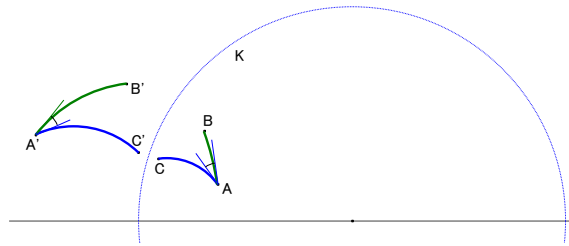


6. 双曲的角

6.1 双曲的角の定義

「二つの双曲的角が等しい」とは「一方が他方に双曲的移動で重ねられる事」と定義します.

例えば、弧 AB, AC は双曲的線分で、円 K による鏡像で 弧 $A'B', A'C'$ に移ったとします. この時定義より $\angle ABC = \angle A'B'C'$ となります. ($\angle ABC, \angle A'B'C'$ は双曲的角)



しかし、鏡像変換によりユークリッド角度は保存されます. 上図では「弧 AB, AC の接線のなすユークリッド角」と、「弧 $A'B', A'C'$ の接線のなすユークリッド角」は等しくなります. さらに「双曲的移動は鏡像変換の合成で作られる」(5.3) ので、「双曲的角が等しいなら、ユークリッド的角度も常に等しくなります」. 逆に、 H^+ において、ユークリッド的に重ねられる角は、双曲的にも重なることができます. よって、

双曲的角とユークリッド的角は等しい

です. 即ち、 H^+ 上で、双曲的直線 L, M が点 A で交わっている時、

L と M のなす双曲的角は、交点 A に於ける L と M の接線のなすユークリッド角
です.

Cabri II による検証 (双曲的角とユークリッド角)

Drag A, P, Q , (プログラムの都合上, 補角が表されることもあります.) [definition of angle.html](#)

6.2 双曲的角度の例

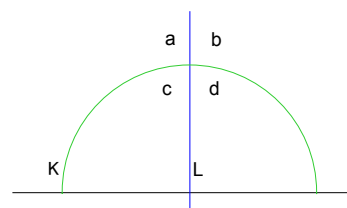
6.2.1 双曲的直角

右下図のように、 H^+ を双曲的直線 K と L (L は K の中心を通り実軸に垂直な直線) で分割してできる双曲的角度を $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d$ とします. L に関する鏡像で $\angle a$ は $\angle c$ へ、 $\angle b$ は $\angle d$ へ移り、円 K に関する鏡像で $\angle a$ は $\angle c$ へ、 $\angle b$ は $\angle d$ へ移ります. よって、

$$\angle a = \angle b = \angle c = \angle d = \angle R \quad (\text{双曲的に等しい})$$

ここで、 $\angle R$ は双曲的直角で、一直線のなす双曲的角を2等分した角です. 明らかに、ユークリッド的にも、

$$\angle a = \angle b = \angle c = \angle d = \angle R \quad (\text{ユークリッド的に等しい})$$



ここで、 $\angle R$ はユークリッド的直角です.

この様に「双曲的直角」と「ユークリッド直角」は等しくなります.

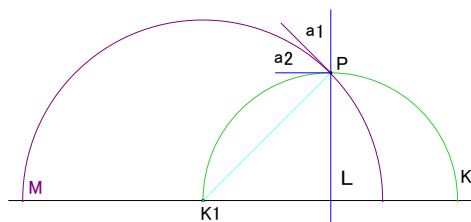
6.2.2. 双曲的直角の2等分

さらに、上図の様に L と K の交点を P 、 K と実軸の交点の1つを K_1 、 K_1 を中心とし P を通る円を M とすると、 M に関する鏡像により K は L に、 L は K に移り、 M は動きません. よって M と L のなす角を $\angle a_1$ 、 M と L のなす角を $\angle a_2$ とすると、 M に関する鏡像で互いに移るので、

$$\angle a_1 = \angle a_2 = \frac{1}{2} \angle R \quad (\angle R \text{は双曲的直角})$$

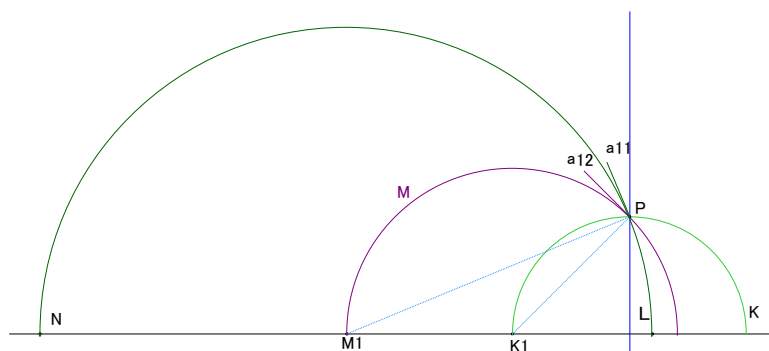
K_1 と P を結ぶ補助線を引くと、明らかに、

$$\angle a_1 = \angle a_2 = \frac{1}{2} \angle R \quad (\angle R \text{はユークリッド直角})$$



したがって、「双曲的 $\frac{1}{2}$ 直角」と「ユークリッド的 $\frac{1}{2}$ 直角」は等しいです.

6.2.3. 双曲的直角の n 等分



さらに、K と実軸の交点の 1 つを M_1 , M_1 を中心とし P を通る円を N, N と M のなす角を $\angle a_{11}$,

N と L のなす角を $\angle a_{12}$ とすると、N に関する鏡像で互いに移るので、

$$\angle a_{11} = \angle a_{12} = \frac{1}{4} \angle R \quad (\angle R \text{ は双曲的直角})$$

ところが、 $\triangle K_1 P M_1$ に注目すると、

$$\angle a_1 = \angle a_2 = \frac{1}{4} \angle R \quad (\angle R \text{ はユークリッド的直角})$$

したがって、「双曲的 $\frac{1}{4}$ 直角」と「ユークリッド的 $\frac{1}{4}$ 直角」は等しいです。

同様の操作を繰り返して $\angle R$ を次々に 2 等分していくことができ、常に「双曲的 $\frac{1}{2^n} \angle R$ 」と「ユークリッド的 $\frac{1}{2^n} \angle R$ 」は等しくなります。

$\frac{1}{2^n} \angle R$ 以外の角に関しても、これらの角の無限個の和で合成することができるので、「双曲的角度」と「ユークリッド的角度」は常に等しくなります。

Cabri II による検証 (直角の 4 分割)

Drag A, C. p と L のなす角を円 C で 2 等分し、 $\frac{1}{4} \angle R$ (双曲的角) を作ってください。 2 等分したら、X を動かして、C に関する鏡像 X' の動きを見てください。 [quarter of R.html](#)

【付録】 二円のなす双曲的角度の簡単な測り方

双曲的直線 K と L のなす角、即ち交点における接線 k, l のなす角度を θ とします。 K, L が実軸に垂直な直線でない時、 円の中心を C, D とすると、「 $AC \perp k, AD \perp l$ 」 だから、

$$\theta = \angle CAD \text{ または } \theta = \pi - \angle CAD.$$

