

4. 「射影クライソモデル」の距離と角度

「[クライソモデル第8節](#)」より、射影クライソモデルの長さや角度は、次の通りです。

4-1. 双曲的距離

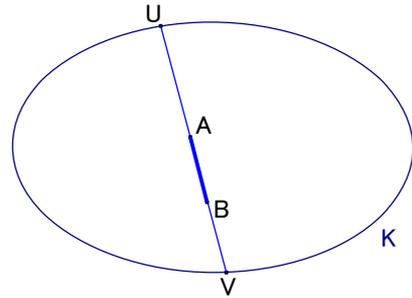
直線 UV 上の 2 点 A, B の双曲的距離は、

$$[A, B] = \frac{1}{2} \left| \log([A, B|U, V]) \right| \quad \dots (*)$$

但し $[A, B|U, V]$ は 4 点の複比で

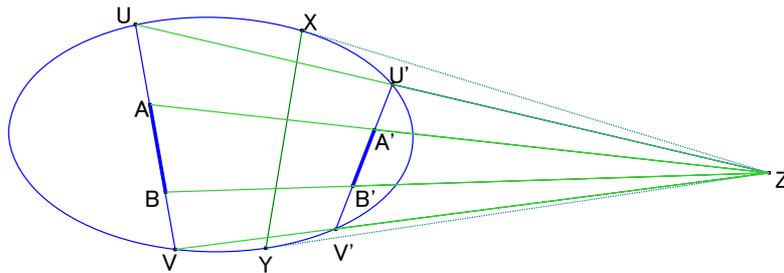
$$[A, B|U, V] = \frac{AU \times BV}{AV \times BU}$$

(AU などはユークリッド的距離) です。



「クライソモデル第8節」では、単位円の半径の長さを基準にして、AU などの距離を測りましたが、複比は「比」なので、「基準の長さ」を変えてもその値には影響がありません。故に、境界 K と K 内の線分 AB だけで A と B の距離が分かります。(他の図は不要。)

そして、下図のように 直線 XY に関して鏡像をとっても $[A, B]$ は変わりません。



Cabri による検証

Drag X, Y, U, V, A, B

[distance.html](#)

4-2. 双曲的角度

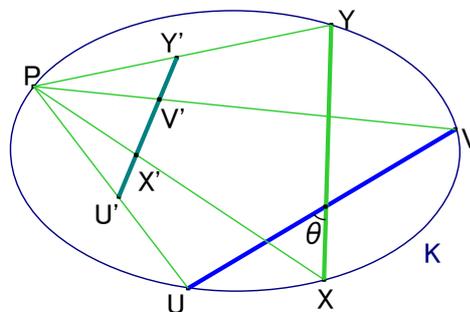
2直線 XY と UV のなす双曲的角度を θ とすると,

$$\left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^2 = [PX, PY | PU, PV] \dots (**)$$

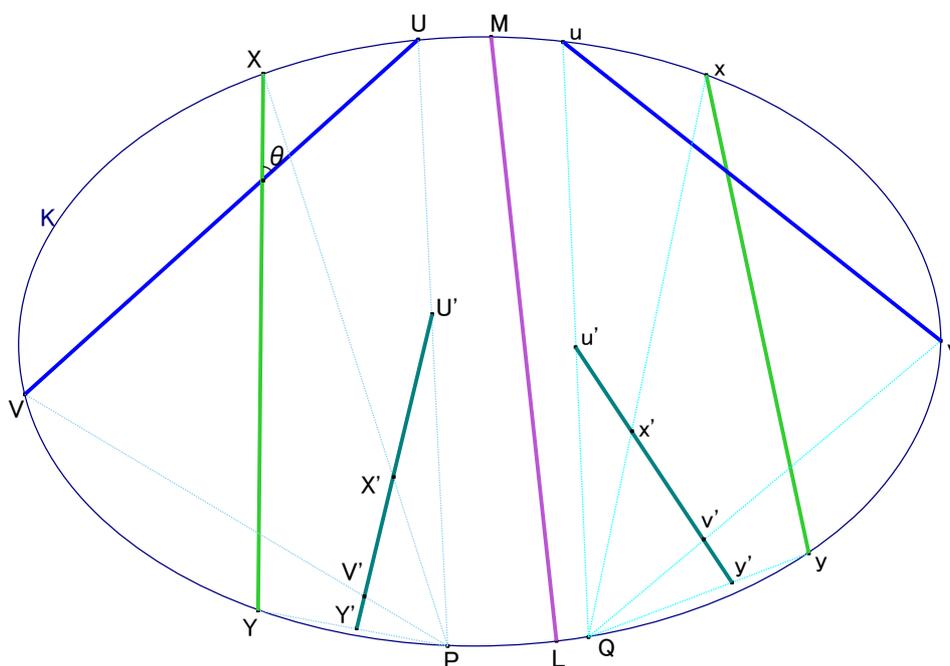
$$\Leftrightarrow \theta = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{[PX, PY | PU, PV]} \right)$$

但し $[PX, PY | PU, PV]$ は 4 直線の複比で, 4 直線と交わる直線との交点を X', Y', U', V' とすると,

$$[PX, PY | PU, PV] = [X', Y' | U', V'] = \frac{X'U' \times Y'V'}{X'V' \times Y'U'}$$



「長さ」と同様, 境界 K と直線 XY と UV だけで双曲的角度が分かります. (他の図は不要.)
 また, 下図のように 直線 LM に関して鏡像をとっても 角度は変わりません. («大文字」 X, Y, U, V の 直線 LM に関する鏡像を, それぞれ「小文字」 x, y, u, v で表しています. このとき, 直線 UV と XY のなす双曲的角と, uv と xy のなす双曲的角は同じです.



Cabri による検証

Drag $X, Y, U, V, M, L, P, Q, U', Y', u', y'$. 「見易さ」のため線分を使用したのて, 大きく動かすと複比が存在しなくなります. angle.html