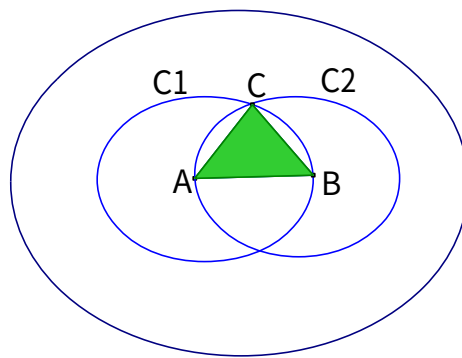


3. 他の幾何図形の作図

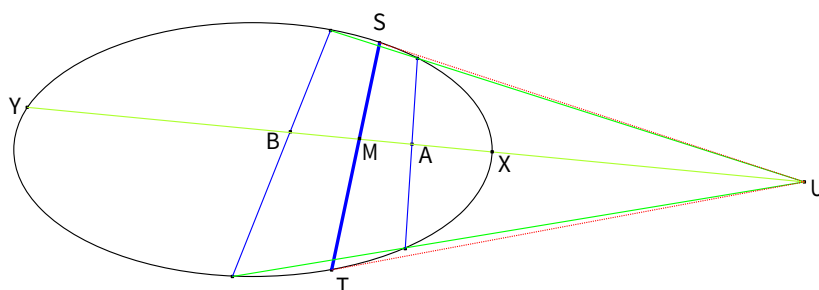
「ユークリッドの原論」に従えば、直線が作図できれば、正三角形や垂直二等分線などは簡単に作図できはずです。しかし一般に 双曲的円は 2 次曲線となるので、2 つの双曲的円の交点を求める事は 2 つの 2 次曲線の交点を求める事となり、**Cabri II** では難しいです。

例えば「A,B を頂点に持つ正三角形」は、下図の「双曲的円 C_1 と C_2 の交点」を求めれば良いですが、そのまま実行すると「二つの楕円の交点を求める（すなわち 4 次方程式を解く）」ことになり、計算が大変です。しかし「AB の双曲的垂直二等分線と C_1 の交点」と見れば、「直線と楕円の交点」となり計算が非常に簡単になります。よって、まず、双曲的中点と垂直二等分線の作図を考えます。



正三角形の作図

3-1. 双曲的中点の作図



上の図で、点 A の直線 ST に関する鏡像が点 B です.(2-1) よって直線 AB と ST の交点を M とすると、M は線分 AB の双曲的中点となり、ST は AB の双曲的垂直二等分線です。

M と A が与えられた時 B を作図するのは簡単ですが、逆に A と B から M を作図するのは、大変です。(私には大変でした。) そこで双曲的距離の公式(4-1)を使いました。

直線 AB と無限遠境界 K の交点を X,Y とすると、2 点 A,B の間の双曲的距離[A,B]は、

$$[A,B] = [A,B|X,Y] = \frac{AX \cdot BY}{AY \cdot BX}$$

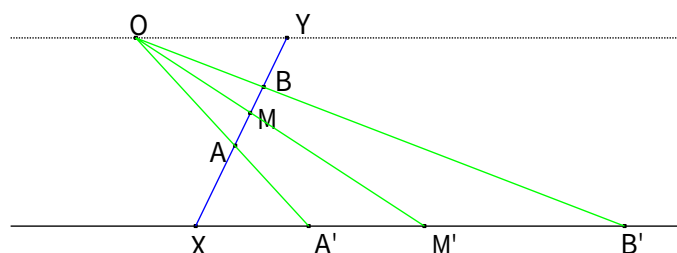
M が AB の中点の時、定義より[A,M]=[M,B]だから

$$[A,M] = [M,B] \iff [A,M|X,Y] = [M,B|X,Y] \iff \frac{AX \cdot MY}{AY \cdot MX} = \frac{MX \cdot BY}{MY \cdot BX} \dots \textcircled{1}$$

ここで直線 XY 外に点 O を取り、O から直線 OY と平行で点 X を通る直線上に A,B,M を射影した点を A',B',M' とします。この射影により X は動かず、Y は無限遠点に移ります。

「複比は射影により保存される」ので、①より、

$$\frac{A'X}{M'X} = \frac{M'X}{B'X} \iff A'X \cdot B'X = M'X^2 \dots \textcircled{2}$$



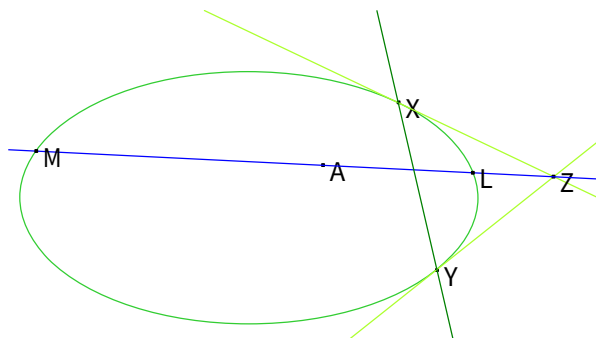
即ち、 $\overline{M'X}$ は $\overline{A'X}$ と $\overline{B'X}$ の相乗平均となるので、②をみたす M' は簡単に作図できます。この M' を O から線分 XY 上に射影すれば、点 M が作図できます。

Cabri による検証

Drag A,B

midpoint_draw.html

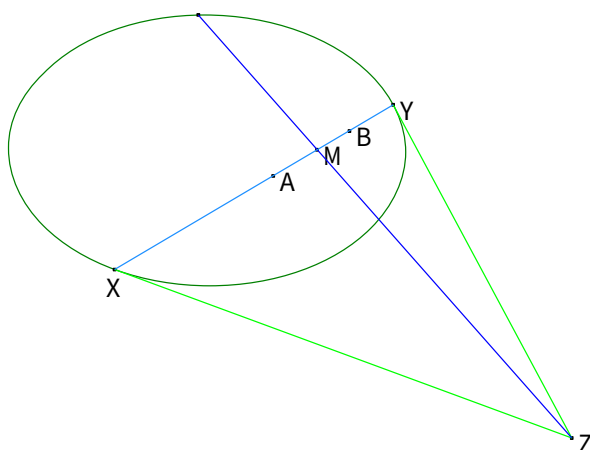
3-2. 点 A を通り直線 XY と双曲的垂直な直線の作図



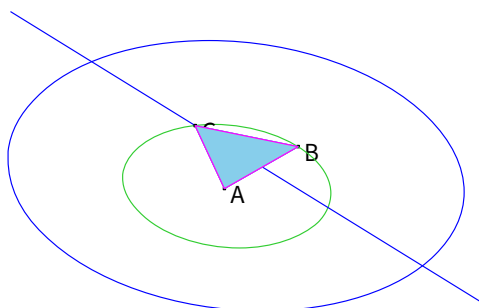
X,Y を無限遠境界 K 上の点とします. X,Y に於いて 2 本の接線を引き, その交点を Z とします. 「2-5 【注】」より AZ は, A を通り直線 XY と垂直な直線となります.

3-3. 線分 AB の垂直二等分線の作図

まず AB の中点 M を 3-1 を使って作図し，次に M を通り AB に垂直な直線を引きます．すると，MZ は AB の双曲的垂直二等分線です．（下図）



3-4. 双曲的正三角形の作図

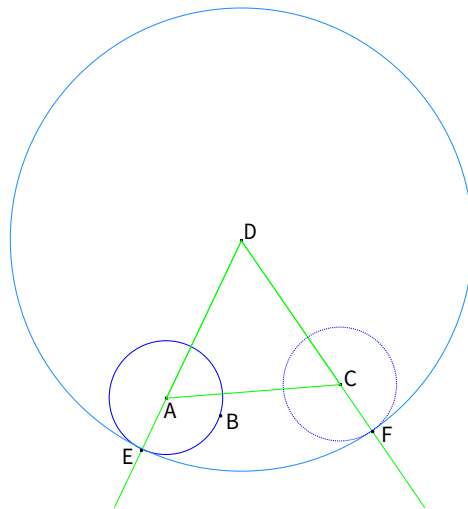


A が中心で点 B を通る双曲的円を描きます。これと AB の双曲的垂直 2 等分線の交点を C とすると、三角形 ABC は双曲的正三角形です。

3-5. 双曲的コンパスの作図

双曲的正三角形ができれば、後は「ユークリッドの原論」と同様にすれば、双曲的コンパスの作図ができます。下図は、ユークリッドの原論による「点 C を中心とし、半径が AB の円の描き方」です。作図は D,E,F の順に行います。すなわち、

- ① A を中心とし点 B を通る円 K を描く。
- ② 正三角形 ACD を作成。
- ③ 半直線 DA と K の交点 E をとり、D を中心とし E を通る円 L を描く。
- ④ 半直線 DC と L の交点 F をとる。C を中心とし F を通る円が求める円となる。

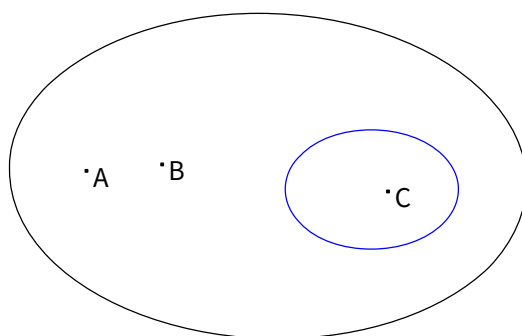


これにより、「A を中心とし点 B を通る円」を、平行移動した円(点線)が作成できました。また、円と直線の交点しか使わないので、射影クライнモデルの場合でも **軽い** です。

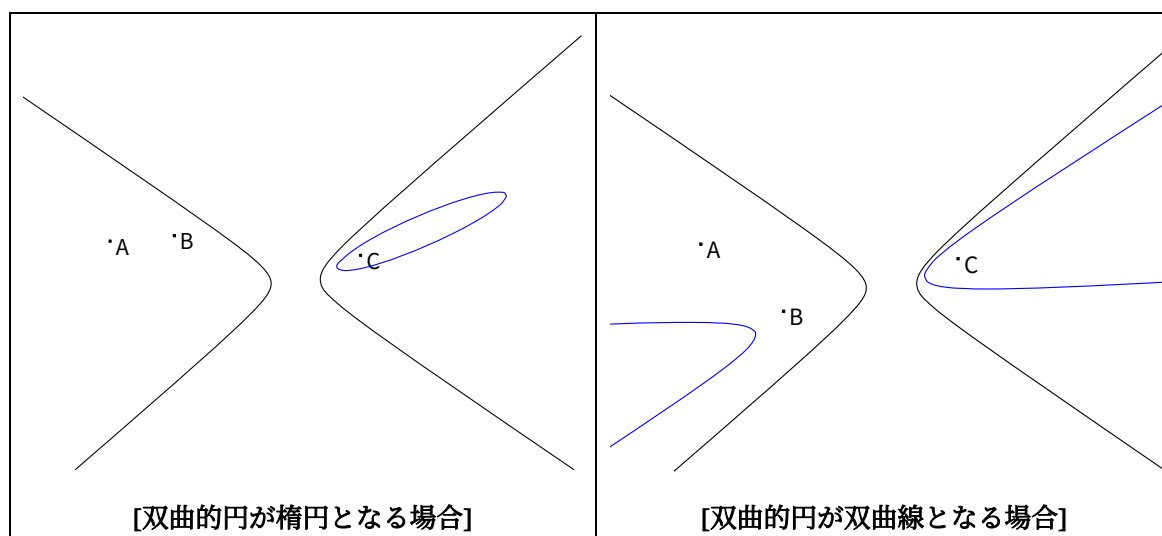
3-5-1. 双曲的コンパスの例

以下の例で黒色の2次曲線は無限遠境界 K で、青色の2次曲線が「 C を中心とし半径が $[A,B]$ の双曲的円」です。 ($[A,B]$ は 2 点 A と B の双曲的距離です.)

(ア) K が楕円の時は、双曲的円も楕円となります。



(イ) K が双曲線の時は、双曲的円は楕円となるとは限りません。 $[A,B]$ が比較的小さい時は楕円ですが、 $[A,B]$ が大きくなると 双曲線 となります。



Cabri による検証 (双曲的コンパス)

A, B, C さらに $P_1 \sim P_5$ を Drag して下さい。 $P_1 \sim P_5$ は境界 K を決めます。 compass.html

3-6. Cabri II のマクロ

「(射影)クラインモデル」の様々なマクロを、web に置いてあります。例えば「双曲的コンパス」, 「双曲的垂直二等分線」, 「双曲的円」 などです。作図方法も載っています。