

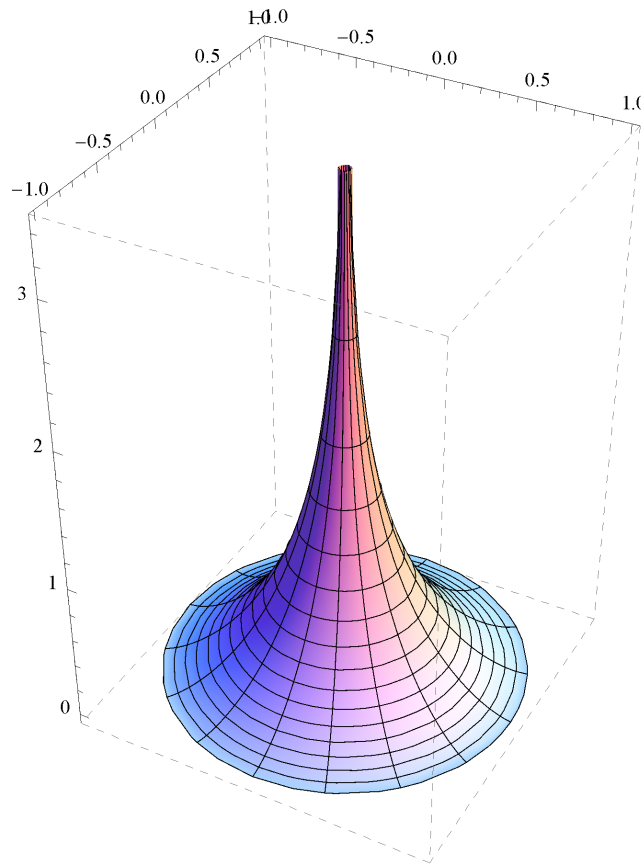
1. 偽球とは？

1-1. 概説

「偽球 (pseudo sphere)」は、双曲平面を3次元のユークリッド空間の中で作った曲面です。

偽球上では 双曲的距離や双曲的角度が ユークリッド的に測った距離や角度と一致します。但し双曲平面の有限な領域しか表せません。

下図は ポアンカレ上半平面 H^+ の $0 \leq x < 2\pi, 1 \leq y$ の領域を 1 対 1 対応で移した偽球です。底円の半径は 1 で、偽球は z 軸上方に 無限に伸びています。しかし、 $z < 0$ には伸ばせません。また、底円の半径は 1 である必要はありませんが、すべての偽球は相似なので 本質的には偽球は 1 つだけです。



1-2. 牽引線 (tractrix)

長さ k の線分 PQ の片端 Q を z 軸上に置いて 他の端 P を引っ張った時にできる曲線を **牽引線(tractrix)**と言います. (右図の青色の曲線) この曲線を z 軸の周りに回転した回転体の曲面が **偽球**です. 上図の偽球は $k=1$ としたものです. $k=1$ のとき, $P(x, z)$ とすると, 右図より PQ の傾きは

$\left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ となるので, P は次の微分方程式をみます.

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \dots \textcircled{1}$$

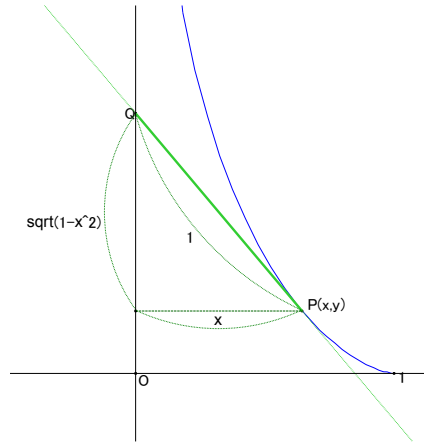
$x = \sin \theta$ と置換して この微分方程式を解くと

$$z = \log \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} - \sqrt{1-x^2} \dots \textcircled{2}$$

です. これを y 軸の周りに回転した回転体の曲面が**偽球**です. なお, 一般には ①,②はそれぞれ

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{x}, \quad z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2-x^2}}{x} - \sqrt{k^2-x^2}$$

となります. 詳しい証明は 「ユークリッド幾何から現代幾何へ」 小林昭七著 をご覧ください.



1-2-1. Cabri II と Mathematica による検証

$k=1$ の **牽引線 (tractrix)** です. P を Drag して下さい.

tractrix.html

偽球です. Mathematica player(無料) が必要です. サイズの変更は画面の右下の目盛りを利用, または CG の図をクリックして現れる「枠」を drag して下さい.

gikyuu.nbp

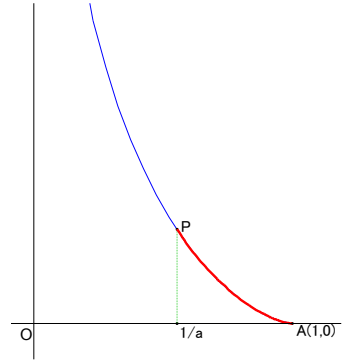
1-3. 偽球とポアンカレ上半平面 H^+ の関係

$k=1$ の tractrix では ①より 「 $\frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ 」 なので

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1 + \left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2 = 1 + \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \dots \textcircled{3}$$

よって曲線上に点 $A(1,0)$, P をとり, P の x 座標を $x = \frac{1}{a}$ とすると,

$$(\text{APの弧長}) = \int_{\frac{1}{a}}^1 \sqrt{1+(z')^2} dx = \int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{1}{x} dx = \log a$$



故に この曲線を z 軸の周りに回転させると, (下右図)

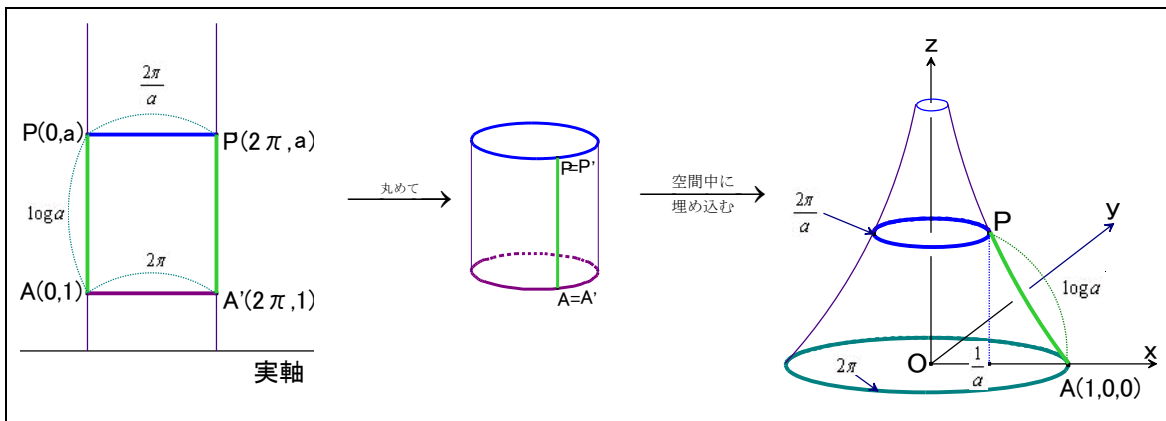
$$\text{弧長 AP} = \log a, \quad \text{底円の周囲が } 2\pi, \quad \text{上円の周囲が } \frac{2\pi}{a} \dots (*)$$

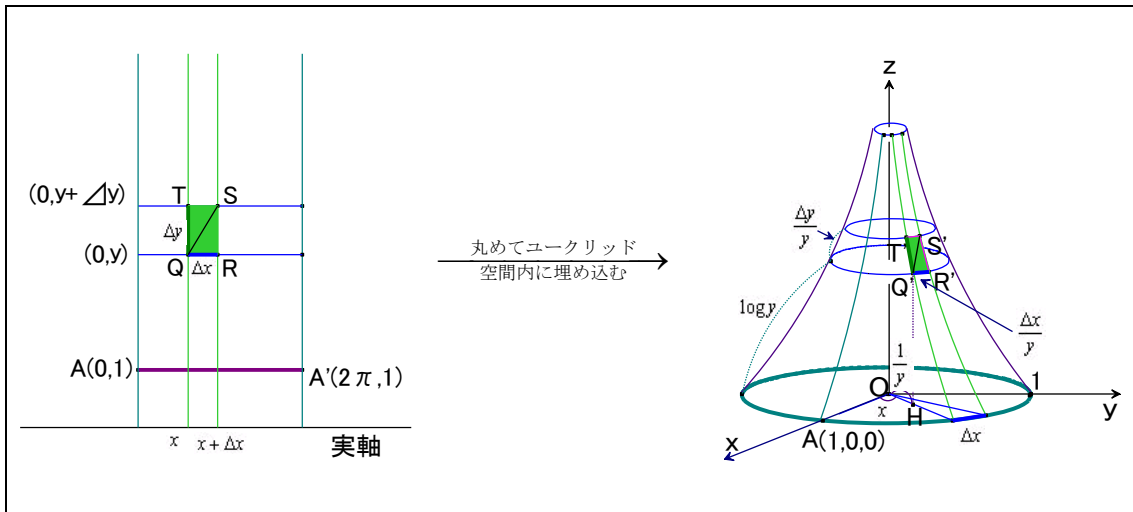
の帯状の領域が出来ます. 一方, ポアンカレ上半平面 H^+ では 「双曲的微小距離: $ds = \frac{|dz|}{y}$ 」 なので, $A(i)$, $P(ai)$, $A'(2\pi+i)$, $P'(2\pi+ai)$ の 4 点 (但し $a > 1$) を取ると その双曲的距離は,

$$[A, P] = \int_1^a \frac{dy}{y} = \log a, \quad [A, A']_{C_1} = 2\pi, \quad [P, P']_{C_2} = \frac{2\pi}{a} \dots (**)$$

です. 但し, A と A' , P と P' の双曲的距離は, 太線の線分(極限円)に沿って測るものとします.

(*)と(**)から, H^+ の長方形 $AA'P'P$ が 偽球上の帯領域に 「あるがままの長さで」 移っていることが分かります. a はどんなに大きくとも良いので, H^+ の領域 「 $0 \leq x \leq 2\pi, 1 \leq y$ 」 を 丸めて円柱にし, ユークリッド空間 R^3 の中に埋め込んだ曲面が偽球 と言えます.





a は任意なので、任意の距離に関しても **偽球上ではそのまま普通に図った長さが、双曲的距離を表します。** 一般に、 H^+ 上の任意の点 $Q(x+iy)$ に、偽球上で「偏角が x , z 軸からの距離が $\frac{1}{y}$ 」の

点 Q' を対応させます。詳しくは、偽球の方程式を $f(r) = \log \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{r} - \sqrt{1-r^2}$ と置いて、

$$Q(x+iy) \xrightarrow{g} Q' \left(\frac{1}{y} \cos x, \frac{1}{y} \sin x, f \left(\frac{1}{y} \right) \right) \dots \textcircled{4}$$

と言う対応 g を考えます。 g によって H^+ 上の微小長方形 $QRST$ (上図) は、偽球上の微小長方形 $Q'R'S'T'$ へ移りますが、「 $\log(1+x) \doteq x$ 」または「 $\Delta(\log y) = \frac{1}{y} \Delta y$ 」を使うと、

$$(Q'T' \text{の弧長}) = \log(y + \Delta y) - \log y = \log \left(1 + \frac{\Delta y}{y} \right) \doteq \frac{\Delta y}{y}$$

(上の式は、前頁の③の関係式から 直接導けます。) また、明らかに、

$$(Q'R' \text{の弧長}) = \frac{\Delta x}{y}$$

そして、偽球はユークリッド空間に埋め込まれているので、三平方の定理が使えて、

$$\overline{Q'S'}^2 = \overline{Q'R'}^2 + \overline{Q'T'}^2 = \left(\frac{\Delta x}{y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y} \right)^2 = \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{y^2}$$

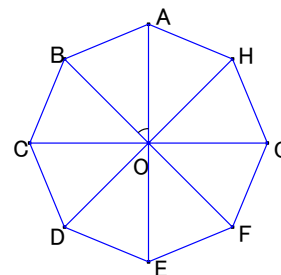
ところが、 H^+ でも QR , QT , QS の双曲的距離はそれぞれ

$$[Q,R] = \frac{\Delta x}{y}, \quad [Q,T] = \frac{\Delta y}{y}, \quad [Q,S] = \frac{\overline{QS}}{y} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{y}$$

です！ ゆえに、**偽球上では、そのまま普通に長さを測るとそれが双曲的長さを表します。**

角度に関しても同様のことが言えます. 例えば 前頁の図で「 $\angle TQR=90^\circ$ (双曲的角度)」ですが, 偽球上で ユークリッド的に測ってもやはり「 $\angle T'Q'R'=90^\circ$ 」です.

また, 右図のような正 8 角形($\angle AOB = \angle BOC = \dots = \angle HOA$ かつ $AO=BO=\dots=HO$ の 8 角形)が H^+ 上にあるとします. これを 対応 g によって 偽球上に移しても「 $\angle A'O'B' = \angle B'O'C' = \dots = \angle H'O'A'$ 」となります. よって H^+ 上で双曲的に測っても, 偽球上でユークリッド的に測っても $\angle AOB$ ($\angle A'O'B'$)は 45° です. 同様にして (連続性も使えば) 任意の角度について **角度の保存** が言えます.

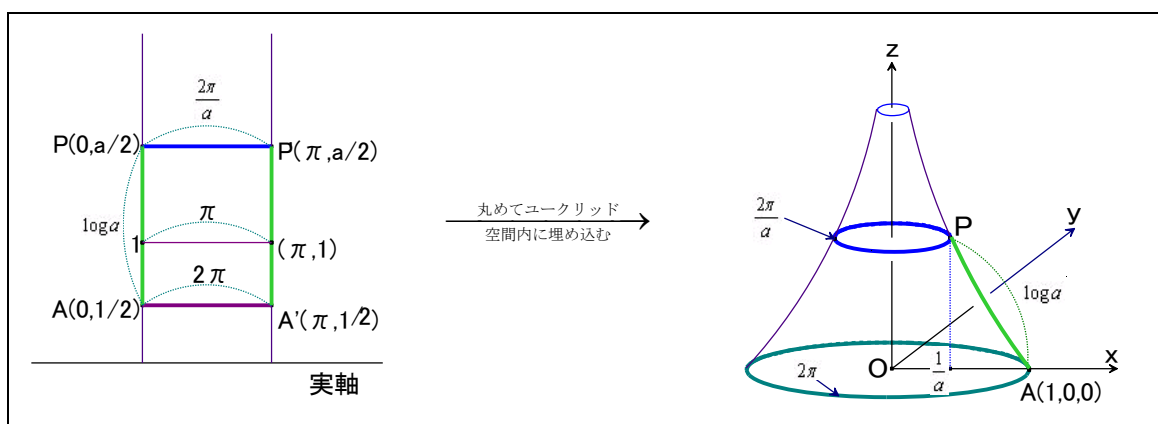


すなわち, H^+ に於ける双曲的距離や双曲的角度が「そのままの大きさで」偽球上に移されます. H^+ に於ける双曲的距離や双曲的角度を知りたいければ, 偽球上に移して「分度器」と「定規」で測ることができます. (実際には 長さを測るには 紐も必要かな と思いますが...)

1-4. 様々な対応

偽球と上半平面 H^+ の対応は一通りではありません. 「 $0 \leq x < 2\pi, 1 \leq y$ 」の代わりに, 「 $0 \leq x < \frac{2\pi}{n}, \frac{1}{n} \leq y$ 」の領域と対応させることができます. 例えば「 $0 \leq x < \pi, \frac{1}{2} \leq y$ 」の領域は, 次の対応で偽球上に移ります. (下図)

$$Q\left(x + \frac{yi}{2}\right) \xrightarrow{h} Q'\left(\frac{1}{y} \cos x, \frac{1}{y} \sin x, f\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$



極限円 AA' を実軸に近づけるためには, それに反比例して 横幅を小さくする必要があります. 実は「双曲平面全体をユークリッド空間内に埋め込むことは出来ない事」が証明されています.

1-5. 一般の偽球

偽球の底円の半径を増やすと H^+ の広い領域と対応しように思えますが、実はそうではありません。

一般の偽球（長さ k の線分 PQ を引っ張った牽引線から作った 半径 k の偽球）の方程式は、

$$z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2} \dots \textcircled{5}$$

一方、今まで見てきた $k=1$ の偽球の方程式は、

$$z = \log \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} - \sqrt{1 - x^2} \dots \textcircled{2}$$

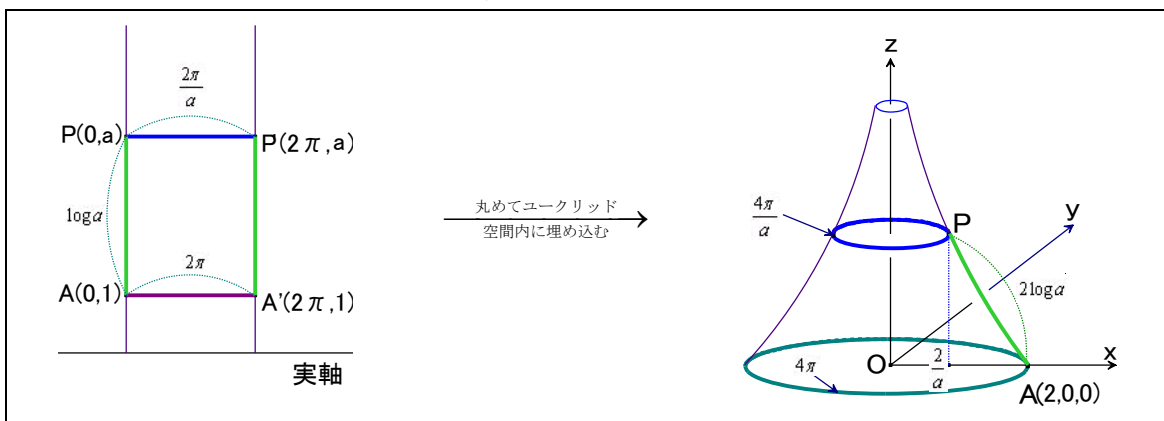
しかし、②の式で $z \rightarrow \frac{z}{k}, x \rightarrow \frac{x}{k}$ と置くと、

$$\frac{z}{k} = \log \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2}}{\frac{x}{k}} - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2} \quad \therefore z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2}$$

となり⑤の式と一致します。すなわち $k=1$ の偽球を**単位偽球**と呼ぶことにすると、**全ての偽球は単位偽球と相似**です。よって例えば $k=2$ の偽球では、そのままのユークリッド的長さでなく それを $\frac{1}{2}$ 倍にした長さが 双曲的長さを表します。言い換えると、一般の偽球で長さを測るときは

「底円の半径を 1 単位 として長さを測る」

とそれが双曲的長さと一致します。なお、角度はそのまま 双曲的角度と一致します。



【注】 取り扱いが簡単なので、以下の節では、**単位偽球**のみを扱います。