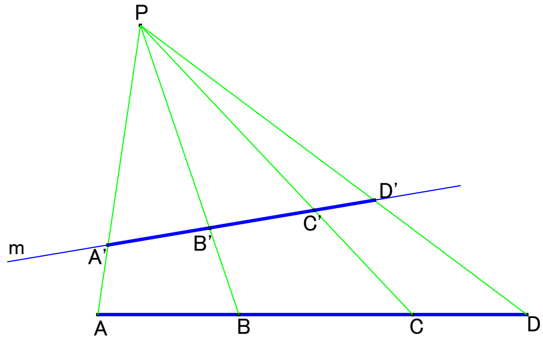
7. 様々な複比

空間内の 4 点の複比(第 4 節) 以外にも さまざまな複比があります． なお，この節では，直線，角，長さなどは 全てユークリッド的とします．この節は「幾何再入門」を参考にしました．

(ア). 同一直線上の 4 点の複比

同一直線上に 4 点 A,B,C,D（少なくとも 3 点以上は異なるとします）があるとき，A,B,C,D の複比を，4-1 と全く同様な式で定めます．すなわち，

$$[A,B|C,D]=\frac{\frac{AC}{AD}}{\frac{BC}{BD}}=\frac{AC\times BD}{AD\times BC}$$



この複比は「射影変換によって不変」です．

【証明】 直線 AB 上に無い点 P を取り，P から任意の直線 m の上への射影変換を f，f による点 A,B,C,D の像をそれぞれ A',B',C ',D'とすると，

$$\frac{A'C'}{A'D'}=\frac{\triangle A'PC'}{\triangle A'PD'}=\frac{PA'\times PC'\times\sin\angle A'PC'}{PA'\times PD'\times\sin\angle A'PD'}=\frac{PC'\times\sin\angle A'PC'}{PD'\times\sin\angle A'PD'}\qquad\cdots①$$

同様に，

$$\frac{B'C'}{B'D'}=\frac{\triangle B'PC'}{\triangle B'PD'}=\frac{PB'\times PC'\times\sin\angle B'PC'}{PB'\times PD'\times\sin\angle B'PD'}=\frac{PC'\times\sin\angle B'PC'}{PD'\times\sin\angle B'PD'}\qquad\cdots②$$

①,②より，

$$[A',B'|C',D']=\frac{\frac{A'C'}{A'D'}}{\frac{B'C'}{B'D'}}=\frac{\frac{PC'\times\sin\angle A'PC'}{PD'\times\sin\angle A'PD'}}{\frac{PC'\times\sin\angle B'PC'}{PD'\times\sin\angle B'PD'}}=\frac{\frac{\sin\angle A'PC'}{\sin\angle A'PD'}}{\frac{\sin\angle B'PC'}{\sin\angle B'PD'}}=\frac{\frac{\sin\angle APC}{\sin\angle APD}}{\frac{\sin\angle BPC}{\sin\angle BPD}}=[A,B|C,D]$$

Cabri による検証（同一直線上の 4 点の複比）

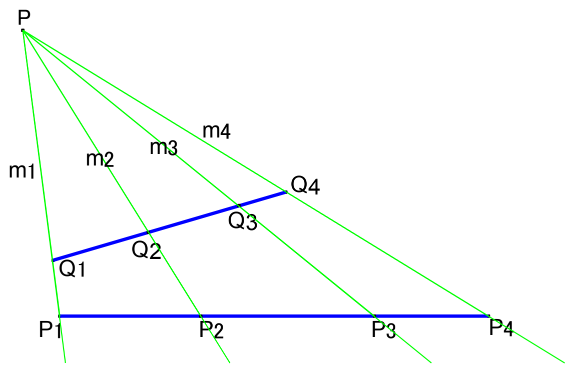
P,A',D'を Drag して下さい． [CrossRatio_on_line.html]

(イ).直線束の複比

一点 P を通る 4 本の直線 m_1,m_2,m_3,m_4 があり，直線 n とそれぞれ $\mathrm{P_1,P_2,P_3,P_4}$ で交わっているとします．この，P から出ている**直線束(pensil)**の複比を，

$$[m_1,m_2\,|\,m_3,m_4]\equiv[\mathrm{P_1,P_2|P_3,P_4}]=\frac{\overline{\mathrm{P_1P_4}}\times\overline{\mathrm{P_2P_3}}}{\overline{\mathrm{P_1P_3}}\times\overline{\mathrm{P_2P_4}}}$$

で定めます．(ア)より，**この値は n の取り方には拠りません**．図の $\mathrm{P_1,P_2,P_3,P_4}$ の代わりに，$\mathrm{Q_1,Q_2,Q_3,Q_4}$ 等 を取っても同じです．



Cabri による検証（直線束の複比）

点 $\mathrm{P_1,P_4}$ を drag すると直線 n が変わります． 直線 $\mathrm{PP_1,PP_2,PP_3,PP_4}$ は 直接つまんで drag してください． CrossRatio_on_pencil.html

以後，複比を次のように定めます．

<table>
<tr><td>A,B,C,D が「点」(一直線上でなくても良い）のとき，

$$[\mathrm{A,B|C,D}]=\frac{\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}}{\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}}=\frac{\mathrm{AC\times BD}}{\mathrm{AD\times BC}}$$</td></tr>
<tr><td>m_1,m_2,m_3,m_4 が，点 P から出ている「直線束(pencil)」のとき，

$$[m_1,m_2\,|\,m_3,m_4]\equiv[\mathrm{P_1,P_2|P_3,P_4}]=\frac{\overline{\mathrm{P_1P_4}}\times\overline{\mathrm{P_2P_3}}}{\overline{\mathrm{P_1P_3}}\times\overline{\mathrm{P_2P_4}}}$$

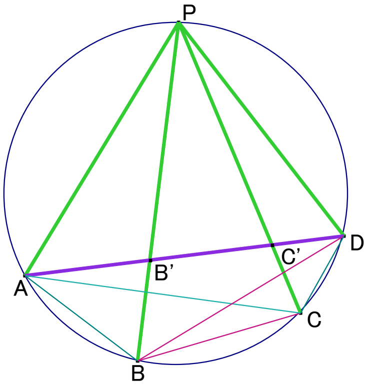
(但し $\mathrm{P_1,P_2,P_3,P_4}$ は，直線束と P を通らない任意の直線 n の交点)</td></tr>
</table>

「点の複比」の値は，「球や円に関する鏡像変換」によって変わりません．また 4 点が一直線上にあるときは，「射影変換」によっても変わりません．

(ウ). 同一円周上の 4 点の複比

A,B,C,D,P が同一円上にあるとき, 弦 AD と線分 PB, PC の交点をそれぞれ B',C' とすると,

$[A,B|C,D]=\dfrac{AC\times BD}{AD\times BC}$ と $[A,B'|C',D]=\dfrac{AC'\times B'D}{AD\times B'C'}$ は等しい.



すなわち，A,B,C,D,P が同一円上にある時,

$$[A,B,|C,D]=[PA,PB|PC,PD]\cdots①$$

左辺は「**4 点の複比**」で，右辺は「**直線束の複比**」です.

【証明】（ア）と同様に,

$$\begin{aligned}[A,B'|C',D] &= \frac{AC'\times B'D}{AD\times B'C'}\\ &= \frac{\triangle APC'\times\triangle B'PD}{\triangle APD\times\triangle B'PC'}\\ &= \frac{PA\cdot PC'\sin\angle APC'\times PB'\cdot PD\sin\angle B'PD}{PA\cdot PD\sin\angle APD\times PB'\cdot PC'\sin\angle B'PC'}\\ &= \frac{\sin\angle APC'\times\sin\angle B'PD}{\sin\angle APD\times\sin\angle B'PC'} \qquad\cdots①\end{aligned}$$

円の半径を R とします. △APC,△APD,△BPC,△BPD に「正弦定理」を使って,

$$\begin{cases}\sin\angle APC'=\sin\angle APC=\dfrac{AC}{2R}, & \sin\angle APD=\dfrac{AD}{2R},\\ \sin\angle B'PC'=\sin\angle BPC=\dfrac{BC}{2R}, & \sin\angle B'PD=\sin\angle BPD=\dfrac{BD}{2R}\end{cases}\qquad\cdots②$$

①,②より,

$$[A,B'|C',D]=\frac{\sin\angle APC'\times\sin\angle B'PD}{\sin\angle APD\times\sin\angle B'PC'}=\frac{AC\times BD}{AD\times BC}=[A,B|C,D]$$

よって（イ）から,

$$[A,B,|C,D]=[PA,PB|PC,PD]$$

Cabri による検証（同一円周上の 4 点の複比）

● P は円周上を動きます. A,B,C,D,P を drag して下さい. CrossRatio_on_circle1.html

● P は自由に動きます. P が同一円上に無いと ①は成立しません. A,B,C,D,P を drag して下さい. CrossRatio_on_circle2.html