

## 11.4. シュタイナー円群 (円把)

2つの円の群があり,異なる群に属する円が互いに直交しているとき,円把と言います.

### 11.4.1. 例1 (双曲型)

$$f: \omega = \frac{5z+2}{z+4} \iff \frac{\omega+1}{\omega-2} = 2 \cdot \frac{z+1}{z-2} \quad \dots(*)$$

[11.1.1]と同じ例です.不動点は,  $A(-1)$  と  $B(2)$ , さらに,  $T(x) = \frac{x+1}{x-2}$  とおくと,

$$T(\omega) = 2 \cdot T(z) \quad \dots(\#)$$

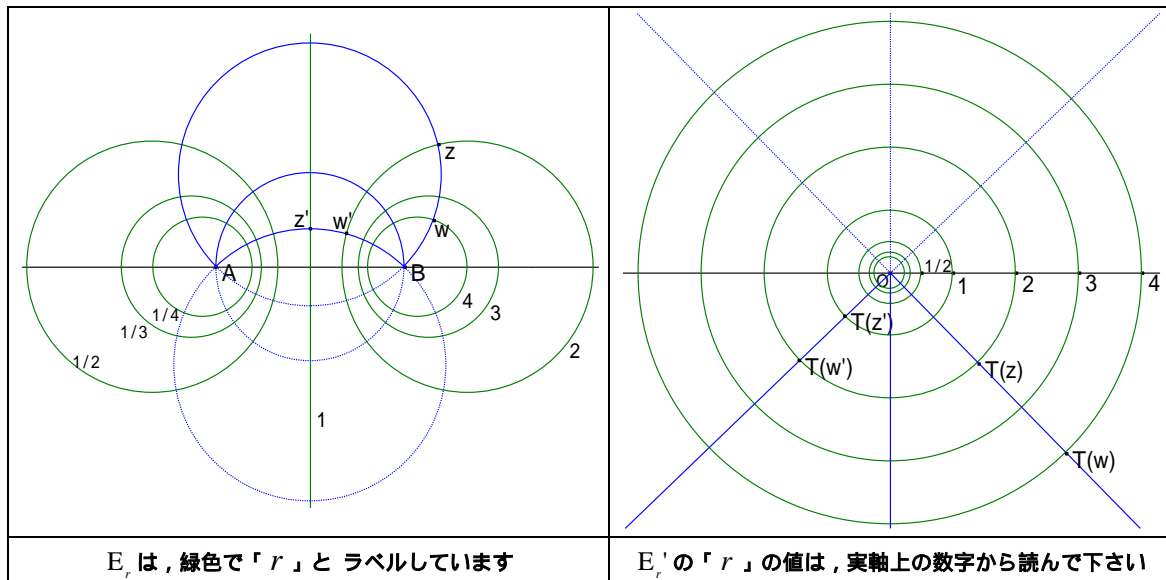
双対平面上で,原点を通る直線  $C'$  上の点は,  $C'$  上の点に移ります.  $C'$  をもとの平面に戻した曲線  $C$  は「2点  $A, B$  を通る円」で,  $f$  の不動曲線です.  $C$  は,  $H^+$  での **等距離線** です.

さらに,双対平面上で,中心  $O$ , 半径が  $r$  の円を  $E'_r$ , これを  $T^{-1}$  で戻した円を  $E_r$  とすると,

$E'_r$  は  $C'$  と直交するので,  $E_r$  も  $C$  と直交します.  $E_r$  上の点  $x$  の像は  $E'_r$  上にあるので,

$|T(x)| = \left| \frac{x+1}{x-2} \right| = r$ . 故に  $E_r$  は, 点  $A, B$  からの距離の比が一定で**アポロニウスの円**です.

この円の中心は実軸上にあるので,  $E_r$  は  $H^+$  での **双曲的直線** です.



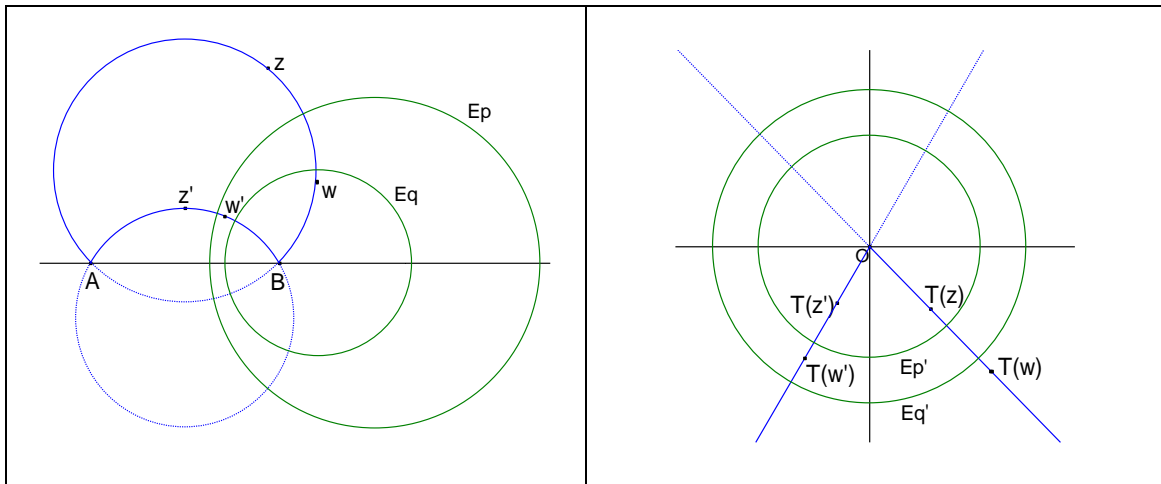
このような互いに直交する円の群  $\{C_n\}$  と  $\{E_n\}$  を「**シュタイナー円群(円把)**」と言います. シュタイナー円群は「座標系」のような働きもします. 例えば, 上図の  $z$  は  $E_2$  上なので,  $(\#)$  より,  $\omega = f(z)$  は  $E_4$  上に移ります. よって,  $\omega$  は「 $E_2$  と弧  $AzB$  の交点」となります. この様に,「**計算なしで**」  $f$  の像が求まります.  $z'$  と,  $\omega' = f(z')$  についても同様です.

## 2つの鏡像変換への分解(双曲型)

双対平面では,  $f$  は「原点中心で, 相似比が正の相似変換」だから, 適当に  $p, q$  を選んで, 2円  $E_p'$  と  $E_q'$  に対する鏡像変換の合成が  $f$  と一致するようにできます.

**【注】** 各々の円に関する鏡像は,  $f_p: x \mapsto \frac{p^2}{\bar{x}}$  と  $f_q: x \mapsto \frac{q^2}{\bar{x}}$ .  $f_q \circ f_p(x) = \frac{q^2}{f_p(x)} = \left(\frac{q}{p}\right)^2 x$

よって,  $\frac{q}{p} = \sqrt{2}$  とすれば,  $f_q \circ f_p(T(z)) = 2 \cdot T(z) = T(\omega)$  となります.



この  $E_p'$  と  $E_q'$  を  $T^{-1}$  で戻した円を各々  $E_p, E_q$  とすると, 「 $E_p$  と  $E_q$  に関する鏡像変換の合成」は  $f$  と一致します. 以上は 一般にも成り立つので,

**双曲型 一次分数変換は, 適当な二つの双曲的直線に関する鏡像の合成で表される.**

### Cabri による検証

1. 座標系としてのシュタイナー円群 Drag  $z$  [shtainer example1-1.html](http://shtainer.example1-1.html)
2. 鏡像変換の合成 Drag  $z, C, p, q$  [shtainer example1-2.html](http://shtainer.example1-2.html)

**【ちょっと一言】**  $\{E_n\}$  から, 適当な円を無数に選んで, 点列「 $z \xrightarrow[E_p \text{に関する鏡像}]{} \omega \xrightarrow[E_q \text{に関する鏡像}]{} \omega' \dots$ 」を

作ると, その集合は「 $z$  を通る等距離線」となります. ((9.4.3) の別の説明)

### 11.4.2. 例 2 (楕円型)

$$f: \omega = \frac{z-1}{z+1} \iff \frac{\omega+i}{\omega-i} = i \cdot \frac{z+i}{z-i} \quad \dots(*)$$

[11.1.2]と同じ例です．不動点は， $A(i)$ と $B(-i)$ ，さらに， $T(x) = \frac{x+i}{x-i}$  とおくと，

$$T(\omega) = i \cdot T(z) \quad \dots(\#)$$

双対平面上で，原点を中心とする半径 $r$ の円 $C_r'$ 上の点は， $(\#)$ により $C_r'$ 上の点に移ります．

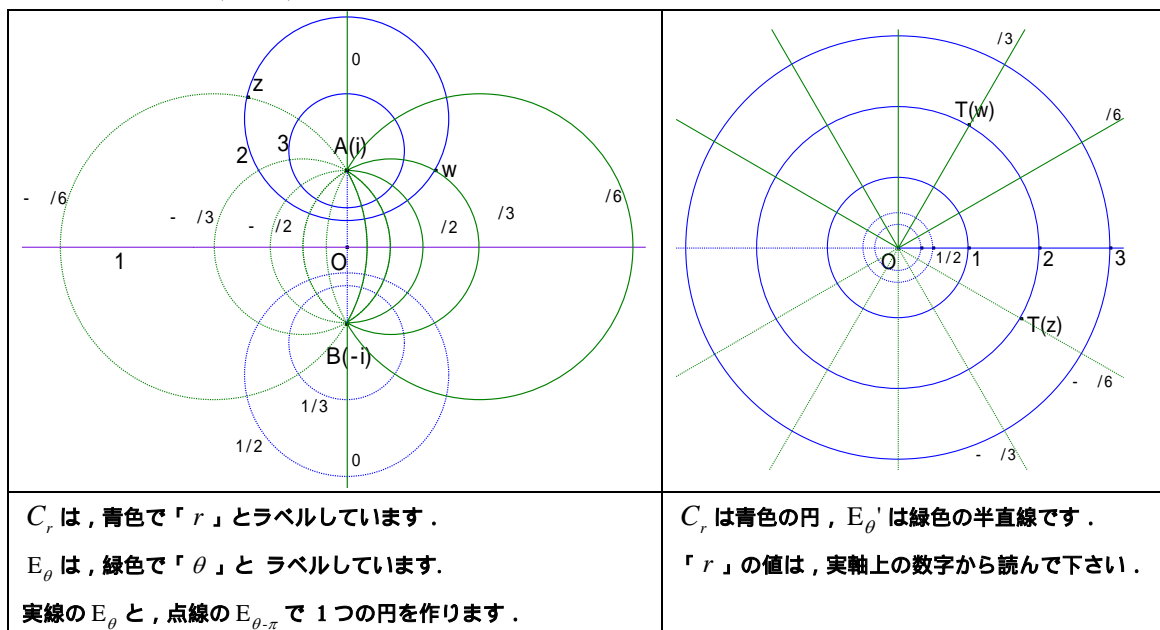
$C_r'$ をもとの平面に戻した曲線 $C_r$ は， $\left| \frac{x+i}{x-i} \right| = r$ をみたす点の軌跡(アポロニウスの円)です．

$C_r$ は $f$ の不動曲線で，**双曲的円**です．

さらに，双対平面上で，原点 $O$ を通る直線を $E_\theta'$ ，これを $T^{-1}$ で戻した円を $E_\theta$ とすると， $E_\theta'$

は $C'$ と直交するので， $E_\theta$ も $C$ と直交します． $E_\theta$ 上の点 $x$ の像は $E_\theta'$ 上にあるので，

$\arg T(x) = \arg \left( \frac{x+i}{x-i} \right) = \theta$ ．故に $E_\theta$ は， $A, B$ を通る円で， $H^+$ での**双曲的直線**です．



この $\{C_n\}$ と $\{E_n\}$ も「**シュタイナー円群**」で，「座標系」のような働きをします．例えば，

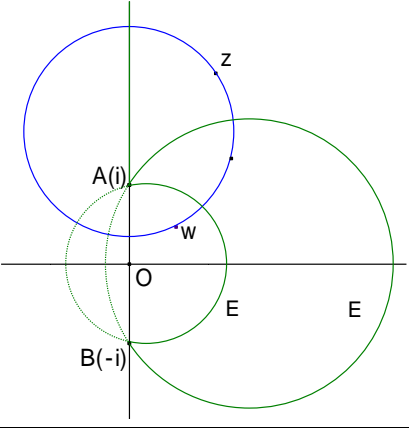
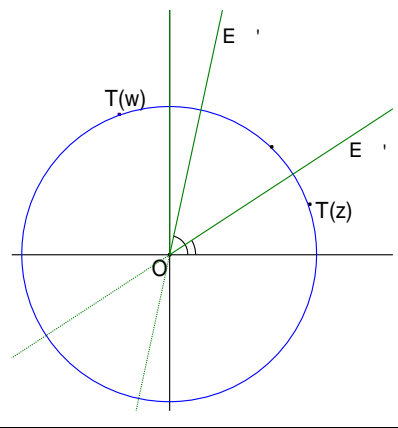
上図の $z$ は $C_2$ と $E_{-\pi/6}$ の交点です．そして「 $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$ 」なので， $(\#)$ により， $\omega = f(z)$ は

$C_2$ と $E_{\pi/3}$ の交点に移ります．この様に，「**計算なしで**」 $f$ の像が求まります．

## 2つの鏡像変換への分解(楕円型)

双対平面では,  $f$  は「原点中心の  $\theta$  の回転」だから, 適当に  $\alpha, \beta$  を選んで, 2直線  $E_\alpha'$  と  $E_\beta'$  に対する鏡像変換の合成が  $f$  と一致するようにできます.

**[注]**  $E_\alpha'$  と  $E_\beta'$  に関する鏡像を  $f_\alpha$  と  $f_\beta$  とすると,  $f_\beta \circ f_\alpha$  は「原点中心の  $2(\beta - \alpha)$  の回転」です. ゆえに, 「 $\beta - \alpha = \pi/4$ 」とすれば,  $f_\beta \circ f_\alpha(T(z)) = i \cdot T(z) = T(\omega)$  となります.

	
$\beta - \alpha = \pi/4$ ならば, $E_\alpha$ と $E_\beta$ に対する鏡像の合成は, $f$ と一致する	$\beta - \alpha = \pi/4$ ならば, $E_\alpha'$ と $E_\beta'$ に対する鏡像の合成は, 「原点中心の $\pi/2$ の回転」となる

この  $E_\alpha'$  と  $E_\beta'$  を  $T^{-1}$  で戻した円を 各々  $E_\alpha, E_\beta$  とすると, 「 $E_\alpha$  と  $E_\beta$  に関する鏡像変換の合成」は  $f$  と一致します. 以上は 一般にも成り立つので,

**楕円型 一次分数変換は, 適当な二つの双曲的直線に関する鏡像の合成で表される.**

### Cabri による検証

1. 座標系としてのシュタイナー円群 Drag  $z$  [shteiner\\_example2-1.html](http://shteiner.example2-1.html)
2. 鏡像変換の合成 Drag  $z, C, p, q$  [shteiner\\_example2-2.html](http://shteiner_example2-2.html)

**【ちょっと一言】**  $\{E_n\}$  から, 適当な円を無数に選んで, 点列「 $z \xrightarrow[E_\alpha]{E_\alpha \text{ に関する鏡像}} \omega \xrightarrow[E_\beta]{E_\beta \text{ に関する鏡像}} \omega' \dots$ 」を

作ると, その軌跡は「 $A$  を中心とし,  $z$  を通る双曲的円」となります. ((6.2) の別の説明)

### 11.4.3. 例 3 (放物型)

$$f: \omega = \frac{3z-4}{z-1} \iff \frac{1}{\omega-2} = \frac{1}{z-2} + 1 \dots(*)$$

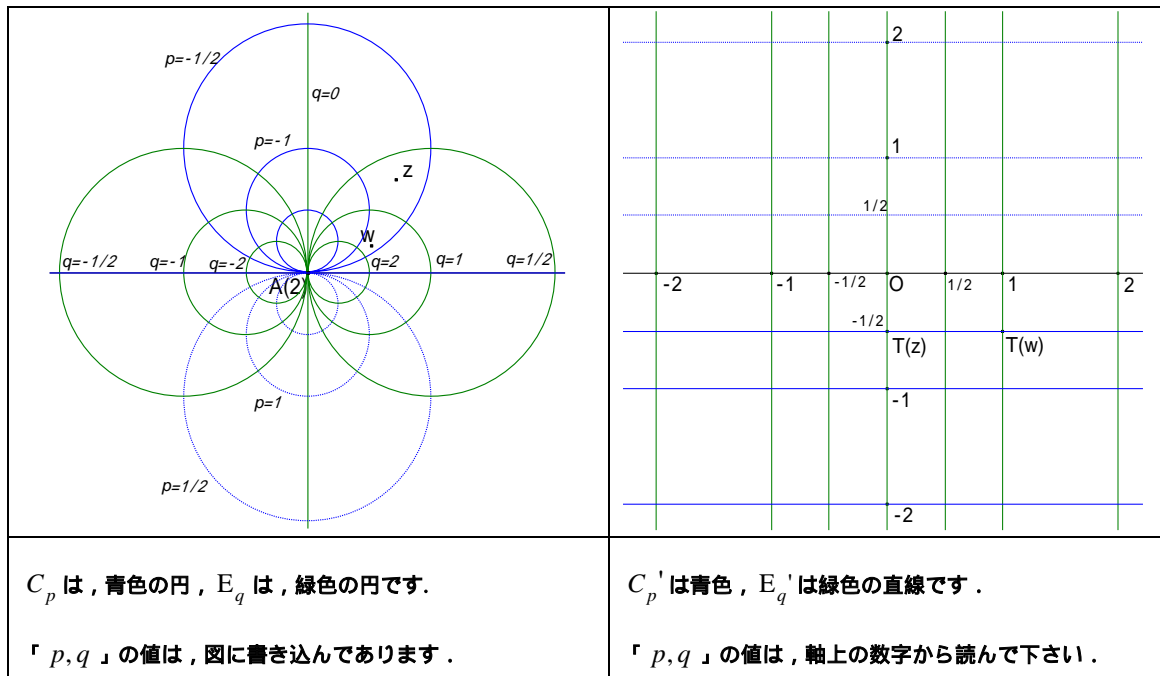
[11.1.3]と同じ例です．不動点は，A(2)のみ．さらに， $T(x) = \frac{1}{x-2}$  とおくと，

$$T(\omega) = T(z) + 1 \dots(\#)$$

双対平面上で， $x$  軸と平行な直線  $C_p': y = p$  上の点は，(＃)により  $C_p'$  上の点に移ります． $C_p'$  を元の平面に戻した曲線  $C_p$  は  $f$  の不動曲線で，A に於いて実軸と接する円(極限円)です．

さらに，双対平面上で， $y$  軸と平行な直線を  $E_q': x = q$ ，これを  $T^{-1}$  で戻した円を  $E_q$  とすると， $E_q'$  は  $C'$  と直交するので， $E_q$  も  $C$  と直交します．かつ， $C_p$  の場合と同様に考えて，

$E_q$  は，点 A に於いて  $x = 2$  と接する円となります．故に  $E_q$  は， $H^+$  での**双曲的直線**です．

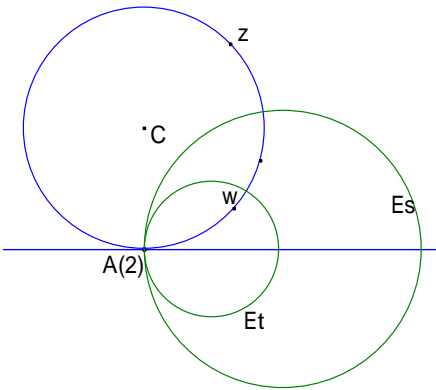
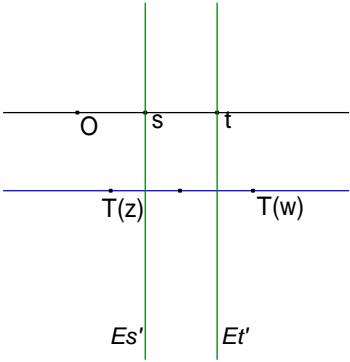


この  $\{C_n\}$  と  $\{E_n\}$  も「シュタイナー円群」で，「座標系」のような働きをします．例えば，上図の  $z$  は「 $C_{-1/2}$  と  $E_0$  の交点」です．そして「 $0+1=1$ 」だから，(＃)により， $\omega = f(z)$  は「 $C_{-1/2}$  と  $E_1$  の交点」に移ります．この様に，「計算なしで」 $f$  の像が求まります．

## 2つの鏡像変換への分解 (放物型)

双対平面では,  $f$  は「実軸に平行な平行移動」だから, 適当に  $s, t$  を選んで, 2直線  $E_s'$  と  $E_t'$  に対する鏡像変換の合成が  $f$  と一致するようにできます.

**[注]** 各直線に関する鏡像は「 $f_s : x \mapsto 2s - x$ 」と「 $f_t : x \mapsto 2t - x$ 」.  $f_t \circ f_s(x) = x + 2(t - s)$   
 よって「 $2(t - s) = 1$ 」とすれば,  $f_t \circ f_s(T(z)) = T(z) + 1 = T(\omega)$  となります.

	
$2(t - s) = 1$ なら, $E_s$ と $E_t$ に対する鏡像の合成は, $f$ と一致する	$2(t - s) = 1$ なら, $E_s'$ と $E_t'$ に対する鏡像の合成は, 「実軸に平行な方向に 1 平行移動」となる

この  $E_s'$  と  $E_t'$  を  $T^{-1}$  で戻した円を 各々  $E_s, E_t$  とすると, 「 $E_s$  と  $E_t$  に関する鏡像変換の合成」は  $f$  と一致します. 以上は 一般にも成り立つので,

**放物型 一次分数変換は, 適当な二つの双曲的直線に関する鏡像の合成で表される.**

### Cabri による検証

1. 座標系としてのシュタイナー円群 Drag  $z$  [shteiner example3-1.html](http://shteiner.example3-1.html)
2. 鏡像変換の合成 Drag  $z, C, p, q$  [shteiner example3-2.html](http://shteiner.example3-2.html)

**【ちょっと一言】**  $\{E_n\}$  から, 適当な円を無数に選んで, 点列「 $z \xrightarrow[E_{\beta} \text{に関する鏡像}]{E_{\alpha} \text{に関する鏡像}} \omega \xrightarrow[E_{\beta} \text{に関する鏡像}]{E_{\alpha} \text{に関する鏡像}} \omega' \dots$ 」を

作ると, その軌跡は「 $A$  で実軸と接し,  $z$  を通る極限円」となります. ((8.1) の別の説明)

## 11.5. 一次分数変換の分解

$f$  は  $H^+$  に於ける 次の一次分数変換とします .

$$f: \omega = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \text{ は実数, } ad - bc > 0) \dots (*)$$

$c \neq 0$  の時 ,  $f$  は , 適当な 2 円 ( 双曲的直線 ) に関する鏡像で合成できます . (10.3)参照  
 $c = 0$  の時も , 明らかに  $f$  は適当な 2 円 ( 双曲的直線 ) に関する鏡像で合成できます . 即ち ,

一次分数変換(\*)は , 常に 「 適当な 2 円 ( 双曲的直線 ) に関する鏡像 」 で合成できます .

すなわち , 双曲的変換の「分子」は , 常に 「原子」 2 個でできています .

**【注】** 一般に , 斜航型の一次分数変換は , 4 個の円に関する鏡像変換の合成になります . しかし , (\*)型の一次分数変換は , 「楕円型」 , 「双曲型」 , 「放物型」 のいずれかになるので , 適当な 2 円 ( 双曲的直線 ) に関する鏡像で合成できます .

## 11.6. 二つの鏡像変換の合成

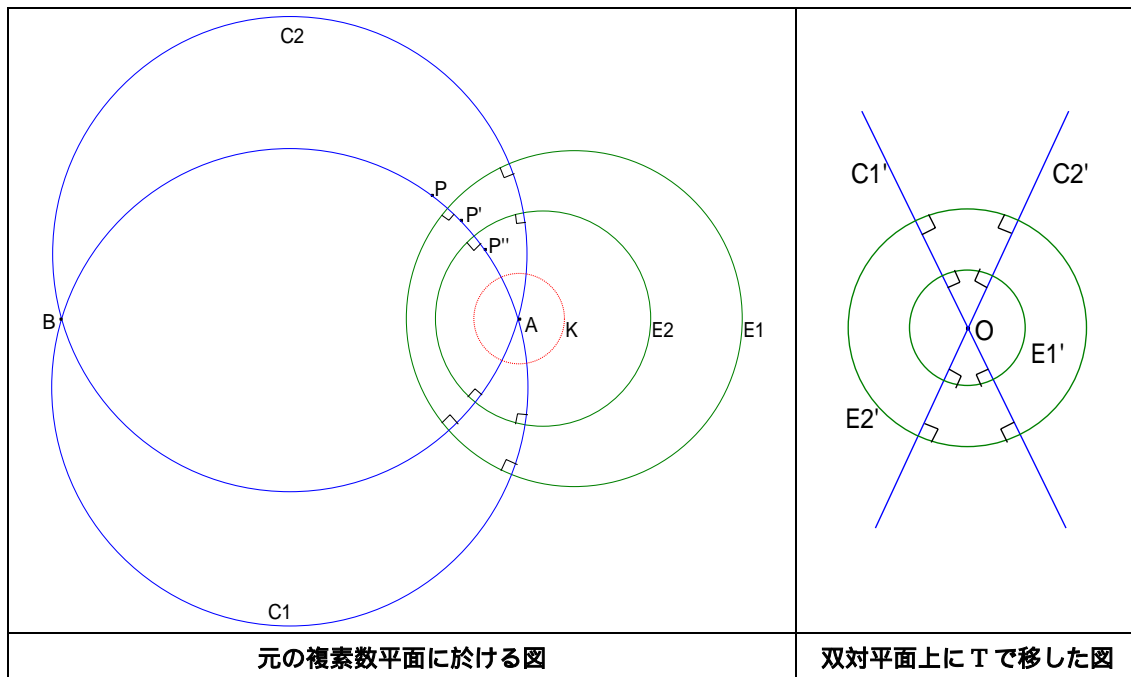
双曲的直線  $E_1$  と  $E_2$  に関する鏡像の合成は，一次分数変換となるので，やはり，「**双曲型**」，「**楕円型**」，「**放物型**」のいずれかに分類されます．

### 11.6.1. 例: 二円が交点を持たない時

$E_1, E_2$  外の 1 点  $P$  を「 $P \xrightarrow[E_1 \text{ に関する鏡像}]{E_1} P' \xrightarrow[E_2 \text{ に関する鏡像}]{E_2} P''$ 」と移し，3 点  $P, P', P''$  を通る円  $C_1$  を作ると，「 $C_1 \perp E_1, C_1 \perp E_2$ 」です．同様にして「 $C_2 \perp E_1, C_2 \perp E_2$ 」となる円  $C_2$  を作ります．

$C_1$  と  $C_2$  の交点を  $A(\alpha), B(\beta)$  とし， $T: x \mapsto \frac{x-\beta}{x-\alpha}$  によって，双対平面に移すと， $C_1$  と  $C_2$  は

原点で交わる直線  $C_1'$  と  $C_2'$  に移り， $E_1$  と  $E_2$  は， $C_1'$  と  $C_2'$  に直交する円  $E_1', E_2'$  へ移ります．故に  $E_1'$  と  $E_2'$  は「原点を中心とする同心円」です．従って「 $E_1, E_2$  に関する鏡像の合成」は，「 $E_1', E_2'$  に関する鏡像の合成」と共役で，(固定点が  $A$  と  $B$  の) **双曲型** になります．



$T$  でなく， $S: x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$  で移しても， $E_1$  と  $E_2$  は， $C_1'$  と  $C_2'$  に直交する同心円  $E_1', E_2'$  へ移

ります．或いは，点  $A$  または  $B$  を中心とする円  $K$  に関する鏡像 で移しても同じです．

以下の Cabri のファイルでは， $A$  を中心とする円  $K$  に関する鏡像で 移しています．

### Cabri による検証

Drag  $K, P, Q, E_1, E_2$  (円は直接 Drag して下さい)

[composit\\_ex1.html](http://composit_ex1.html)

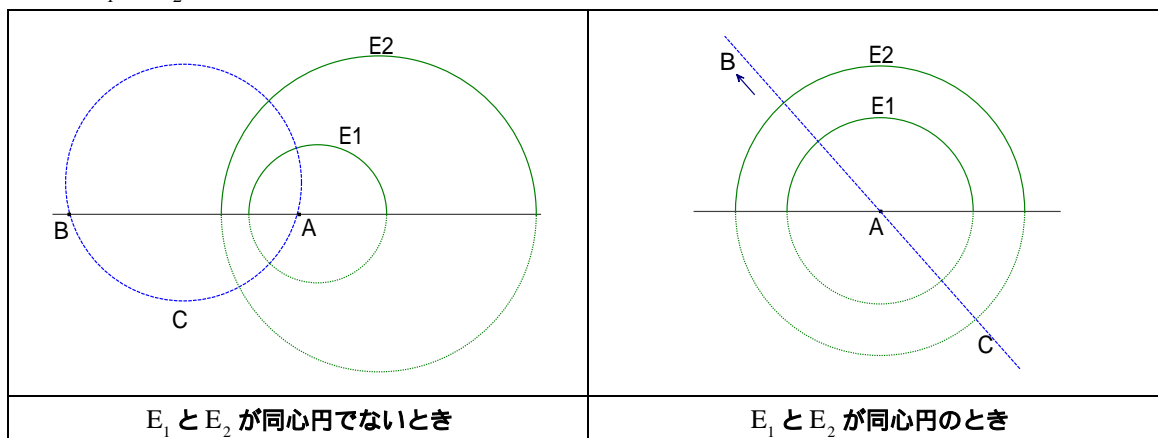


### 11.6.2. 二つの鏡像変換の合成

双曲的直線  $E_1$  に関する鏡像を  $f_1$  , 双曲的直線  $E_2$  に関する鏡像を  $f_2$  とすると , (10.6.1)と同様にして  $f = f_2 \circ f_1$  が分類できます .

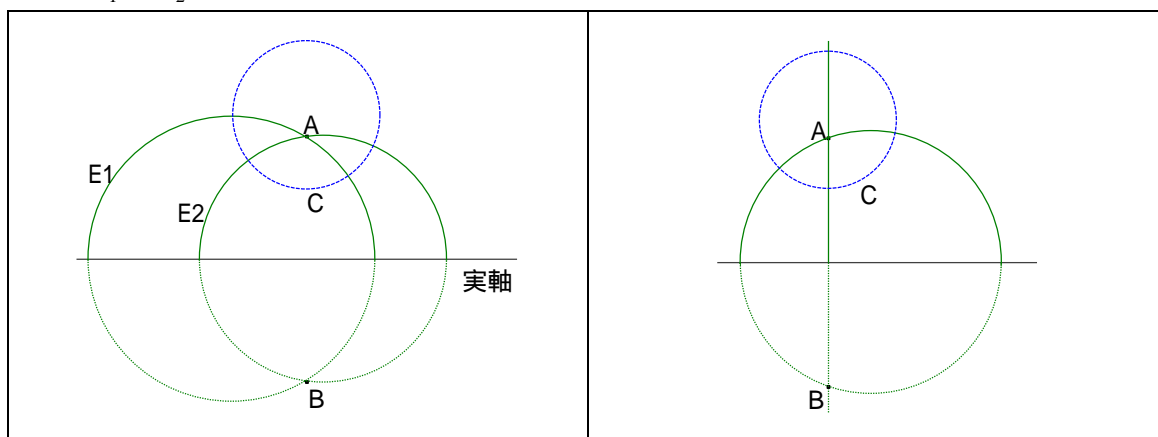
【注】  $E_1$  と  $E_2$  に直交する双曲的直線  $C_1, C_2$  を引き , 全体の図形を適当な変換で移します .

#### (ア) $E_1$ と $E_2$ が共有点を持たないとき



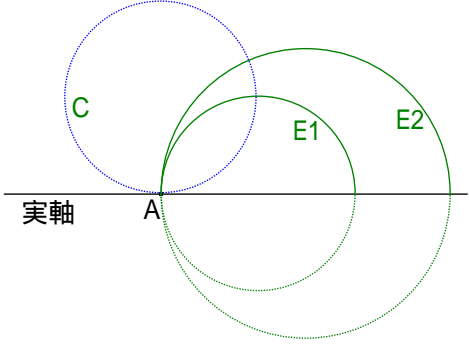
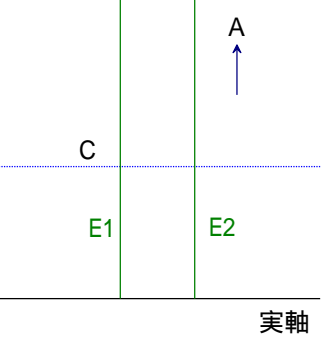
$E_1$  と  $E_2$  が同心円でない時は ,  $E_1$  と  $E_2$  に直交する円  $C$  が取れるので ,  $C$  と実軸の交点を  $A, B$  とします .  $E_1$  と  $E_2$  が同心円の時は ,  $E_1$  と  $E_2$  に直交する直線  $C$  が取れるので ,  $C$  と実軸の交点を  $A$  , 虚軸上方にある無限遠点を  $B$  とします . するといずれの場合も ,  $A, B$  を固定点とする **双曲型** の一次分数変換となります .  $f$  の不動曲線は , 「双曲的直線 ( $C \perp$  実軸のとき) または 等距離線 ( $C \perp$  実軸のとき) 」です .

#### (イ) $E_1$ と $E_2$ が交点 $A, B$ を持つとき



$A, B$  を固定点とする **楕円型** の一次分数変換となります . (但し固定点の一つは  $H^+$  外です.)  $f$  の不動曲線は ,  $E_1$  と  $E_2$  に直交する円で , 「 $A$  を中心とする双曲的円」です .

(ウ)  $E_1$  と  $E_2$  が無限遠点  $A$  を共有するとき ( $E_1 // E_2$  のとき)

 <p>Diagram showing two circles <math>E_1</math> and <math>E_2</math> touching at point <math>A</math> on the real axis. A third circle <math>C</math> is shown intersecting them.</p>	 <p>Diagram showing two vertical lines <math>E_1</math> and <math>E_2</math> parallel to each other, intersecting a horizontal line <math>C</math>. A point <math>A</math> is marked above the right line with an upward arrow.</p>
<p><math>E_1</math> と <math>E_2</math> が実軸上の点 <math>A</math> で接するとき</p>	<p><math>E_1</math> と <math>E_2</math> が実軸と垂直な直線するとき</p>

$A$  を固定点とする **放物型** の一次分数変換となります。  $f$  の不動曲線  $C$  は、  $E_1$  と  $E_2$  に直交する円 ( $A$  が実軸上の点のとき) または 実軸に平行な直線 ( $A$  が虚軸上方の無限遠点のとき) となり「  $E_1, E_2$  を軸とする **極限円** 」です。

(一次分数変換の スマートな説明は、例えば「双曲幾何学への招待」をご覧ください。)