

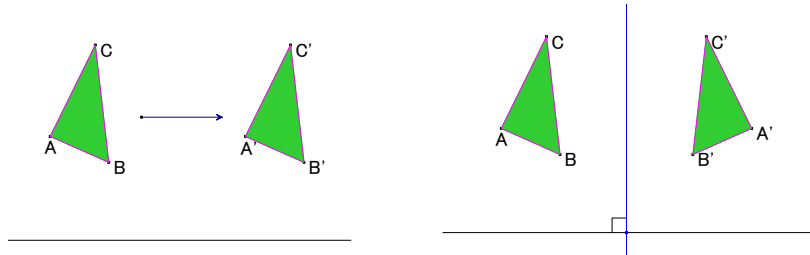
2. 双曲的移動の例

曲線の双曲的長さを変えない変換を、**双曲的移動**といいます。双曲的移動により、互いに移る図形は、**双曲的合同**といいます。以下、単に「移動」や「変換」と書けば、「ユークリッド的移動」を表すものとします。以下は、ポアンカレ上半平面(H^+)に於ける双曲的移動の一例です。

2.1 実軸に平行な方向への平行移動

2.2 実軸に垂直な直線に関する鏡像(対称移動)

これらは y 成分を変えないので、共に双曲的移動となります。(下図)



2.3 実軸上の点を相似の中心とする、相似比が正の相似変換

実軸上の点 A を相似の中心とし、相似比 k の変換を f とします。

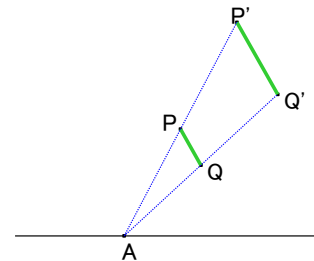
P, Q の距離が非常に近いとき、2点 P, Q の双曲的距離は、

$$[P, Q] = \frac{\overline{PQ}}{P \text{ の } y \text{ 成分}}$$

P, Q の f による像をそれぞれ P', Q' とすると

$$[P', Q'] = \frac{\overline{P'Q'}}{P' \text{ の } y \text{ 成分}} = \frac{k \cdot \overline{PQ}}{k \cdot (P \text{ の } y \text{ 成分})} = \frac{\overline{PQ}}{P \text{ の } y \text{ 成分}}$$

$$\therefore [P, Q] = [P', Q']$$



上の等式の誤差は \overline{PQ} より高位の微小量なので P と Q の間を細分して集めれば、 P と Q が離れている場合にも成り立ちます。即ち、 P と Q を結ぶ曲線を $C: (x(t), y(t))$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) とすると、

$$[P, Q]_c = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \quad (\text{但し } x'(t) = \frac{dx}{dt}, y'(t) = \frac{dy}{dt})$$

$$[P', Q']_{c'} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(kx'(t))^2 + (ky'(t))^2}}{ky(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

$$\text{ゆえに、} [P', Q']_{c'} = [P, Q]_c$$

2.4. 実軸上の点を中心とする円に関する鏡像(反転)

実軸上の点 A を中心とする半径 R の円を K , H^+ 上の 2 点を P, Q ,
また P, Q の円 K に関する鏡像 (反転) を P', Q' とします. 鏡像の定義より,

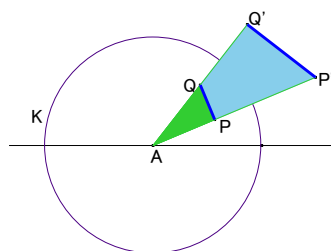
$$AP \times AP' = AQ \times AQ' = R^2. \quad \text{ゆえに } AP:AQ = AQ':AP'$$

よって, 「2 辺の比と挟角相等」で,

$$\triangle APQ \sim \triangle AQ'P'$$

ゆえに P, Q が非常に近い時, 「原点を相似の中心とする相似変換」と同様に,

$$[P, Q] = [P', Q']$$



上の等式の誤差は \overline{PQ} より高位の微小量なので P と Q の間を細分して集めれば P と Q が離れている場合にも成り立ちます.

即ち, P と Q を結ぶ適当な曲線 C 上の点を $R(x(t), y(t))$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), その像を $R'(X(t), Y(t))$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), さらに簡単の為, K を単位円とします. 鏡像の定義より

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}, Y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$\frac{dX}{dt} = X'(t)$ と表すと,

$$\begin{aligned} X'(t) &= \left(\frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \right)' = \frac{x'(t)(x(t)^2 + y(t)^2) - x(t)(2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t))}{(x(t)^2 + y(t)^2)^2} \\ &= \frac{x'(t)(-x(t)^2 + y(t)^2) - 2x(t)y(t)y'(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^2} \end{aligned}$$

同様に,

$$Y'(t) = \frac{y'(t)(x(t)^2 - y(t)^2) - 2x(t)y(t)x'(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^2}$$

単純計算により,

$$X'(t)^2 + Y'(t)^2 = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{(x(t)^2 + y(t)^2)^2}$$

したがって,

$$[P', Q']_C = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}}{Y} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2 + y^2}{y} \cdot \frac{\sqrt{x(t)^2 + y'(t)^2}}{x^2 + y^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{x(t)^2 + y'(t)^2}}{y} dt = [P, Q]_C$$

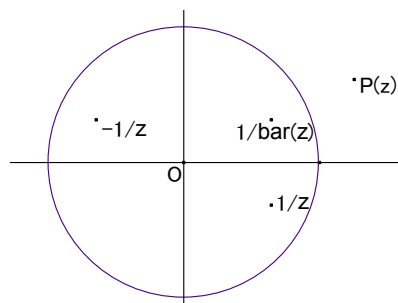
2.4.1. Cabri II による検証

P, Q を Drag して下さい. [similar transformation&isometric.html](http://www.geogebra.org/m/similar_transformation&isometric.html)

【注】「鏡像変換 (反転)」に関して, 詳しい説明は「**補充 I**」にあります.

2.5. (2.6の準備) 変換式が $\omega = -\frac{1}{z}$ で与えられるとき

この変換は「**単位円に関する鏡像(2.4)**」と「**虚軸に関する対称移動(2.2)**」の合成だから, 双曲的距離を保存します.



2.6. 実数係数の一次分数変換 (ただし $ad - bc > 0$)

ここで言う 1 次分数変換とは, 変換式が下のようになるものです.

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \text{ は実数で } ad - bc > 0)$$

(i) $c = 0$ とすると,

$$\omega = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

「 $ad - bc = ad > 0$ より $\frac{a}{d} > 0$ 」だから, 実軸に平行な移動(2.1)と 相似比が正の相似変換(2.3)

との合成になり, 双曲的移動となります.

(ii) $c \neq 0$ のとき

$$\omega = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{ad - bc}{z + \frac{d}{c}}$$

$ad - bc > 0$ だから, 実軸に平行な移動(2.1)と相似比が正の相似変換(2.3)と「 $\omega = -\frac{1}{z}$ の変換(2.5)」

の合成となり, この場合も双曲的移動となります. (Q.E.D.)

2.7. 双曲的合同変換の原子と分子

第3節で、「実軸に垂直な直線」と「実軸上の点を中心とする円」の二つが、双曲的直線であることを言います。すると、「実軸に垂直な直線に関する鏡像(2.2)」と「実軸上の点を中心とする円に関する鏡像(2.4)」の2つは、「双曲的直線に関する鏡像(*)」として、1つにまとまります。

さらに、「双曲的合同変換(図形の向きを変える変換も含めて)は、双曲的直線に関する鏡像(*)だけで合成できる」こと。「図形の向きを変えない双曲的合同変換は、全て1次分数変換で表せる」ことも第7節で説明します。

例えば、「2.3. 実軸上の点Aを相似の中心とする、相似比が正の相似変換」は、「点Aを中心とする2つの同心円に関する鏡像変換の合成」で表されます。

[similar transformation&inverse transformation.html](#)

これは、ユークリッド平面で、平行移動や、回転移動などの合同変換が全て、「直線に関する対称移動の合成」で表されることに対応しています。

[symmetric transformation¶rell transformation.html](#)

[symmetric transformation&rotation\(Euclid\).html](#)

この意味で、「1次分数変換は、双曲的移動の分子」、「鏡像変換は、双曲的移動の原子」です。