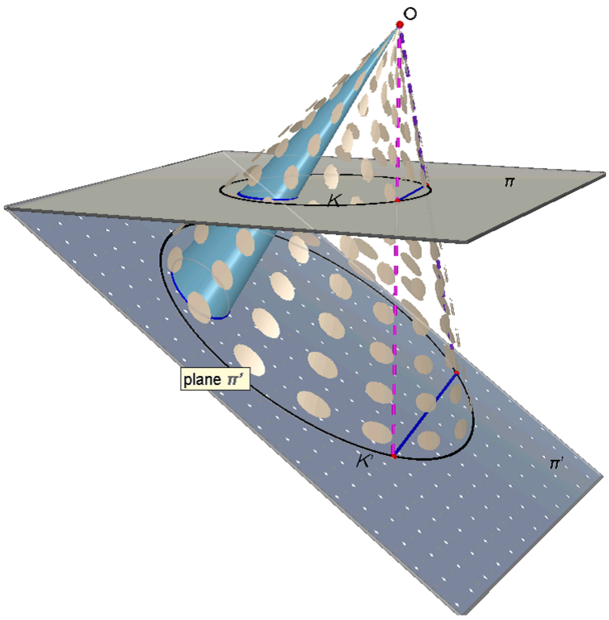
射影クラインモデル

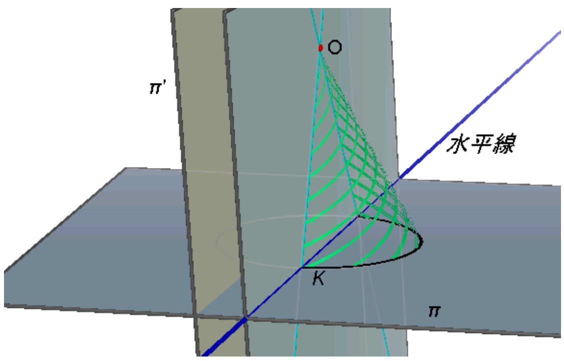
１．基本図形

π 上の「円Ｋ上のクラインモデル（以後「クラインモデル」と呼びます)」を，π 外の１点Ｏから，平面 π' に射影すると，「**境界Ｋ' 上の射影クラインモデル**」が出来ます．円錐の平面による切り口は，２次曲線（楕円，放物線，双曲線）となるので，無限遠境界Ｋの像Ｋ' も２次曲線（楕円，放物線，双曲線）です．（２次曲線のページ）

また，射影クラインモデルの**双曲的直線**，**双曲的円**などは，クラインモデルの対応する図形を射影した図形で，ユークリッド的には，線分，半直線，２次曲線など様々です．



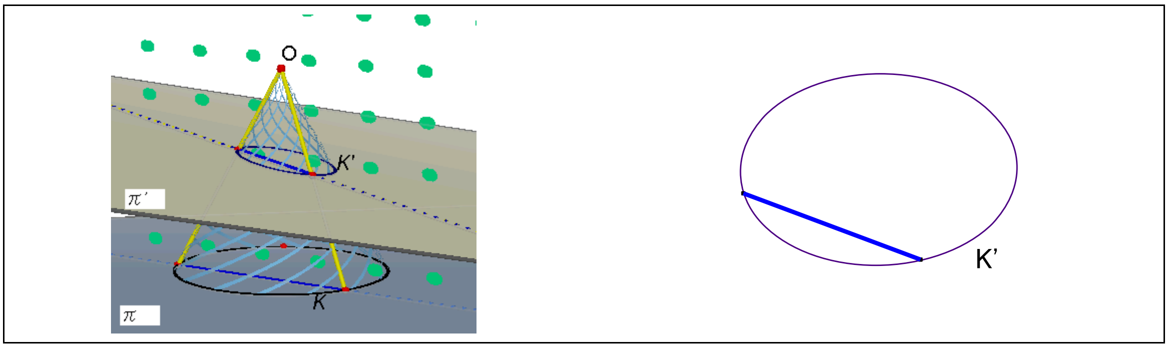
Ｋ内の点をＲとすると，ＯＲ // π のとき，Ｒの像Ｒ' は無限遠点に移ります．このような点Ｒの集まりは，Ｏを通り π' と平行な平面と平面 π の交線です．この交線を，π' の「**水平線**」と名付けます．Ｋ内の図形ＤのＫ' への射影Ｄ' は，Ｄが**水平線**とどのような共有点を持つかで　ほぼ決まります．



1-1.双曲的直線

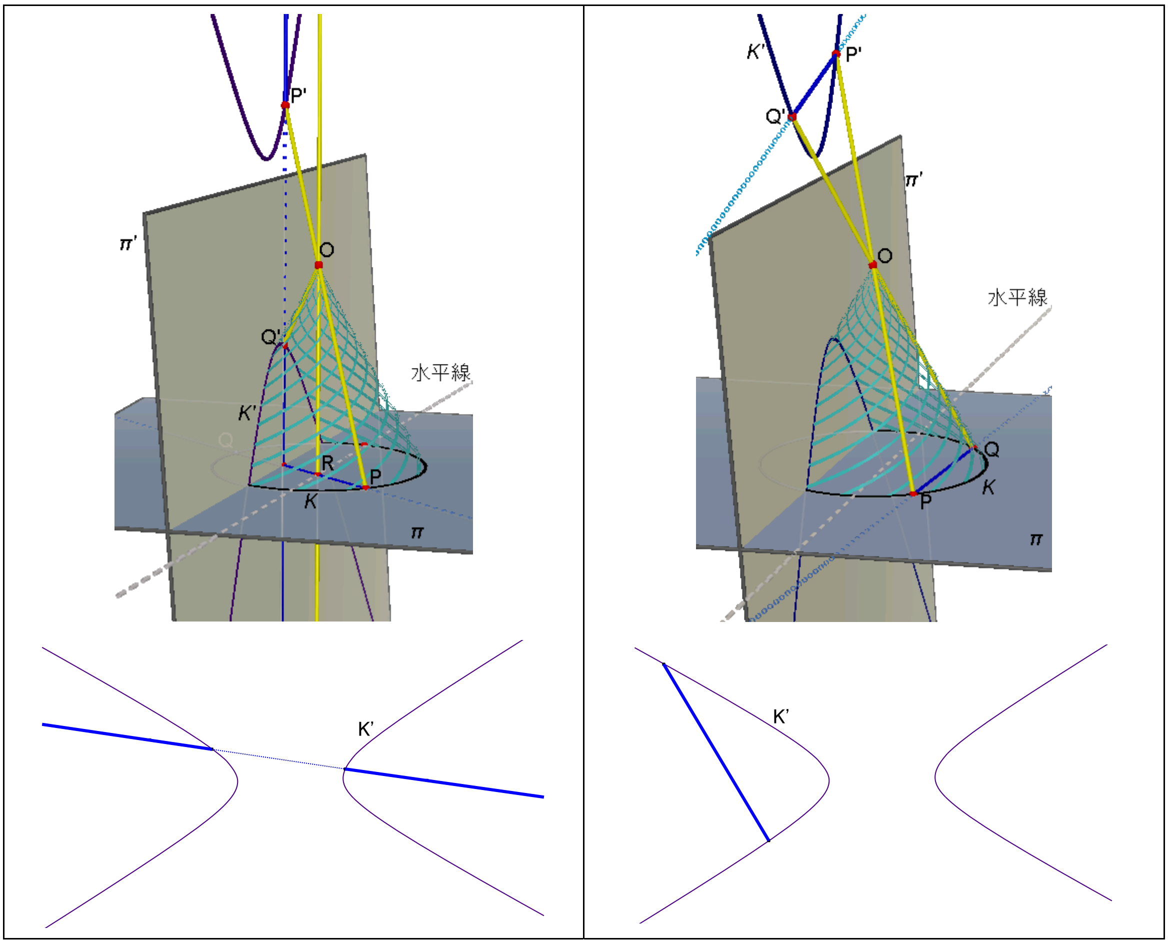
「**双曲的直線は，線分または半直線**」となります．

（ア） K' が楕円の時は，双曲的直線は「線分」になります．



Drag R (P,Q,A,B も可能) line_onto_ellipse.html

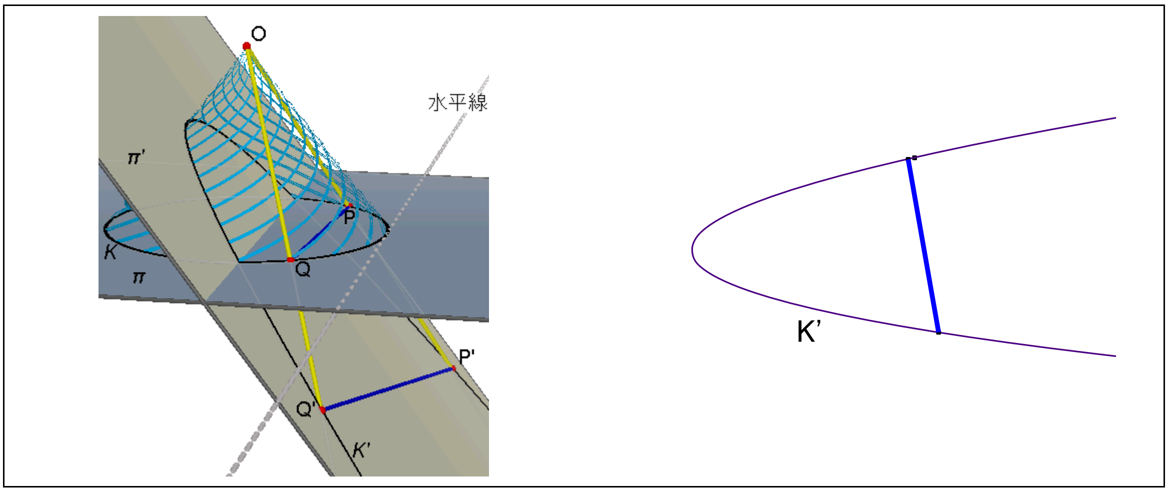
（イ） K' が双曲線の時は，双曲的直線は「線分または 2 本の半直線」になります．
K 内の直線が**水平線**と共有点を持つ時は，2 本の半直線になります．共有点を持たないときは，線分になります．（左下図で R は水平線上の点で，π' 上の無限遠点に移ります．）



Drag R (P,Q,A,B も可能) line_onto_hyperbolic1.html， line_onto_hyperbolic2.html

（ウ） K' が放物線の時は，双曲的直線は「線分または１本の半直線」になります.

K' が放物線の時は，K と**水平線**の交点は１点です．これを R とすると，PQ が R を含まない場合（ほとんど全ての場合）は，　直線 PQ の像は π' 上の線分となります.

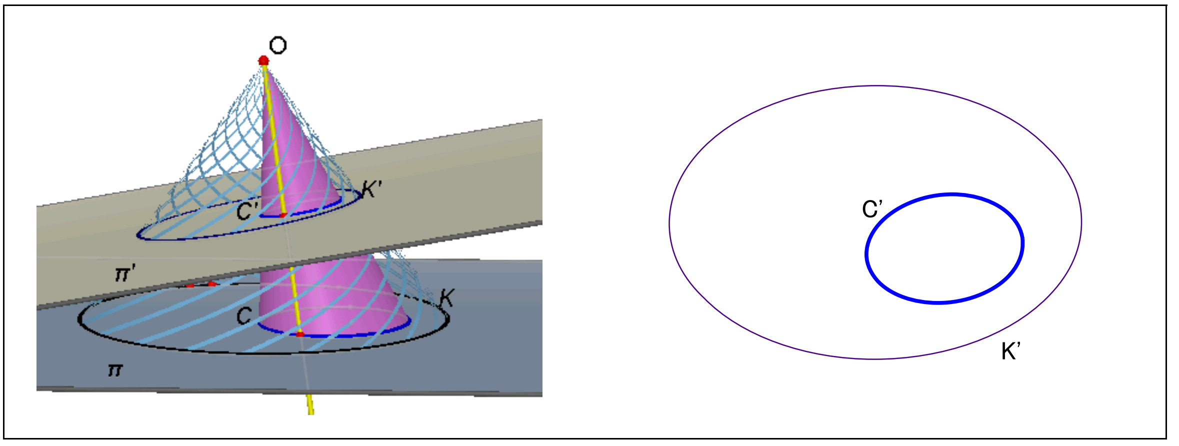


Drag　P,Q,R　　　　　　[line_onto_parabola.html]

1-2. 双曲的円

「射影クラインモデルの双曲的円は，２次曲線（楕円，放物線，双曲線)」となります.

(ア) K' が楕円の時は，双曲的円も楕円です.

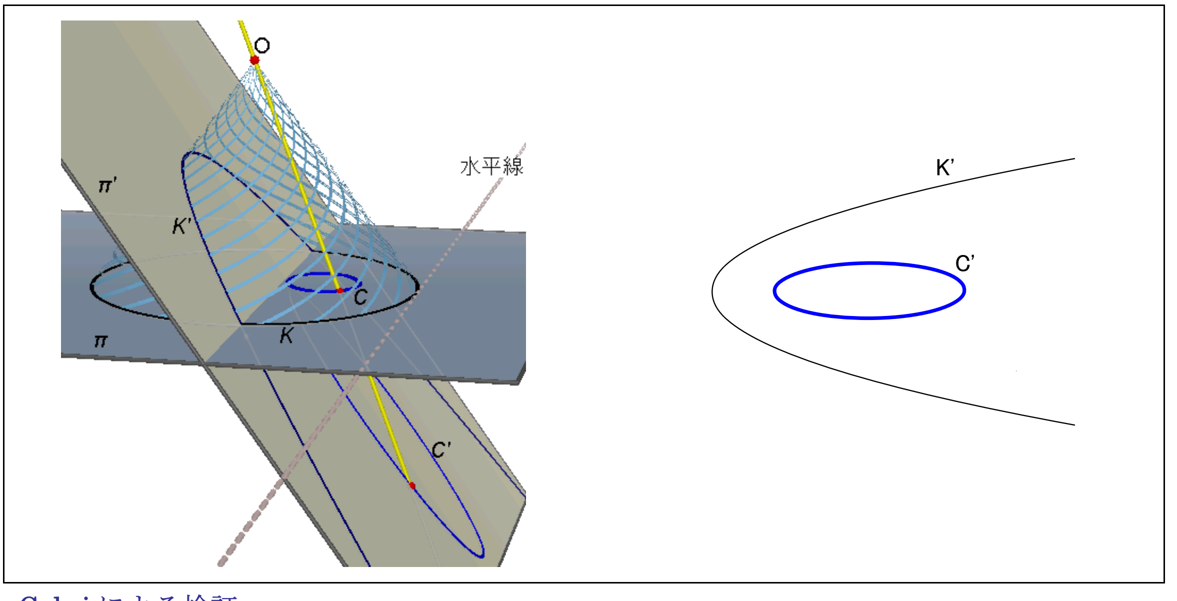


Cabri による検証

● Drag R (C の中心 A, 1 点 B も可能)　　circle_onto_ellipse.html

● 実は，K' の上だけで「鏡像変換」を利用して 双曲的円は作図できます (第 2 節)．K' 内の 3 点 P,Q,R を drag してください.　　circle_onto_ellipse(mirror).html

(イ) K' が放物線の時も, 円 C は, 地平線と共有点を持たないので, 双曲的円 C' は楕円です.



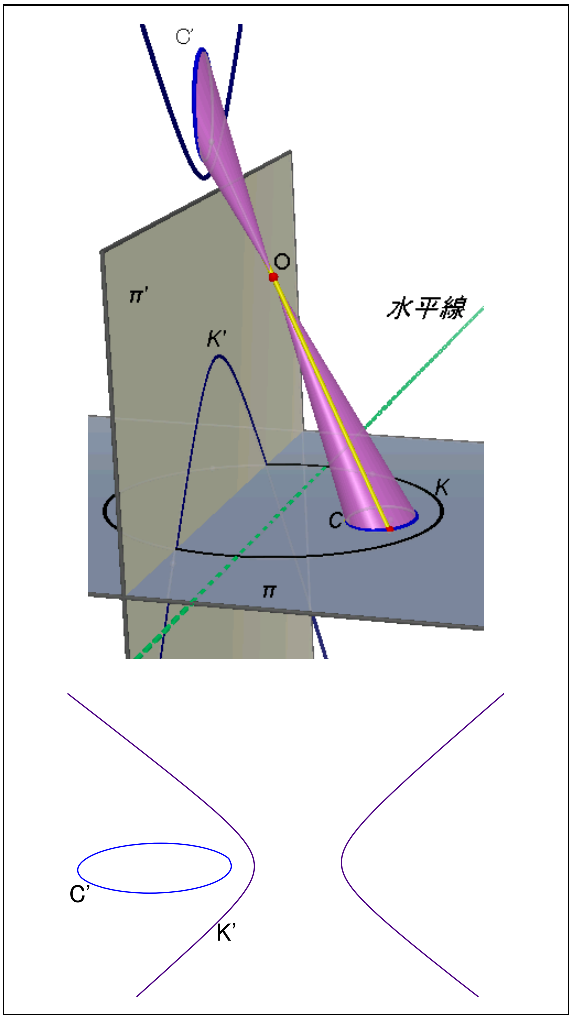
Cabri による検証

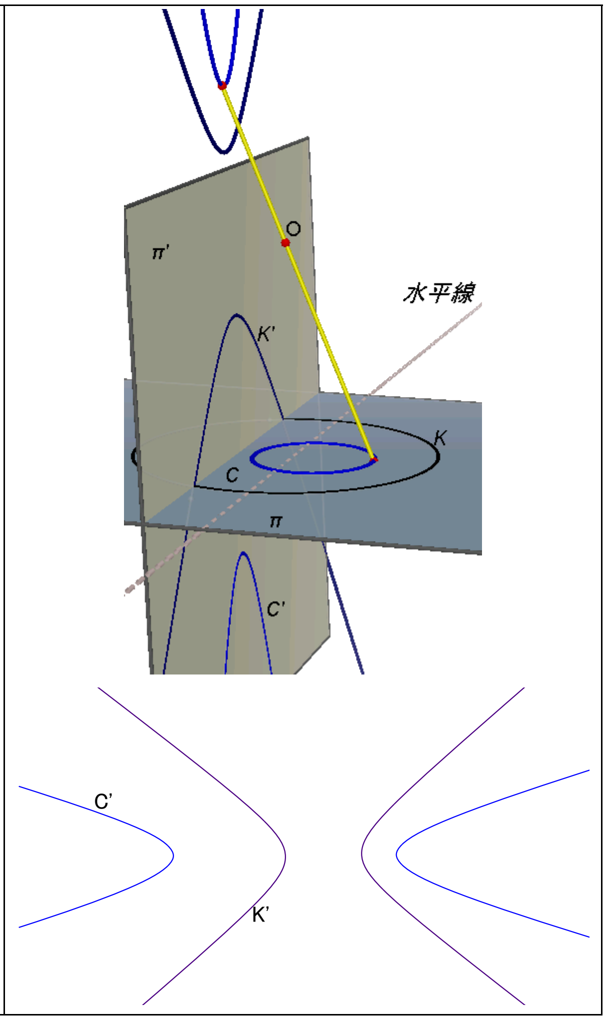
● Drag R (C の中心 A, 1 点 B も可能)　　circle_onto_parabola.html

● 実は，K' の上だけで「鏡像変換」を利用して 双曲的円は作図できます (第 2 節)．K' 内の 3 点 P,Q,R を drag してください.　　circle_onto_parabola(mirror).html

(ウ) K' が双曲線の時は，双曲的円は，2 次曲線（楕円，双曲線，放物線）となります．
K 内の双曲的円が水平線と共有点を持たない時（左下）は，楕円になります． 共有点を 2 個持つ時（右下図）は双曲線になります．また共有点を 1 個持つ時は放物線になります．

双曲的円 C' が双曲線になる時は， C' の枝は， K' の 2 本の枝の中に一本ずつ入ります．





Cabri による検証

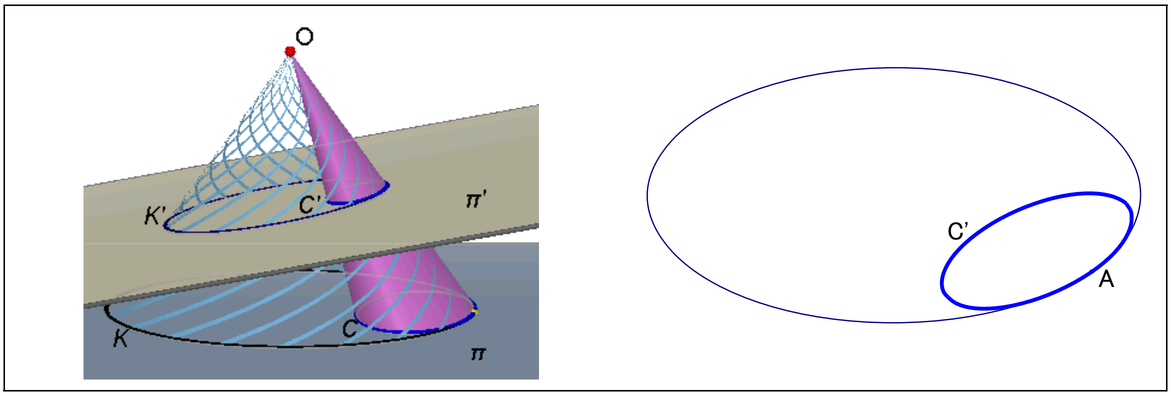
● Drag R (C の中心 A, 1 点 B も可能) [circle_onto_hyperbolic.html]

● 実は，K' の上だけで「鏡像変換」を利用して 双曲的円は作図できます (第 2 節)．K' 内の 3 点 P,Q,R を drag してください． [circle_onto_hyperbolic(mirror).html]

1-3. 極限円

円 K 内のクラインモデルの極限円は, K に接する楕円 C で, 楕円の射影は２次曲線だから,
「射影クラインモデルの極限円は, 境界 K' に接する２次曲線」です.

(ア) K' が楕円の時は, 極限円は「K' と一点で接する楕円」です.

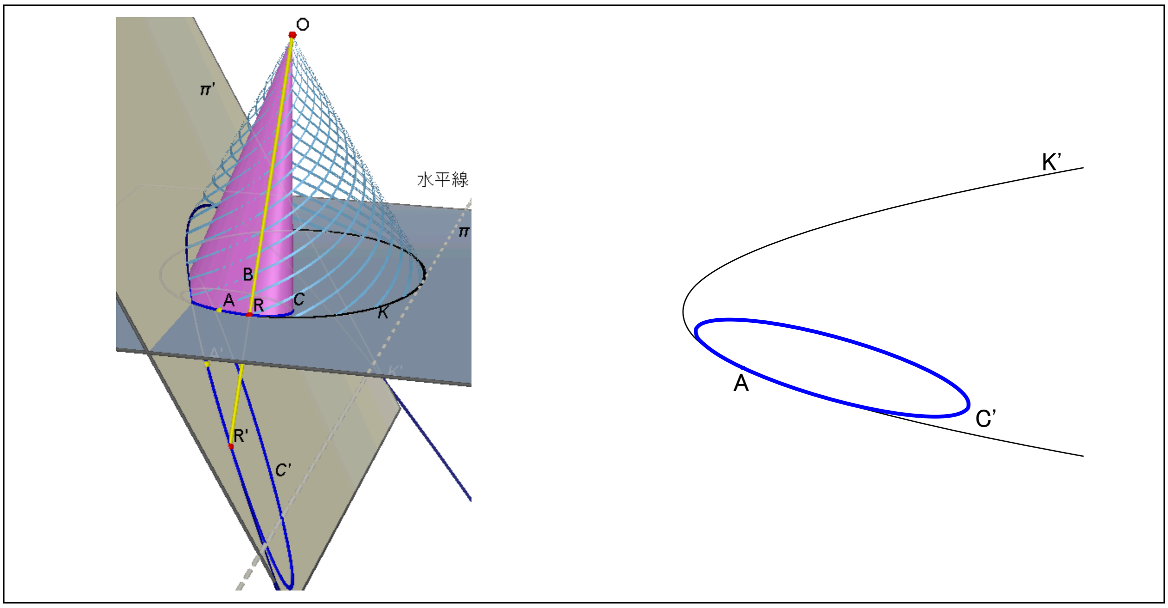


Cabri による検証

● Drag R , A, B　　　　horicircle_on_ellipse.html

● K' の上だけで「鏡像変換」を利用して 極限円は作図できます（第 2 節）. A,B を drag してください.　　　　horicircle_on_ellipse(by mirror).html

(イ) K' が放物線の時は, 極限円は「K' と一点で接する楕円, 放物線」になります. 但し放物線となるのは, π' の水平線と K と C が 1 点で接する場合で「例外中の例外」です.

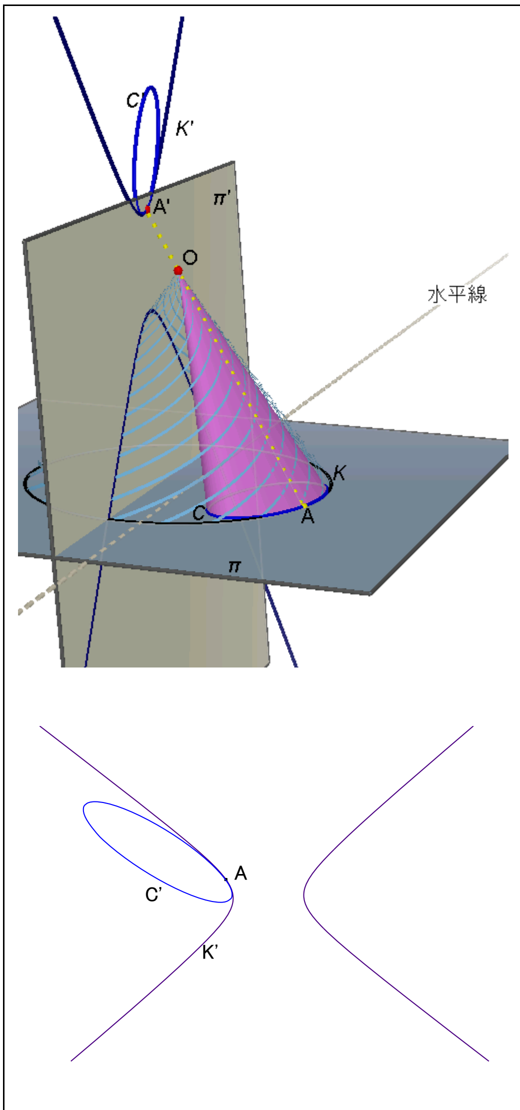


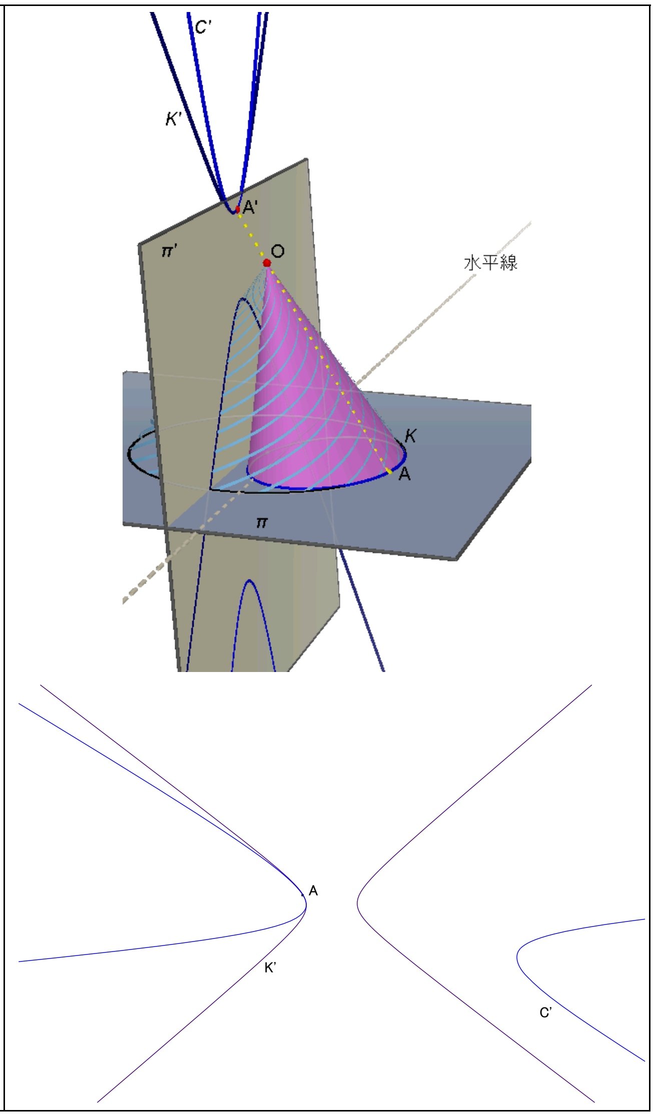
Cabri による検証

● Drag　R , A, B　　　　horicircle_on_parabola.html

● A,B を drag してください.　　　　horicircle_on_parabola(by mirror).html

（ウ）K' が双曲線の時は，極限円は「K' と一点で接する楕円，双曲線，放物線」になります．
K 内の極限円が水平線と共有点を持たない時（左下）は，楕円になります．　共有点を 2 個持つ時（右下図）は双曲線になります．また共有点を 1 個持つ時は放物線になります．





Cabri による検証

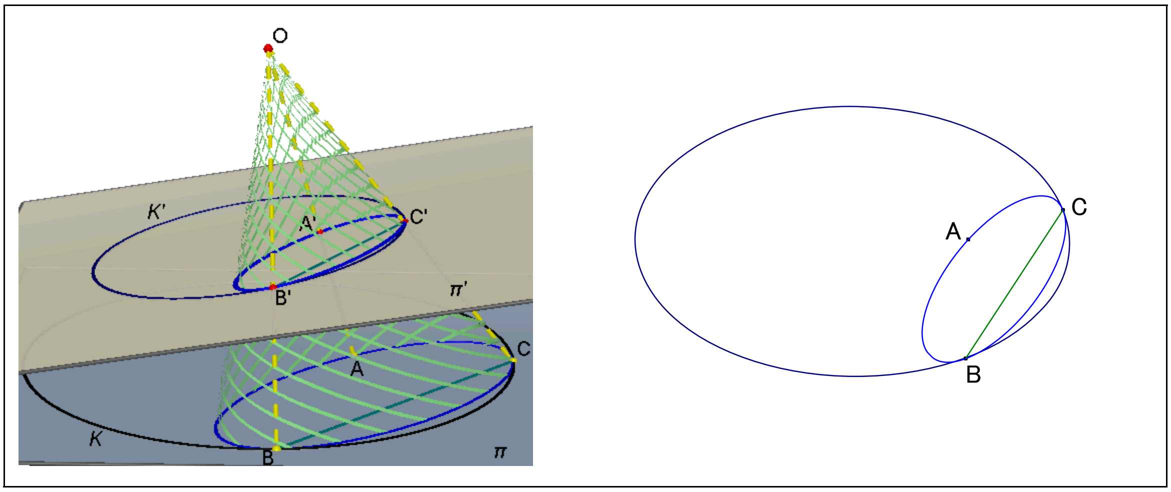
● Drag R , A, B　　horicircle_on_hyperbolic.html

● A,B を drag してください.　　horicircle_on_hyperbolic(by mirror).html

1-4. 等距離線

円 K 内のクラインモデルの等距離線は, K に 2 点 B,C で接する楕円の一部(弧 BC) なので,
「射影クラインモデルの等距離線は, 境界 K'に 2 点 B,C で接する 2 次曲線の弧 BC」です.

(ア) K' が楕円の時は, 点 A を通る直線 BC からの等距離線は楕円の一部 (弧 BAC) です.

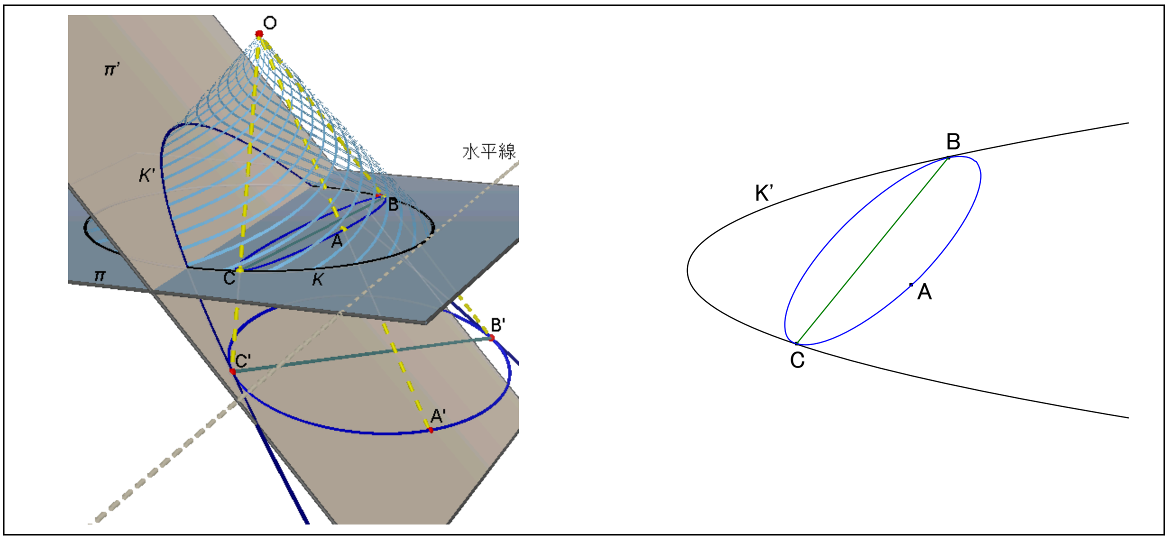


Cabri による検証

● Drag R , A, B, C equiline_onto_ellipse.html

● A,B,C を drag してください. equiline_on_ellipse(by mirror).html

(イ) K' が放物線の時も, 殆どの場合は, BC からの等距離線は楕円の一部 (弧 BAC) です.
B や C が水平線と K の接点の時に限り, 放物線になります.



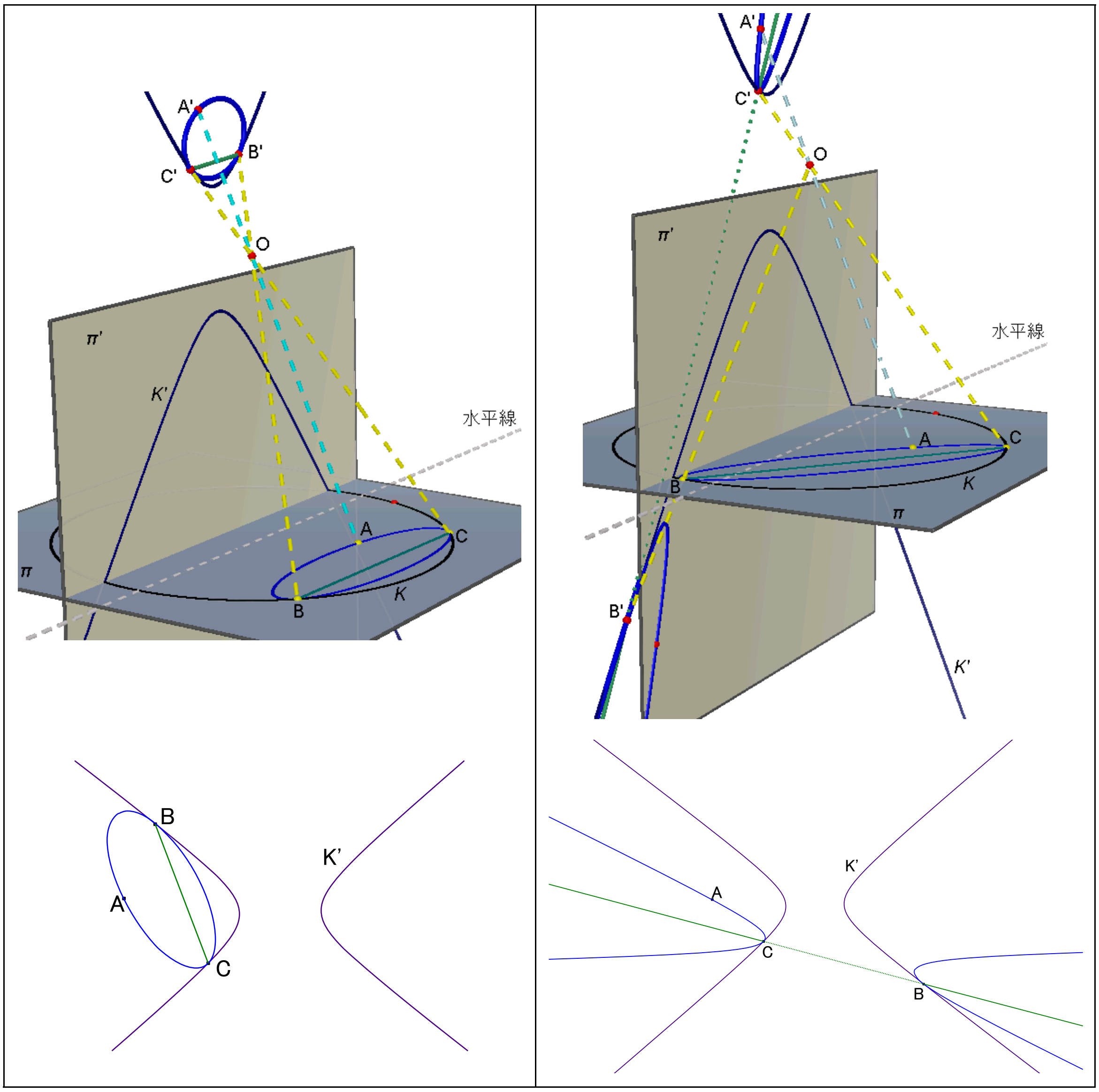
Cabri による検証

● Drag R , A, B, C equiline_onto_parabola.html

● A,B,C を drag してください. equiline_on_parabola(by mirror).html

（ウ）K' が双曲線の時，等距離線は「K' と二点で接する楕円，双曲線，放物線」の一部です．

K 内の極限円が水平線と共有点を持たない時（左下）は，楕円になります．　共有点を 2 個持つ時（右下図）は双曲線になります．また共有点を 1 個持つ時は放物線になります．



Cabri による検証

- Drag R , A, B, C　　[equiline_onto_hyperbolic.html]
- A,B,C を drag　してください．　　[equiline_on_hyperbolic(by mirror).html]

1-5. まとめ

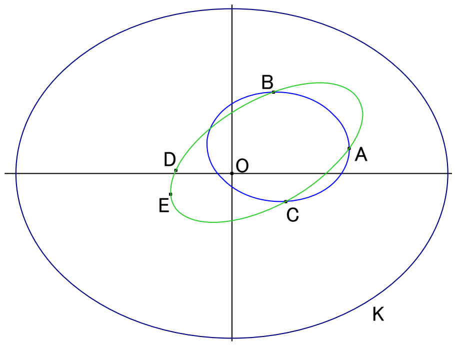
K 内の図形 D の K' への射影 D' は，2 次曲線(conic)となります．そして 2 次曲線の種類は，D が水平線とどのような共有点を持つかで決まります．すなわち，

K 内の図形 D が水平線と共有点を持たない時は，D' は楕円になります． 共有点を 2 個持つ時は双曲線になります．また共有点を 1 個持つ時は放物線になります．

したがって，放物線，楕円，双曲線などの区別はあまり意味がありません．K や K' との接点の方が大切です．（「接する」という性質は射影変換で保存されます.） 1-1〜1-4 より，

$$\begin{cases} \text{D'が双曲的円} & \rightarrow \text{D'とK'の共有点は 0 個} \\ \text{D'が極限円} & \rightarrow \text{D'とK'の接点は 1 個} \\ \text{D'が等距離線} & \rightarrow \text{D'とK'の接点は 2 個} \end{cases} \quad \cdots(*)$$

となっています．しかし逆は成り立つのでしょうか？



一般に **2 次曲線はその上の 5 点で決まります**．一方，**双曲的円は 3 点で決まる**ので，図の「A,B,C を通る双曲的円」は一つに決まりますが，「A,B,C を通る 2 次曲線」は無数にあります．(D,E も指定すると定まります)．ゆえに，

2 次曲線の内，クラインモデルの基本図形（双曲的円，極限円，等距離線，直線）となることのできるのは ごく一部です.

もしこのような 2 次曲線を母集合に取るなら，(*)の逆も成り立ちます.

Cabri による検証

● Drag A〜E, P,Q,R, U,V [basic_objects&conic.html]