

## 6. 「複比」と「双曲的角度」

長さと同様に複比を使って角度を表すことができます。クラインモデルでは特に有効です。この節では、「双曲的直線 XY」とは、異なる無限遠点 X, Y を持つ双曲的直線とします。

### 6-1. ポアンカレ上半平面における双曲的角度

(ア) 一方の直線が実軸に垂直な直線するとき、

上半平面で、実軸と垂直な双曲的直線を XY, O を中心とする半円で定まる双曲的直線を UV とし、点 P において、図の様に交わっているとします。2直線のなす角を  $\theta$  とすると、

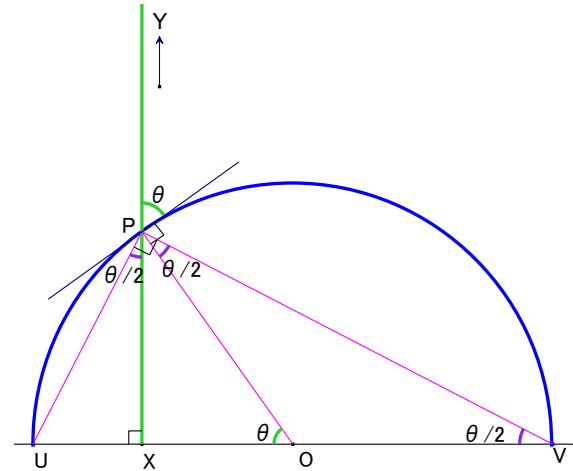
$$\theta = 90^\circ - \angle OPX = \angle POX$$

よって、

$$\angle OPV = \angle OVP = \angle XPU = \frac{\theta}{2}$$

すなわち「 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{XP}{VX} = \frac{XU}{PX}$ 」となるから、

$$\left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{XP}{VX} \cdot \frac{XU}{PX} = \frac{XU}{XV} \quad \dots \textcircled{1}$$



一方、Y はユークリッド平面でも無限遠点であるから、

$$[X, Y|U, V] = \frac{XU \times YV}{XV \times YU} = \frac{XU}{XV} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

$$\boxed{\left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^2 = [X, Y|U, V] \quad \dots (*)}$$

**【注】**「 $[X, Y|V, U] = \frac{1}{[X, Y|U, V]}$ 」だから、U と V を取り替えると、 $[X, Y|V, U] = \frac{1}{\left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^2} \dots \textcircled{3}$

となり、逆数になってしまいます。ところが、 $\theta$  の補角：「 $\theta' = 180^\circ - \theta$ 」をとると、

$$\tan \frac{\theta'}{2} = \tan \frac{180^\circ - \theta}{2} = \tan \left( 90^\circ - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

よって、③は「 $[X, Y|V, U] = \left( \tan \frac{\theta'}{2} \right)^2$ 」を表しています。

通常、二直線のなす角を $\theta$ とすると「 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 」ですが、 $\theta$ だけでなく、その補角( $180^\circ - \theta$ )も二直線のなす角とします。すると $[X,Y|U,V]$ を $[U,V|X,Y],[X,Y|V,U],[V,U|Y,X]$ などで置き換えても、2直線のなす角を表すことができます。結局 $\{X,Y\}$ と $\{U,V\}$ の2組に分かれていれば大丈夫です。(「 $[U,X|V,Y]$ 」などは駄目です。)

(イ) 一般の2直線するとき

一般の双曲的直線  $UV$  と  $XY$  でも、「 $Y$  が中心の円 (点線) に関する鏡像変換  $f$ 」により、 $Y$  は虚軸上方向の無限遠点  $Y'$  へ移り、直線  $XY$  は、実軸と直交する直線  $X'Y'$  に移ります。直線  $UV$  と  $XY$  のなす角を  $\theta$ 、直線  $U'V'$  と  $X'Y'$  のなす角を  $\theta'$  とします。

$f$  は複比を保存するので、

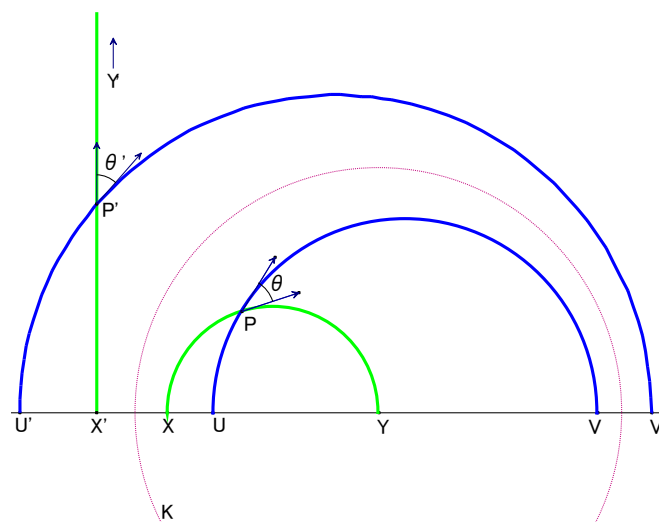
$$[X,Y|U,V] = [X',Y'|U',V']$$

$f$  は角度を保存するので、

$$\theta = \theta'$$

従って、

$$\begin{aligned} \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^2 &= \left(\tan \frac{\theta'}{2}\right)^2 \\ &= [X',Y'|U',V'] \\ &= [X,Y|U,V] \end{aligned}$$



(ア),(イ)より、いずれの場合も、2直線  $XY$  と  $UV$  のなす角を  $\theta$  とすると、

$$\boxed{\left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^2 = [X,Y|U,V] \quad \dots(*)}$$

ただし「 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 」とし、 $\theta$  でも ( $180^\circ - \theta$ ) でも OK とします。(例えば「2直線のなす角を  $60^\circ$  と言っても、 $120^\circ$  と言っても良い」とします。) なお、(\*)の式は、

$$\boxed{\theta = 2 \tan^{-1} \left( \sqrt{[X,Y|U,V]} \right) \dots(**)}$$

と書き直せます。

Cabri による検証(H+)

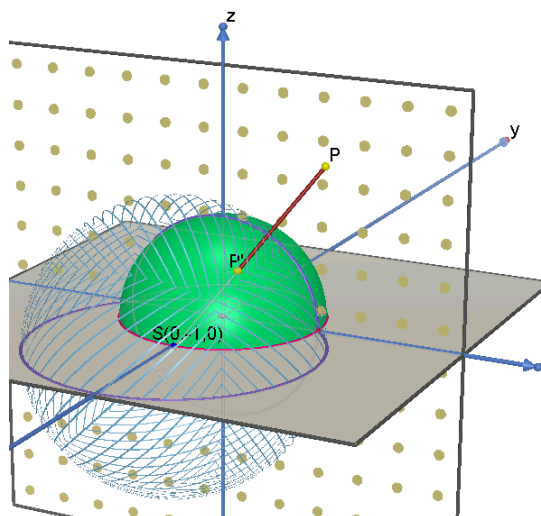
$X,Y,U,V$  を Drag して下さい。

[angle\\_on\\_H+.html](http://angle_on_H+.html)

## 6-2. 上半球面における 双曲的角度.

xyz 空間内に, 上半平面  $H^+$  を,  $x$  軸が無限遠直線,  $z$  軸が上になるようにして作ります. 原点が中心の単位球  $\Omega$  と点  $S(0, -1, 0)$  をとり 「 $S$  が中心で 半径  $\sqrt{2}$  の球に関する鏡像」を  $f$  とします.  $f$  によって  $H^+$  上の任意の点  $P$  は, 単位球  $\Omega$  上の点  $P'$  へ移ります.

[stereo\\_projection.html](http://stereo_projection.html) (by Cabri3D)



双曲的直線  $UV$  と  $XY$  のなす角を  $\theta$ , 双曲的直線  $U'V'$  と  $X'Y'$  のなす角を  $\theta'$  とします.

6-1 より,

$$\left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^2 = [X, Y | U, V]$$

鏡像変換は角度を保存するので,

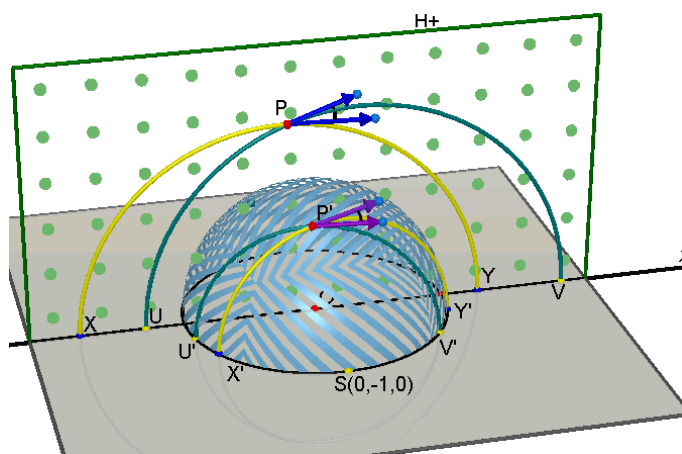
$$\theta = \theta'$$

$f$  は複比を保存するので,

$$[X, Y | U, V] = [X', Y' | U', V']$$

ゆえに,

$$\left( \tan \frac{\theta'}{2} \right)^2 = [X', Y' | U', V']$$



上半球面内の 2 直線  $X'Y'$ ,  $U'V'$  を改めて  $XY$ ,  $UV$  とおくと, 2 直線  $XY$  と  $UV$  のなす角  $\theta$  も,

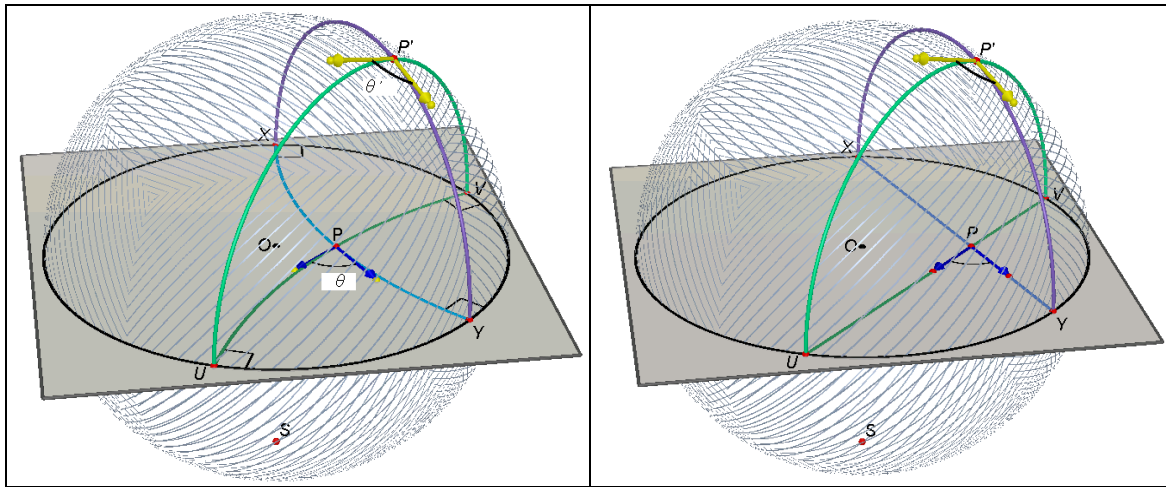
$$\left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^2 = [X, Y | U, V] \quad \dots (*)$$

で計算できます.

### Cabri II による検証(半球面モデル)

$H^+$  内の双曲的直線  $UV$ ,  $XY$  を  $f$  で写した図形が, 半球面上の双曲的直線  $U'V'$  と  $X'Y'$  です.  $X, Y, U, V, P$  を drag して下さい. [Angle on sphereModel.html](http://Angle_on_sphereModel.html)

### 6-3. 「ポアンカレ円盤」, 「クラインモデル」の 双曲的角度.



「ポアンカレ円盤やクラインモデル上の2直線XYとUVのなす角 $\theta$ 」は、定義より「半球面モデル上の2直線XYとUVのなす角」と等しく、かつ無限遠点X,Y,U,Vは半球面モデルと全く同一なので、やはり(\*)が成り立ちます.

$$\left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^2 = [X,Y|U,V] \quad \dots(*)$$

#### Cabri による検証(ポアンカレ円盤&クラインモデル)

X,Y,U,Vをdragして下さい.

- クラインモデル [angle\\_on\\_kleinModel.html](http://angle_on_kleinModel.html)
- ポアンカレ円盤 [angle\\_on\\_poincareDisk.html](http://angle_on_poincareDisk.html)

### 6-5. まとめ

以上より、ポアンカレ上半平面(H<sup>+</sup>), 半球面モデル, ポアンカレ円盤, クラインモデルでは、双曲的直線XYとUV(但しX,Y,U,Vは直線の端点)のなす角を $\theta$ とすると,

$$\left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^2 = [X,Y|U,V] \iff \theta = 2 \tan^{-1} \left( \sqrt{[X,Y|U,V]} \right)$$

ただし「 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 」とし、 $\theta$ でも $(180^\circ - \theta)$ でもOKとします.