

### 3. ポアンカレ円盤上の 1 次分数変換

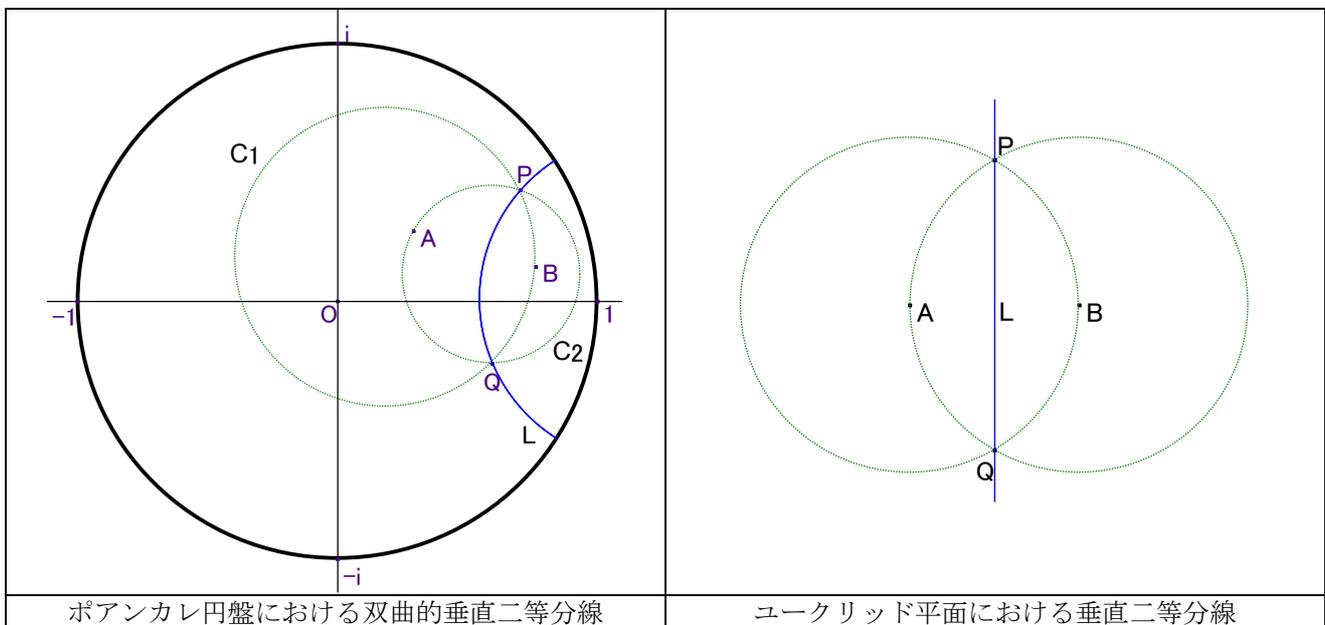
この節以降では、単に 双曲的直線, 双曲的円などといえば、全て ポアンカレ円盤上の基本図形とします。また、点 A と点 B のポアンカレ円盤上での双曲的距離を、 $[A,B]$  と表します。

#### 3-1. 双曲的垂直二等分線

「ユークリッドの原論」において「円→双曲的円」, 「直線→双曲的直線」の置き換えを行うだけで、双曲的垂直二等分線, 双曲的内心, 双曲的外心などを「機械的に」(ユークリッド平面の場合と全く同様に) 作図できます。ここでは、**双曲的垂直二等分線** を調べます。

##### 3-1-1. 双曲的垂直二等分線の作図

点 A を中心とし点 B を通る双曲的円  $C_1$  と、点 B を通り点 A を通る双曲的円  $C_2$  の二つの交点 P, Q を通る双曲的直線 L を引けば、L は 2 点 A, B の**双曲的垂直二等分線** となります。ユークリッド平面の場合と全く同様に作図できます。



#### Cabri II による検証

A, B, K を Drag してください。(K はつまんで Drag して下さい)

[perp\\_bisector.html](http://perp_bisector.html)

### 3-1-2. 原点 O と点 A の垂直二等分線に関する鏡像

以下、この後の節で使う「原点 O と点 A の双曲的垂直二等分線」(下図の青色) の式を調べます。

K をポアンカレ円盤, A を通り OA に垂直な直線と K の交点の 1 つを C, この点 C において K と直交する円を L, L の中心を D, L と線分 OD の交点を E とします. このとき  $\triangle CAD \sim \triangle OCD$  より,

$$AD : CD = CD : OD \iff AD \times OD = CD^2$$

よって、「点 O と点 A は、円 L に関し互いに鏡像」です。

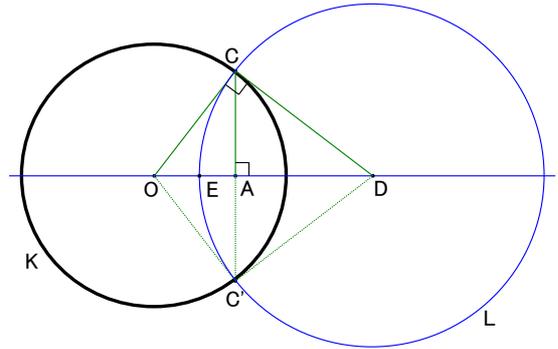
点 E の L に関する鏡像は E だから、双曲的線分 AE の L に関する鏡像は線分 EO に、また双曲的角 CEO の L に関する鏡像は  $\angle CED$  となります. 故に、

$$[O, E] = [E, A] \text{ かつ } \angle CEO = 90^\circ$$

即ち、

**L は O と A の双曲的垂直二等分線**

となります。



ところが、同様に  $\triangle OAC \sim \triangle OCD$  から、**点 A と点 D は、円 K に関し互いに鏡像** となります。

以上から、K がポアンカレ円盤, O と A( $\alpha$ ) の双曲的 2 等分線を L, その半径を R とすると、

$$\boxed{L \text{ の中心は } D\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right), \quad R^2 = OD^2 - OC^2 = \frac{1}{|\bar{\alpha}|^2} - 1 \quad \dots \textcircled{1}}$$

よって、L に関する鏡像を g とすると、

$$g(z) - \frac{1}{\bar{\alpha}} = \frac{R^2}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}}$$

$$\therefore g(z) = \frac{\frac{1}{|\alpha|^2} - 1}{\bar{z} - \frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\bar{\alpha}} = \frac{1 - \alpha\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}(\alpha\bar{z} - 1)} + \frac{\alpha\bar{z} - 1}{\bar{\alpha}(\alpha\bar{z} - 1)} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{\bar{z} - \alpha}{\alpha\bar{z} - 1} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{\overline{\alpha - z}}{1 - \alpha\bar{z}}$$

即ち、O と A( $\alpha$ ) の双曲的垂直二等分線 L に関する鏡像を g とすると、

$$\boxed{g(z) = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{\overline{\alpha - z}}{1 - \alpha\bar{z}} \quad \dots \textcircled{2}}$$

**【注】** いま L を「原点 O を通らない任意の双曲的直線」とする時、O の L に関する鏡像を A とすると、L は線分 OA の双曲的垂直二等分線になっています。即ち、 $\alpha$  を適当に取ることにより、 $\textcircled{1}$  は O を通らない任意の双曲的直線を表わすことができます。

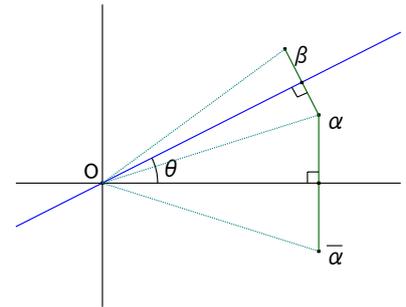
### 3-1-3. 原点 $O$ を通る直線に関する鏡像

複素数平面で 原点を通り, 実軸から  $\theta$  回転した直線を  $l$ ,  $l$  に関する  $\alpha$  の鏡像を  $\beta$  とします.

このとき,  $\bar{\alpha}$  と  $\beta$  のなす角は  $2\theta$  となるので,

$$\beta = (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \bar{\alpha} = e^{2i\theta} \bar{\alpha}$$

となります.



すなわち,

$$\boxed{\alpha \text{ と } \beta \text{ が } y = (\tan \theta)x \text{ について線対称} \iff \beta = e^{2i\theta} \bar{\alpha} \iff \alpha = e^{2i\theta} \bar{\beta} \dots \textcircled{3}}$$

## 3-2. 1次分数変換

### 3-2-1. 一次分数変換の式

ポアンカレ円盤での「向きを変えない合同変換  $T$ 」は、 $H^+$ での「向きを変えない合同変換  $\bar{T}$ 」に対応します。即ち、ポアンカレ円盤上の点  $\omega$  を、Möbius-Cailey 変換  $f$  の逆変換:

$$f^{-1}: z = \frac{i(1+\omega)}{1-\omega}$$

によって  $H^+$ 上の点  $z$  に移し、それを  $H^+$ 上の一次分数変換:

$$\bar{T}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

( $a, b, c, d$  は実数,  $ad - bc > 0$ )

で変換し、さらにそれを  $f$  によってポアンカレ円盤上の点  $T(\omega)$  に戻す変換が  $T$  です。

実際に計算して、

$$T(\omega) = f \circ \bar{T} \circ f^{-1}(\omega) = \frac{(-a-d-bi+ci)\omega + (-a+d+bi+ci)}{(-a+d-bi-ci)\omega + (-a-d+bi-ci)}$$

ここで、 $p = -a-d-bi+ci$ ,  $q = -a+d+bi+ci$  とおくと、 $p, q$  は複素数で

$$T(\omega) = \frac{p\omega + q}{\bar{q}\omega + \bar{p}} \quad \text{但し、} |p|^2 - |q|^2 = 2(ad - bc) > 0 \quad \dots(*)$$

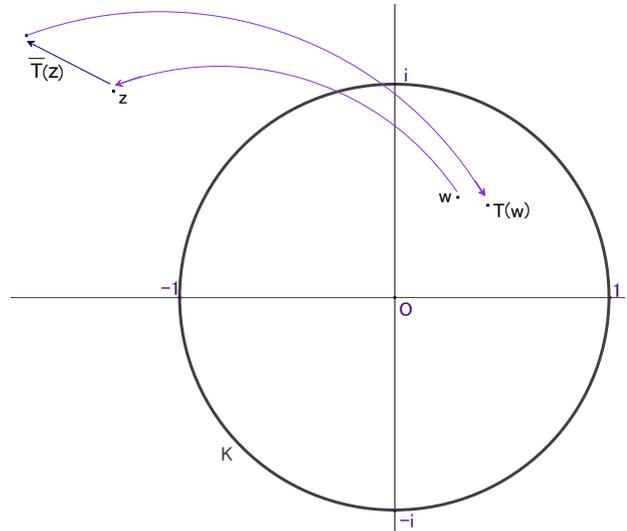
分母・分子を  $\bar{p}$  で割り、 $\frac{q}{p} = -\alpha$ ,  $\frac{p}{\bar{p}} = -(\cos\theta + i\sin\theta) = -e^{i\theta}$  とおくと、 $|\alpha| < 1$ ,  $\theta$  は実数となり、

$$T(\omega) = \frac{\frac{p}{\bar{p}}\omega + \frac{p \cdot q}{\bar{p} p}}{\frac{\bar{q}}{\bar{p}}\omega + 1} = \frac{p}{\bar{p}} \cdot \frac{\omega + \frac{q}{p}}{\left(\frac{\bar{q}}{p}\right)\omega + 1} = e^{i\theta} \cdot \frac{\alpha - \omega}{1 - \bar{\alpha}\omega} \quad (|\alpha| < 1, \theta \in \mathbb{R}) \dots(**)$$

即ち、ポアンカレ円盤内の任意の点を改めて「 $z$ 」と表すと、円盤内の一次分数変換は、

$$\boxed{\begin{cases} T(z) = \frac{pz+q}{\bar{q}z+\bar{p}} \quad (|p| > |q|) & \dots(*) \\ T(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z} \quad (|\alpha| < 1, \theta \in \mathbb{R}) & \dots(**) \end{cases}}$$

(\*)と(\*\*)の同値な2つの形で表せる事がわかりました。(「鏡像原理」を用いてもできます。)



### 3-2-2. 一次分数変換の分解

3-2-1. の一次分数変換:

$$T(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (|\alpha| < 1, \theta \in \mathfrak{R}) \quad \dots(**)$$

の図形的な意味を考えます.  $O$  と  $A(\alpha)$  の双曲的垂直二等分線  $L$  に関する鏡像を  $g$  とすると, ②より,

$$g(z) = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} = e^{2i\phi} \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (\text{但し } \phi = \arg \alpha)$$

一方, 実軸正方向からの回転角が  $\arg \alpha + \frac{\theta}{2} = \phi + \frac{\theta}{2}$  である原点を通る直線  $M$  に関する対称移動を  $h$  とすると ③より,

$$h(z) = e^{2i\left(\phi + \frac{\theta}{2}\right)} \cdot \bar{z} = e^{i(2\phi + \theta)} \cdot \bar{z}$$

さらに  $g$  と  $h$  を合成すると,

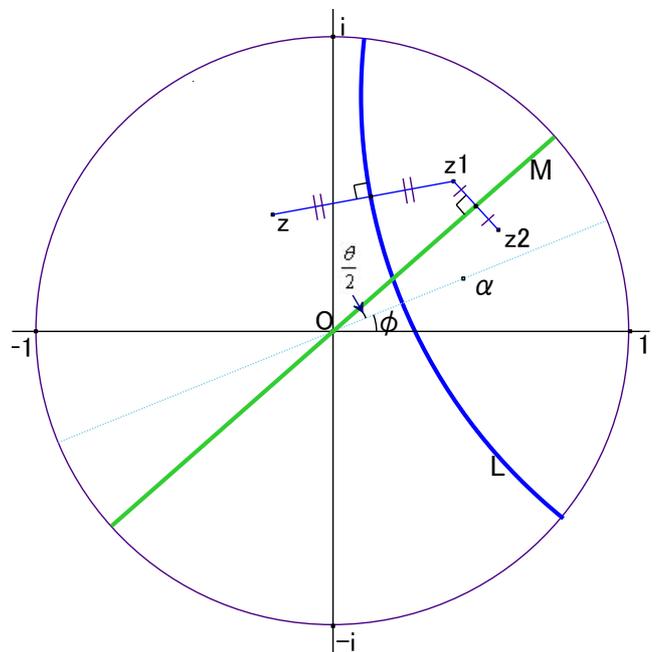
$$h \circ g(z) = e^{i(2\phi + \theta)} \cdot \overline{g(z)} = e^{i(2\phi + \theta)} \cdot \overline{e^{2i\phi} \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}} = e^{i(2\phi + \theta)} \cdot e^{-2i\phi} \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} = e^{i\theta} \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} = T(z)$$

故に「 $h \circ g = T$ 」となります! 即ち,

「 $f: z \rightarrow e^{i\theta} \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$ 」は,  
 「 $O$  と  $\alpha$  の双曲的 2 等分線  $L$  に関する鏡像」と,  
 直線  $O\alpha$  を, 原点の周りに  $\frac{\theta}{2}$  回転した直線  
 $M$  に関する鏡像」の合成です.

【注】右図では,

$$z \xrightarrow[\text{鏡像}]{L \text{ に関する}} z_1 \xrightarrow[\text{鏡像}]{M \text{ に関する}} z_2$$



### Cabri II による検証

$\alpha, M, z$ , 単位円を Drag してください. (単位円はつまんで Drag して下さい).  $\omega = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$  です.

$\angle \omega O z_2 = \theta$  となることを確認してください.

[2symmetrics.html](http://2symmetrics.html)

### 3-2-3. 分解できる理由

なぜ L (原点を通らない円) に関する鏡像と M(原点を通る線分) に関する鏡像の合成に分解できるのでしょうか？

ポアンカレ上半平面  $H^+$  上の「点  $i$  を通る直線」は

**Mebius-Cailey 変換:**

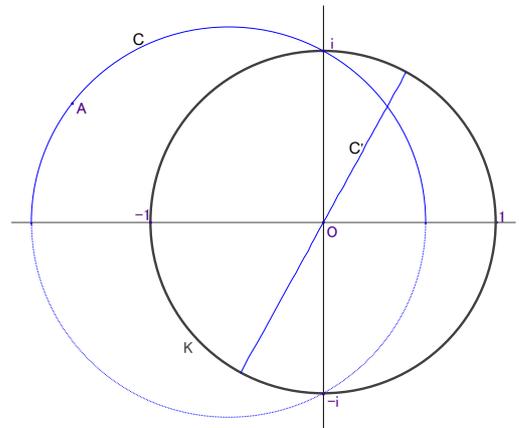
$$f: z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

により, ポアンカレ円盤上の「原点を通る直線」に移ります.

( $\because f(i) = 0, f(-i) = \infty$ )

**Cabri II による検証**

[line through O.html](#)



一方,  $H^+$  での「向きを変えない双曲的合同変換=一次分数変換(合同変換の分子)」は, 「双曲的直線  $l, m$  に関する鏡像 (合同変換の原子) を合成した変換」です. そして  $m$  を「点  $i$  を通る直線」に固定しても,  $l$  を適当にとると,  $l, m$  に関する鏡像の合成は, 任意の一次分数変換を表せます. したがって,  $l, m$  の **Mebius-Cailey 変換** による像を L, M とすると, ポアンカレ円盤上の一次分数変換は, L に関する鏡像と M に関する鏡像の合成に分解できます.

このとき, 2 つの円の位置関係 (2 点で交わる, 接する, 離れる) は, **Mebius-Cailey 変換** によって変わらないので,  $H^+$  上と同様 ポアンカレ円盤上でも,

$$\begin{cases} l, m \text{ が点 } A \text{ で交わる} \iff l, m \text{ の合成は } A \text{ を回転の中心とする楕円の移動} \\ l, m \text{ が交点を持たない} \iff l, m \text{ の合成は双曲的移動} \\ l, m \text{ が双曲的平行} \iff l, m \text{ の合成は放物的移動} \end{cases}$$

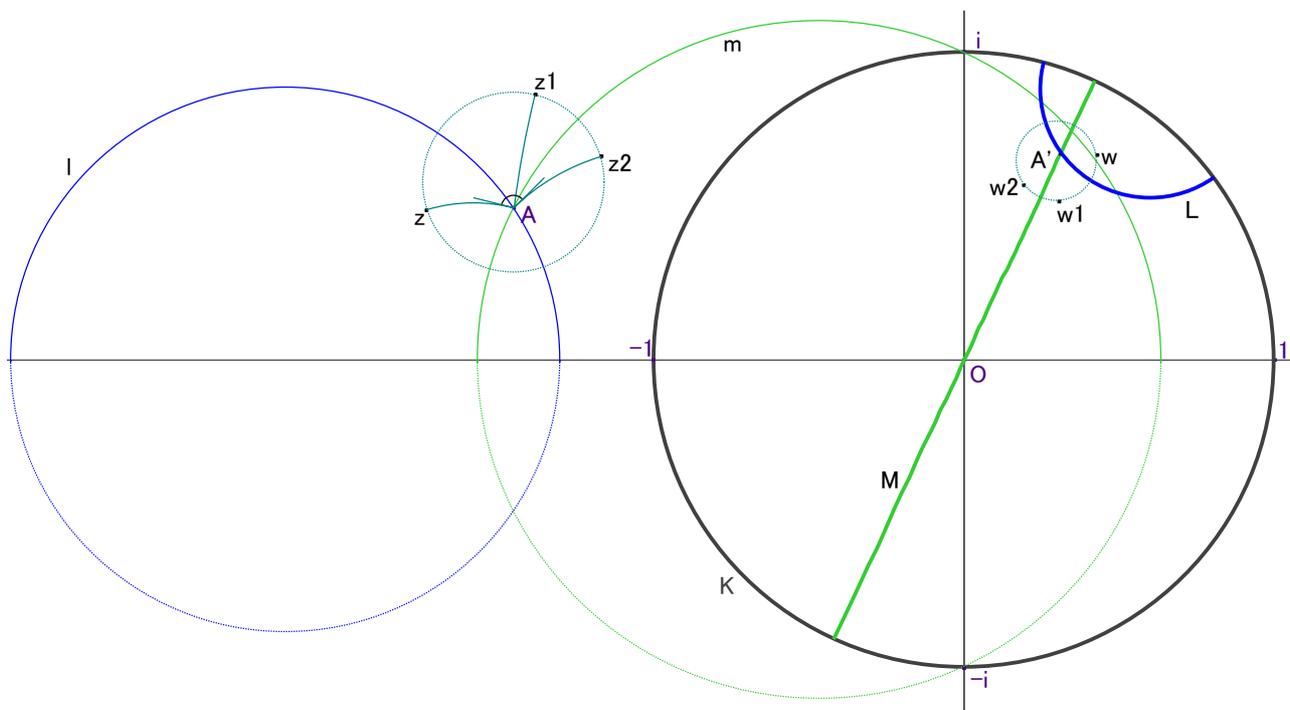
が成り立ちます.

以下の例 1~3 で，細線の円弧は  $H^+$  上の，太線の円弧と線分は，ポアンカレ円盤上の双曲的直線です．  
 青い細線を  $l$ ，緑の細線を  $m$ ，青い太線を  $L$ ，緑の太線を  $M$  とします． $z \xrightarrow[l \text{ に関する鏡像}]{\text{鏡像}} z_1 \xrightarrow[m \text{ に関する鏡像}]{\text{鏡像}} z_2$  は， $H^+$  上の点列です．点  $z, z_k, l, m$  の **Möbius-Cailey 変換** による像を  $\omega, \omega_k, L, M$  とすると，鏡像原理より， $\omega \xrightarrow[L \text{ に関する鏡像}]{\text{鏡像}} \omega_1 \xrightarrow[M \text{ に関する鏡像}]{\text{鏡像}} \omega_2$  です．また，点  $A'$  のように「'」をつけた点は， $H^+$  上の点  $A$  を **Möbius-Cailey 変換** で，ポアンカレ円盤上に移した点とします．

### 例 1. 楕円的移動 (双曲的回転移動)

$H^+$  上の「点  $A$  が中心の  $2\theta$  の双曲的回転」は「 $A$  で  $\theta$  の角で交わる 2 本の双曲的直線  $l, m$  に関する鏡像の合成」なので， $m$  として，点  $i$  と点  $A$  を通る双曲的直線を取れます．

$l$  を適当にとると  $l$  と  $m$  が  $\theta$  の角度で交わるようにできて， $l$  と  $m$  の合成は「 $A$  を中心とする  $2\theta$  の回転」となります．また  $L$  と  $M$  は点  $A'$  で  $\theta$  の角で交わり，かつ  $M$  は線分です．



### Cabri II による検証

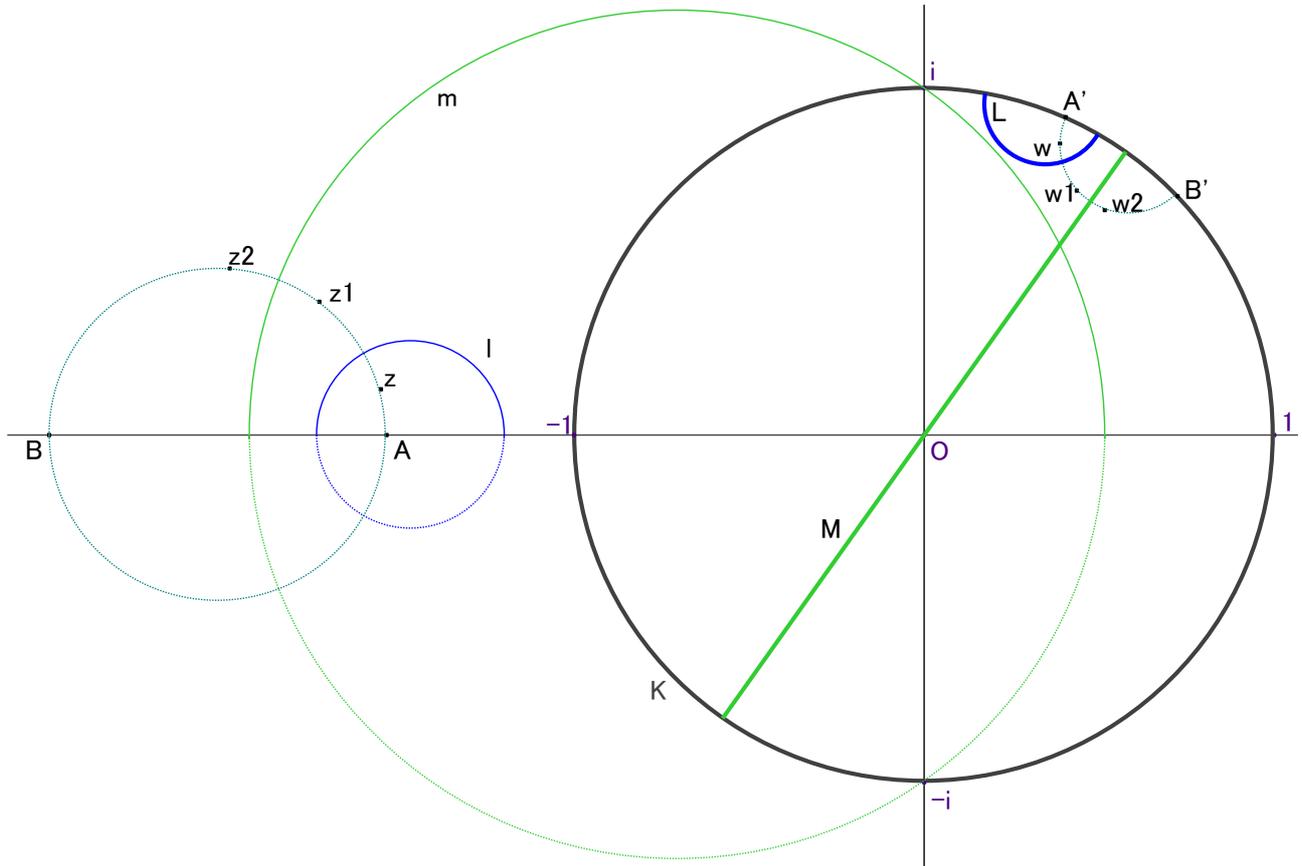
A, B, C, z, 単位 1 を drag してください．

[rotation.html](http://rotation.html)

## 例 2. 双曲的移动

$H^+$ 上の「点 A と点 B を固定点とする双曲的移动」は「A, B からの距離の比が一定なアポロニウスの円  $l, m$  に関する鏡像の合成」で表せます. このような アポロニウスの円のうち, 点  $i$  を通る円を  $m$  と取ります.

この時,  $l$  を適当にとると,  $l$  と  $m$  の合成は, 点 A, B を固定点とする任意の双曲的一次変換を表します.  $M$  は線分となり,  $L$  と  $M$  は交わりません.



**【注】**  $l$  上に点 P を,  $m$  上に点 Q をとり,  $\frac{AP}{BP}=R_1$ ,  $\frac{AQ}{BQ}=R_2$  とすると,  $z$  と  $z_2$  の双曲的距離は  $[z, z_2] = \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 2\log\left|\frac{R_1}{R_2}\right|$  となります. よって  $l$  を適当に変えると  $R_1$  が変わり,  $[z, z_2]$  が任意の値を取れます. すなわち,  $l$  を適当に変えるだけで, A, B を固定点とする任意の 双曲的一次変換が作れます.

## Cabri II による検証

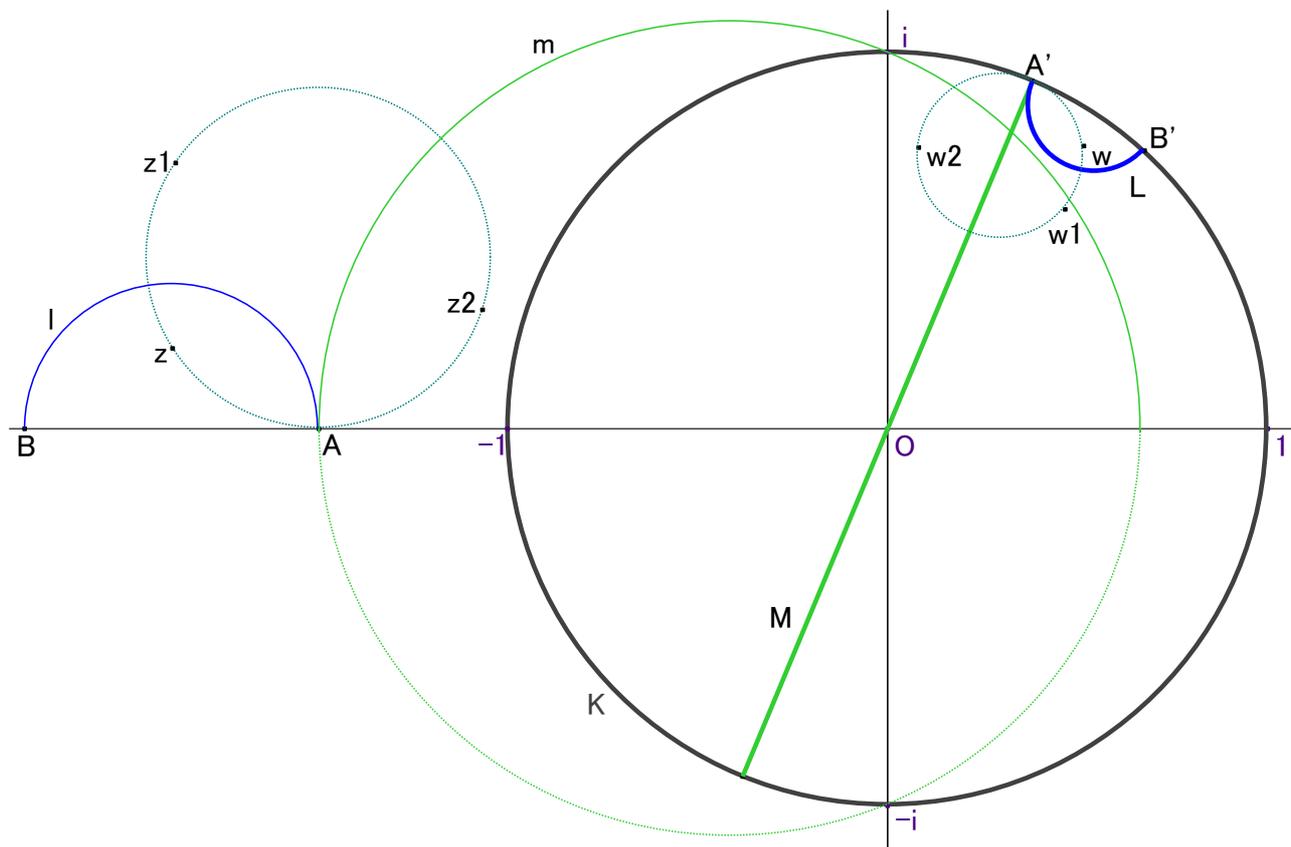
A, B, C, z, 単位 1 を drag してください.

[hyperbolic.html](http://hyperbolic.html)

### 例 3. 放物的移動

$H^+$ 上の「点  $A$  で実軸と接する極限円に沿った放物的移動」は「点  $A$  で接する 2 円  $l, m$  に関する鏡像の合成」です.  $m$  として, 点  $A$  と点  $i$  を通る双曲的直線を取ります.

この時  $l$  を適当に取れば,  $l$  と  $m$  の合成は, 点  $A$  で接する極限円に沿った任意の放物的移動を表します.  $M$  は原点を通る線分で,  $L$  と  $M$  は点  $A'$  で接します.



### Cabri II による検証

A, B, C, z, 単位 1 を drag してください.

[parabola.html](http://parabola.html)