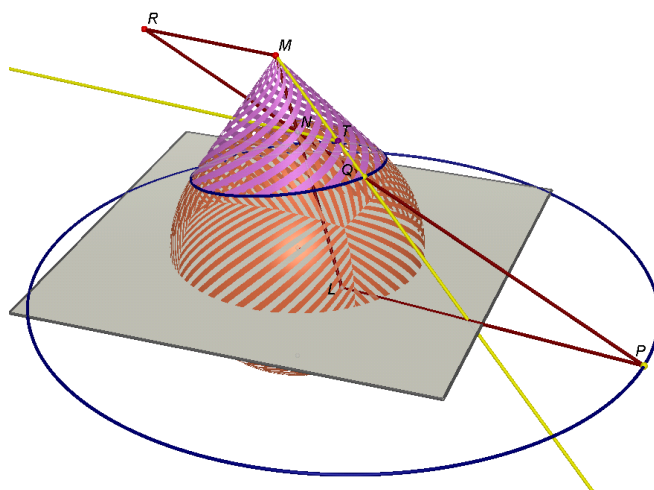
これも、「鏡像変換の性質より明らか」ですが, 次の証明が「複素数と非ユークリッド幾何」に載っていて面白かったので, ここに書きます.

【証明】

C' が極 N を通る円するとき, C は直線です. 逆に C が直線するとき, C' は N を通る円となります.

C' が N を通らない円するとき, C' 上の任意の点に於ける接線は, 一点 M で交わります. (M は C' を底円とした直円錐の頂点となります.)

以下, C' を固定して考えて, C' 上に動点 Q をとり, Q の xy 平面への立体射影を P , 直線 MN と xy 平面の交点を L , さらに M, N を通り xy 平面と平行な平面と直線 NQ の交点をそれぞれ R, T とします.



直線 TN と直線 TQ は共に球の接線で「球外の一点から, 球に引いた接線の長さは等しい」から,

$$TN = TQ$$

$NT // RM$ だから,

$$RM : MQ = TN : TQ = 1 : 1 \quad \therefore RM = MQ \quad \dots \textcircled{1}$$

M は C' を底円とする直円錐の頂点だから, Q が C' 上を動いても MQ の長さは変わりません. よって, RM の長さは一定です. ところが「 $\triangle RMN \sim \triangle PLN$ 」だから,

$$RM : PL = MN : NL \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より「 Q が動いても PL の長さは変わらない」ので, C は L を中心とする円 です. (Q.E.D)

Cabri3D による検証 (立体射影の「円-円対応」)

まず「 Q を動かしても PL の長さは一定であること」を確認して見てください. 次に, 点 M を動かして円 C' を変え, それに応じて C が変わる様子をご覧ください. [circle to circle.html](http://circle-to-circle.html)