

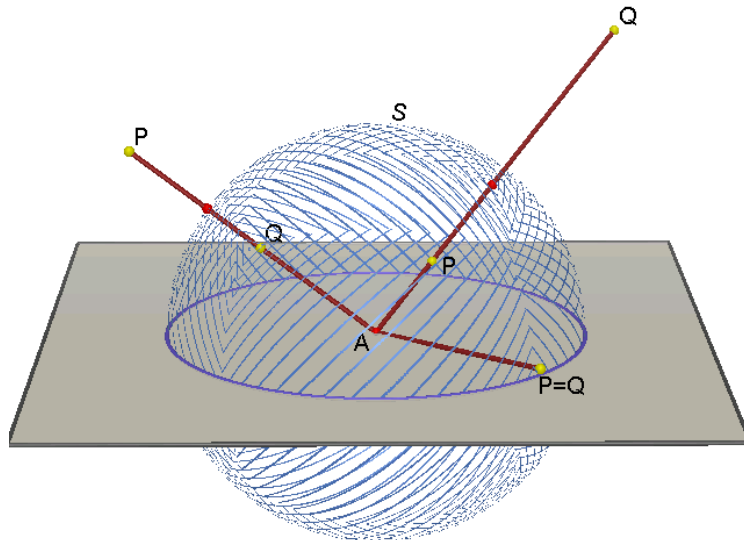
半球面モデル

1. 球に関する鏡像

1-1. 鏡像の定義

球に関する鏡像を，円に関する鏡像と同様に定義します．半径 R で中心が A の球 S に関する鏡像で，点 P が点 Q に移るとすると，

$$Q \text{ が半直線 } AP \text{ 上にあり，かつ } AP \times AQ = R^2$$



1-2. 鏡像変換の式

特に，球 S の中心が $O(0,0,0)$ ，半径が R とすると，平面の鏡像と同様に，

$$\overline{OQ} = \frac{OQ}{OP} \overline{OP} = \frac{OQ \times OP}{OP \times OP} \overline{OP} = \frac{R^2}{x^2 + y^2 + z^2} \overline{OP}$$

よって， O 中心，半径 r の球に関する点 P の鏡像は，

$$Q \left(\frac{R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

1-3. 鏡像変換の性質

1-3-1. 球-球対応

円に関する鏡像と同様の性質が成り立ちます. 例えば, 中心が A の球 S に関する鏡像では,

「 A を通らない球の鏡像は球」

-左下図で赤い2つの球は, S に関して互いに鏡像です.

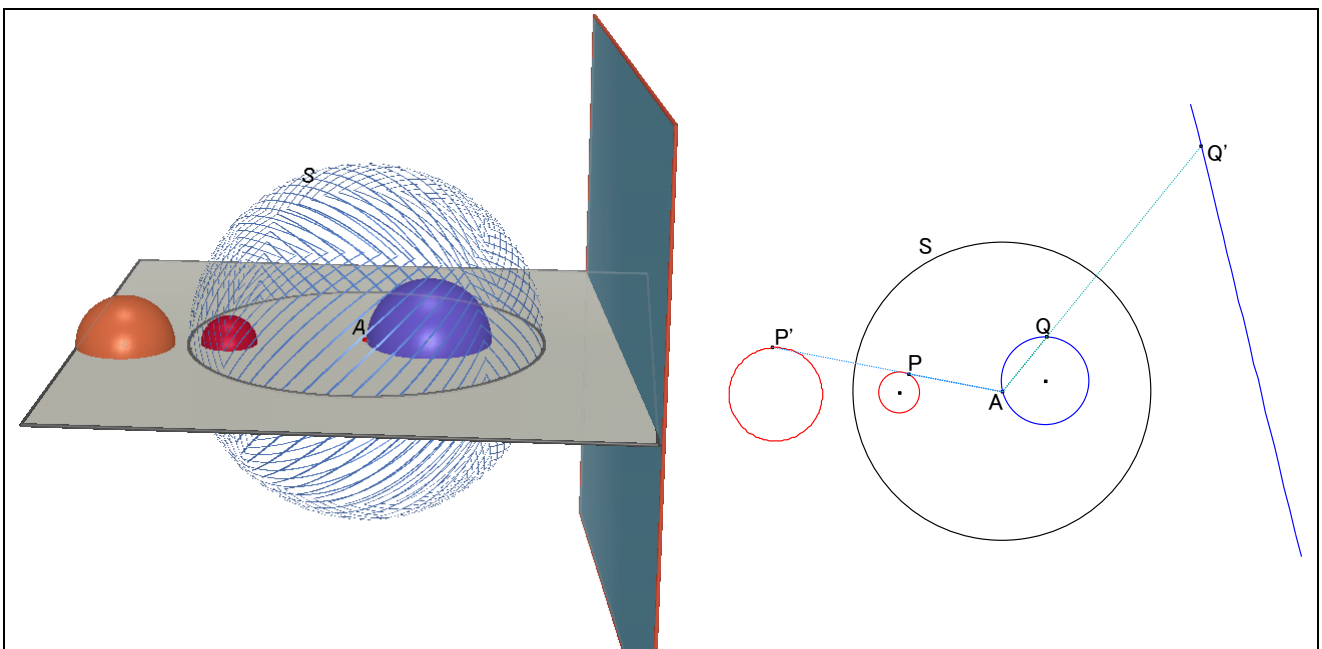
「 A を通る球の鏡像は原点を通らない平面」, 「 A を通らない平面の鏡像は A を通る球」

-青い球と平面は, S に関して互いに鏡像です.

となります. これは, 「 A と(鏡像をとる)球の中心を結ぶ直線」または「 A から平面に下ろした垂線」を含む断面図を考えると解かります. (右下図で, 赤い球の断面は赤い円, 青い球の断面は青い円です.)

平面の時と同様に, 平面と球を合わせて「一般化された球」とし, 太字の**球**で表すと,

球は球に移ります



Cabri II による検証 (球-球対応)

下図で A, B, C (平面上の3点), D (球の中心), E (球上の一点), K (球上の一点)を動かしてみてください. A', B', C', E' は, O を中心とし K を通る球に関する鏡像です. [mirror of spheres 1.html](http://mirror_of_spheres_1.html),

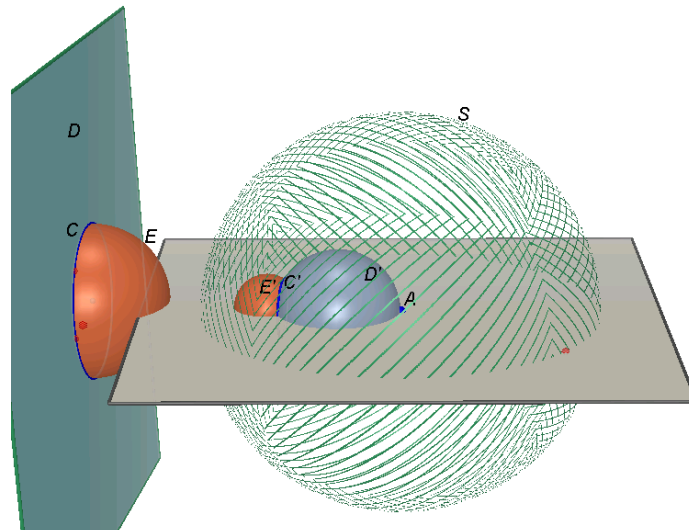
断面図です. A, P, Q, S , 2円の中心を drag してください. [mirror of spheres2.html](http://mirror_of_spheres2.html)

1-3-2. 円-円対応

さらに、一般化された円（円または直線）を太字の円 \mathbb{C} で表すと、「 \mathbb{C} は球と球の交線で表すことができ、球は球に移り、球と球の交線は円 \mathbb{C} 」なので、

\mathbb{C} は円 \mathbb{C} に移ります

例えば、右図で、中心 A の球 S に関する鏡像を f ，空間内の円を \mathbb{C} とします． \mathbb{C} は適当な球 E と平面 D の交線と見ることができ、 D, E の像はそれぞれ球 D' と球 E' となるので、円 \mathbb{C} の像は円 \mathbb{C}' となります．



Cabri II による検証（円-円対応）
[mirror of circles.html](http://mirror_of_circles.html)

1-3-3. 等角性

点 O を中心とする球 S に関する鏡像を f , 2 曲線 C_1, C_2 の f による像を, それぞれ C_1', C_2' とすると, C_1' と C_2' のなす角は, C_1 と C_2 のなす角と等しくなります. すなわち,

鏡像変換は, 角度を保ちます

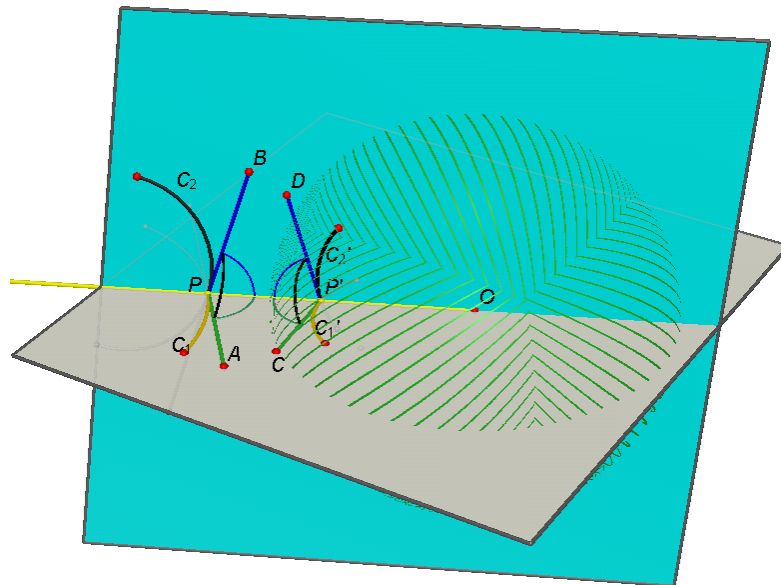
[証明] C_1, C_2 の交点を P , f による P の像を P' とします. C_1, C_2 の点 P に於ける接線上に点 A, B を, C_1', C_2' の点 P' に於ける接線上に点 C, D をとると, P, P', O, A, C と, P, P', O, B, D は, それぞれ同一平面上にあります. 「平面上の鏡像変換は角度を保つ」ので,

$$\angle APP' = \angle CPP' \quad \text{かつ} \quad \angle BPP' = \angle DPP' \quad (\text{図の青と緑の角})$$

ゆえに, 線分 PP' の垂直 2 等分面に関して対称移動すれば, 「半直線 $PA \rightarrow P'C$, 半直線 $PB \rightarrow P'D$ 」となるので,

$$\angle APB = \angle CP'D \quad (\text{図の黒の角})$$

[Q.E.D]



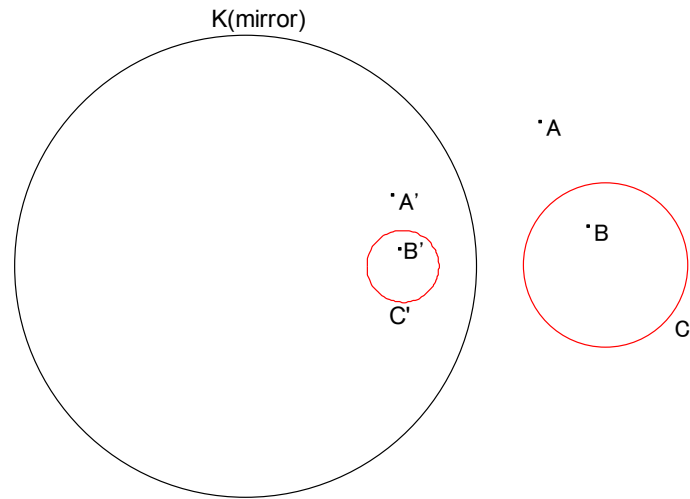
Cabri II による検証(等角性)

球に関する鏡像のとき P, A, B, O, K を動かしてみてください.
 円に関する鏡像のとき P, A, B, O, K を動かしてみてください.

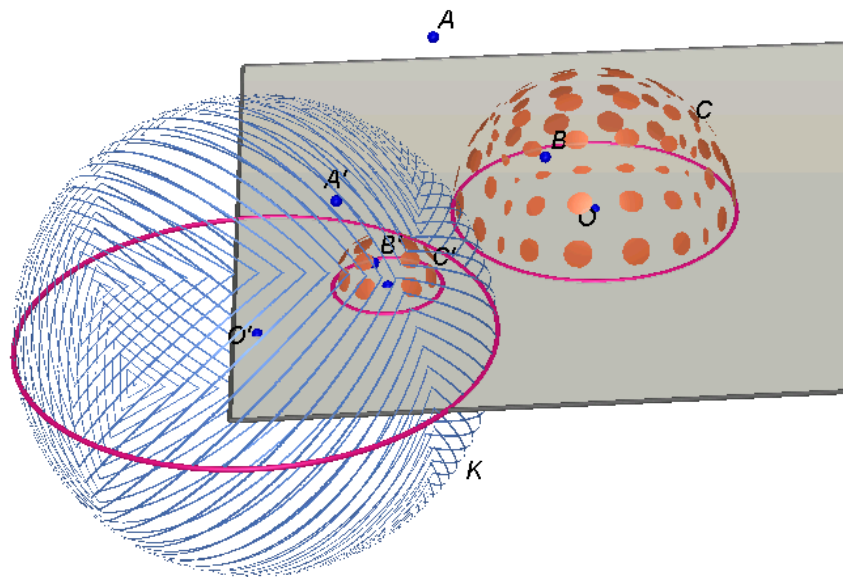
[mirror of angle1.html](http://www.geogebra.org/m/mirror_of_angle1)
[mirror of angle2.html](http://www.geogebra.org/m/mirror_of_angle2)

1-3-4. 鏡像原理

円に関する鏡像では、点 A と点 B が円 C に関して鏡像の時、円 K に関する点 A, B, C の像をそれぞれ A', B', C' とすると、 A' と B' は、 C' に関して鏡像になっていました。すなわち、 K という鏡に映しても、対称なペアはやはり対称なペアです。



これと同様に、点 A と点 B が球 C に関して鏡像の時、球 K に関する点 A, B, C の像をそれぞれ A', B', C' とすると、 A' と B' は、 C' に関して鏡像になります。これは、 C の中心 O と K の中心 O' と点 A を含む平面を考えると、明らかです。



Cabri II による検証(鏡像原理)

円に関する鏡像 Drag A,B,C,O,O',K

球に関する鏡像 Drag A,B,C,O',K

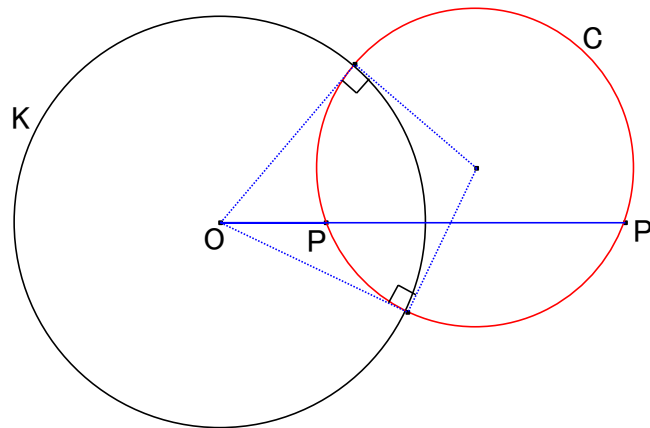
mirror_principle1.html

mirror_principle2.html

1-3-5. 直交する球に関する性質

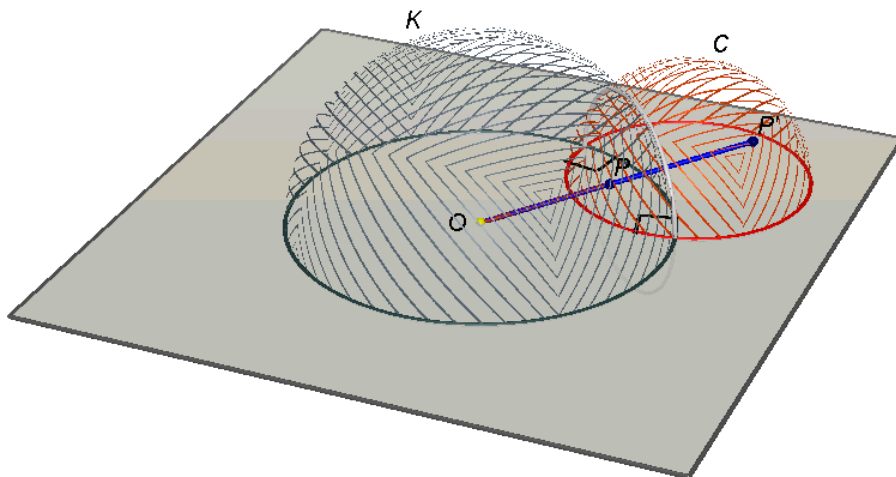
円に関する鏡像では，次の性質が成り立ちます．

P と P' が円 K に関し鏡像のとき， P と P' を通る円 C と K は直交します．逆に円 C と円 K が直交しているとき，円 C 上の点 P と O を結ぶ半直線と C の P 以外の交点を P' とすると， P と P' は K に関し鏡像となります．



これと同様に，

P と P' が球 K に関し鏡像のとき， P と P' を通る球 C と K は直交します．逆に球 C と球 K が直交しているとき，球 C 上の点 P と O を結ぶ半直線と C の P 以外の交点を P' とすると， P と P' は K に関し鏡像となります．



これも C の中心と，点 O , 点 P を通る平面による断面を考えると明らかです．

Cabri II による検証(直交する 2 球)

円に関する鏡像 P, C, K, O を drag して下さい．

球に関する鏡像 P, C と黄色の点を drag して下さい．

[perpendicular circles.html](http://perpendicular_circles.html),

[perpendicular spheres.html](http://perpendicular_spheres.html),

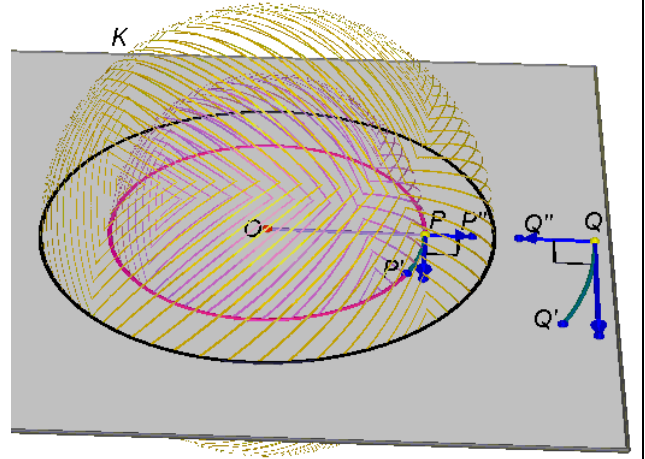
1-3-6. 「微小距離の変換」の等方性

K は中心が O で半径が 1 の球とします。
 P と P' は球 K に関し鏡像とし、P が微小距離 dp 動いた時に Q の動く微小距離を dq とします。

右図では P' の像が Q', P'' の像が Q'' です。従って、

$$\begin{cases} dp \doteq |PP'| \text{ のとき, } dq \doteq |QQ'| \\ dp \doteq |PP''| \text{ のとき, } dq \doteq |QQ''| \end{cases}$$

です。



(i) P が動径 OP と垂直な方向に動く時。(P が上図の P' へ動く時.)

P が微小距離動く時は、P は O を中心とした円周上を動き「 $OP=OP'$ 」と考えてよいから、P も P' も O を中心とした相似比の等しい相似変換で Q や Q' に移されます。よって

$$dp : dq = OP : OQ, \quad \therefore dq = \frac{OQ}{OP} dp = \frac{OQ \times OP}{OP \times OP} dp = \frac{1}{OP^2} dp \dots \textcircled{1}$$

(ii) P が動径 OP 方向に動く時。(P が上図の P'' へ動く時.)

対称性から、半直線 OP を x 軸正方向にとっても一般性を失いません。Q(X, Y, Z) とおくと、

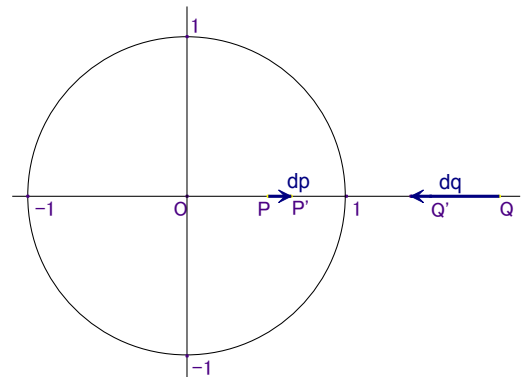
$$X = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad Y = Z = 0$$

したがって、

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx} = 0$$

よって、P が dx 動いた時の、Q の微小変移は

$$\vec{dq} = \begin{pmatrix} \frac{dX}{dx} \\ \frac{dY}{dx} \\ \frac{dZ}{dx} \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx$$



ゆえに Q の微小移動距離は

$$dq = |\vec{dq}| = \frac{1}{x^2} |dx| = \frac{1}{OP^2} dp \dots \textcircled{2}$$

(i),(ii)より、P が動径方向に動いても、動径と垂直方向に動いても、 dp と dq の比は一定となります。即ち、P の動く方向に寄らず、

$$dq = \frac{1}{OP^2} dp = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dp \dots \textcircled{3}$$

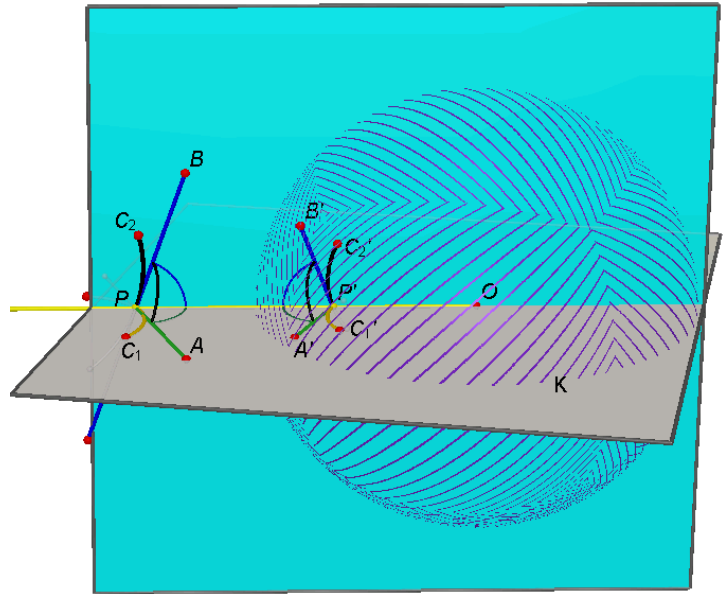
以上は K の半径が 1 の時でしたが、K の半径が r 、中心が O のとき、 $P(x, y, z)$ の K に関する鏡像を Q とすると、P が微小距離 dp 動いた時に Q の動く微小距離 dq は、

$$dq = \frac{r^2}{OP^2} dp = \frac{r^2}{x^2 + y^2 + z^2} dp \dots (*)$$

「 dp と dq の比が P の動く向きによらない」のが特徴です。（これを等方性と呼ぶことにします。）

「等方性」は、1-3-3. の「等角性」と、同値 です。

点 O を中心とする球 S に関する鏡像を f 、
2 曲線 C_1, C_2 の交点を P、P に於ける接線上
に点 A, B をとり、A, B の f による像を A', B' 、
また C_1, C_2, P の像を C_1', C_2', P' とします。



いま、仮に $\triangle APB$ が「 $PA=PB=AB$ 」の正三角形とすると、A, B が非常に P に近い時、「等方性」から、

$$\frac{P'A'}{PA} = \frac{P'B'}{PB} = \frac{A'B'}{AB} \quad \therefore P'A' = P'B' = A'B'$$

よって、 $\angle A'P'B' = \angle APB = 60^\circ$ となり、「等角性」が成り立ちます。

逆に、 $\triangle APB$ が「 $PA=PB=AB \neq 0$ 」の正三角形のとき、「等角性」から、

$$\angle A'P'B' = \angle APB = 60^\circ, \angle P'B'A' = \angle PBA = 60^\circ, \angle B'A'P' = \angle BAP = 60^\circ$$

$$\therefore P'A' = P'B' = A'B' \quad \therefore \frac{P'A'}{PA} = \frac{P'B'}{PB} = \frac{A'B'}{AB}$$

よって、「等方性」が成り立ちます。

結局、「等方性」も「等角性」も「A, B が P に非常に近い時は、 $\triangle APB \sim \triangle A'P'B'$ となる」ことを表しているのです、一方が成り立てば他方も成り立ちます。

[以下は覚書です]

[注1] 鏡像変換以外に等方性のある変換はあるでしょうか?

一般に $P(x, y, z)$ から $Q(X, Y, Z)$ への変換が

$$\overline{OQ} = f(r) \overline{OP} \iff \begin{cases} X = f(r)x \\ Y = f(r)y \\ Z = f(r)z \end{cases} \quad \dots(**)$$

(但し $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $f(r) > 0$, $f(r)$ は定数でない)

で与えられているとします. すなわち Q が半直線 OP 上にあり, 拡大率 $f(r)$ が原点からの距離のみの関数とします. 本文と同様に考えて,

(i) P が動径と垂直方向に移動する時,

$$dq = \frac{OQ}{OP} dp = f(r) dp \dots \textcircled{1}$$

(ii) P が動径 OP 方向に動く時.

対称性から, 半直線 OP を x 軸正方向にとっても一般性を失いません. $Q(X, Y, Z)$ とおくと,

$$X = f(r)x = x f(x) \quad (\because r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2)$$

したがって,

$$\frac{dX}{dx} = \{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$$

よって, P が dx 動いた時の, Q の微小移動量は

$$dq = |f(x) + xf'(x)| dx = |f(r) + rf'(r)| dp \dots \textcircled{2}$$

ゆえに, 「 dp と dq の比が P の動く向きによらない」 必要十分条件は, ①, ②より,

$$f(r) + rf'(r) = \pm f(r) \quad \dots \textcircled{3}$$

右辺の符号が正のとき, 「 $rf'(r) = 0$ 」. ところが $f(r)$ は定数でないので, 矛盾. 符号が負のとき,

$$f(r) + rf'(r) = -f(r) \iff 2f(r) = -rf'(r) \iff f(r) = \frac{C}{r^2} \quad (C \text{ は正の定数})$$

ゆえに, (**) の形の変換で, 「 dp と dq の比が P の動く向きによらない」 のは, 鏡像変換だけです.

[注2] 純粋な計算だけで、「等方性」や「等角性」を証明することも出来ます。

一般に、P が $dp = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ だけ変化した時の、Q の変化を $dq = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

この3×3行列をJとおくと、

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$$

両辺を転置して、

$$(dX, dY, dZ) = (dx, dy, dz) J^t \dots \textcircled{2}$$

①, ②の各辺の行列の積を取って

$$(dX, dY, dZ) \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = (dx, dy, dz) J^t J \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \dots \textcircled{3}$$

ここで、 $(X, Y, Z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$ のとき、単純計算で、

$$J^t J = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに、

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad \therefore dq = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dp$$

即ち、 dp と dq の比はPの動く向きによりません。

また、内積：

$$(dX', dY', dZ') \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = (dx', dy', dz') J^t J \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

を考えると、「等角性」も計算で出せます。