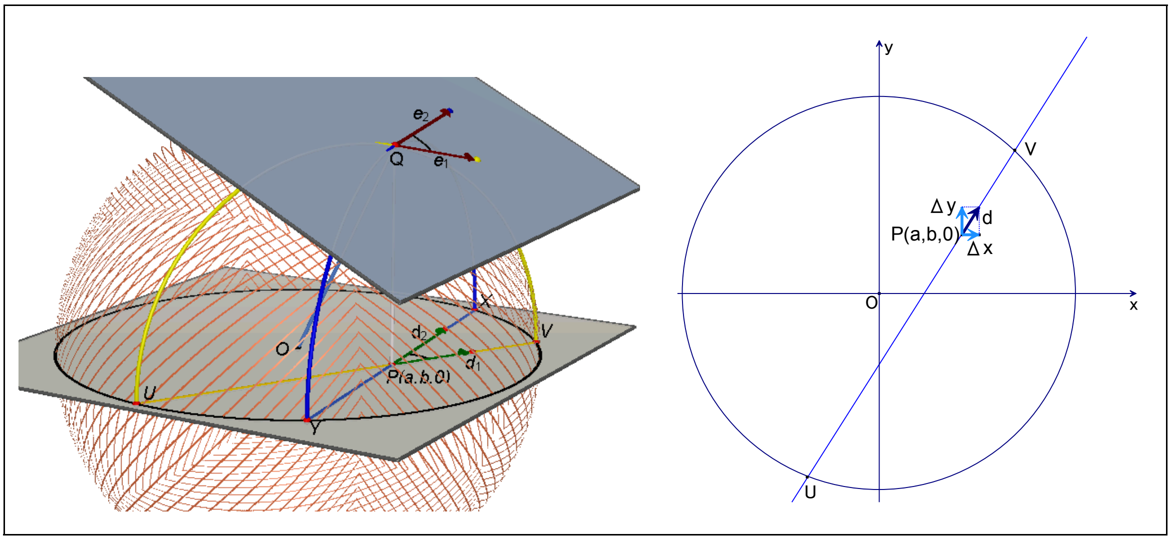
３．双曲的長さと角度（解析的に）

3－1．双曲的角度

クラインモデル内の双曲的直線 XY と UV が 点 P で交わっている時，P に対応する半球面モデル上の点を Q とすると，「XY と UV のなす双曲的角」は「Q に於いて円弧 XQY と UQV のなすユークリッド的角度」（下図では $\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ のなすユークリッド的角度）と等しい．



$\mathrm{P}(a,b,0)$ とすると，$\mathrm{Q}\left(a, b, \sqrt{1-a^2-b^2}\right)$.　　よって，Q に於ける接平面を π とすると，

$$\pi\text{: } ax + by + \sqrt{1-a^2-b^2}\ z = 1 \qquad \cdots①$$

線分 UV の方向ベクトルを $\overrightarrow{d_1} = (\Delta x_1,\ \Delta y_1,\ 0)$ とすると，線分 UV 上の点は，

$$\begin{cases} x = a + \Delta x_1 \cdot t \\ y = b + \Delta y_1 \cdot t \end{cases} \qquad \cdots②$$

①と②を連立して，

$$z = \sqrt{1-a^2-b^2} - \frac{a\Delta x_1 + b\Delta y_1}{\sqrt{1-a^2-b^2}} \cdot t \qquad \cdots③$$

よって，$\overrightarrow{d_1}$ を正射影として持つような，球面の接ベクトルを $\overrightarrow{e_1}$ とすると，②と③より，

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ -\dfrac{a\Delta x_1 + b\Delta y_1}{\sqrt{1-a^2-b^2}} \end{pmatrix}$$

同様に，XY に対して 方向ベクトル$\overrightarrow{d_2}=(\Delta x_2,\ \Delta y_2,\ 0)$ と，接ベクトル$\overrightarrow{e_2}$ を定めると，

$$\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix}\Delta x_2\\ \Delta y_2\\ -\dfrac{a\Delta x_2+b\Delta y_2}{\sqrt{1-a^2-b^2}}\end{pmatrix}$$

ゆえに，

$$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=\frac{(1-b^2)\Delta x_1\Delta x_2+ab(\Delta x_1\Delta y_2+\Delta x_2\Delta y_1)+(1-a^2)\Delta y_1\Delta y_2}{1-a^2-b^2}\quad\cdots④$$

XY と UV 間の双曲的角度を θ とすると，θ は $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ のユークリッド的角度と等しいので，

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}}{|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_2}|}=\frac{\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}}{\sqrt{\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1}}\cdot\sqrt{\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2}}}\\&=\frac{(1-b^2)\Delta x_1\Delta x_2+ab(\Delta x_1\Delta y_2+\Delta x_2\Delta y_1)+(1-a^2)\Delta y_1\Delta y_2}{\sqrt{(1-b^2)(\Delta x_1)^2+2ab(\Delta x_1\Delta y_1)+(1-a^2)(\Delta y_1)^2}\cdot\sqrt{(1-b^2)(\Delta x_2)^2+2ab(\Delta x_2\Delta y_2)+(1-a^2)(\Delta y_2)^2}}\end{aligned}}$$

(注: この式は $\Delta x, \Delta y$ が微少量でなくとも成り立ちます) $\cdots(*)$

Cabri による検証

Drag X,Y,U,V　　$\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2}$ のなす角と $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ のなす角は異なります.　　angle.html

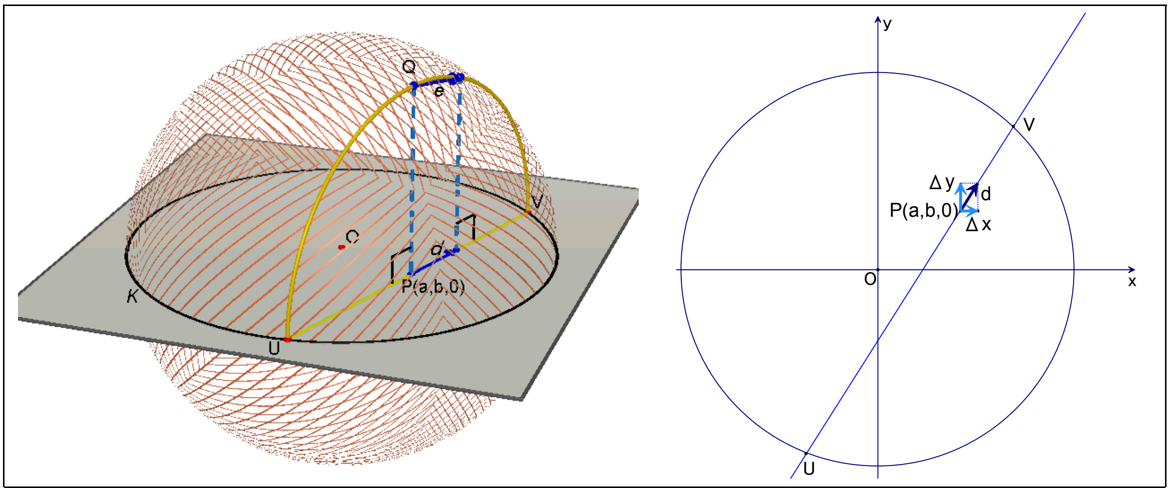
3－2. 双曲的距離

④で 「$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{e_2}$」とすると，ユークリッド的距離$|\overrightarrow{e_1}|$の 2 乗は，

$$|\overrightarrow{e_1}|^2=\frac{(1-b^2)(\Delta x_1)^2+2ab(\Delta x_1)(\Delta y_1)+(1-a^2)(\Delta y_1)^2}{1-a^2-b^2}\quad\cdots⑤$$

半球面モデル（または H^3 モデル）では，ユークリッド的微小距離 Δl に対する双曲的距離を Δs とすると，「$\Delta s \fallingdotseq \dfrac{\Delta l}{z}$ 」だから，点 $P(a,b,0)$ から，$\vec{d}=(\Delta x,\Delta y,0)$ だけ動いたとき，その移動 $\vec{d}$ の双曲的距離 Δs は，（$\vec{d}$ に対応する半球面上のベクトルを $\vec{e}$ とすると）

$$\boxed{(\Delta s)^2\fallingdotseq\frac{|\vec{e}|^2}{(Q_z)^2}=\frac{|\vec{e}|^2}{1-a^2-b^2}=\frac{(1-b^2)(\Delta x)^2+2ab(\Delta x)(\Delta y)+(1-a^2)(\Delta y)^2}{(1-a^2-b^2)^2}\cdots(**)}$$



点 P が $\mathrm{P}(a,b,0)$ から，$\vec{d}=(\Delta x,\Delta y,0)$ だけ動いたとき，移動 $\vec{d}$ の双曲的距離 Δs は，

$$(\Delta s)^2 \fallingdotseq \frac{\left|\vec{e}\right|^2}{(\mathrm{Q}_z)^2}=\frac{\left|\vec{e}\right|^2}{1-a^2-b^2}=\frac{(1-b^2)(\Delta x)^2+2ab(\Delta x)(\Delta y)+(1-a^2)(\Delta y)^2}{(1-a^2-b^2)^2}\cdots(**)$$

(注: この式は $\Delta x,\Delta y$ が微少量の時のみ　成立します)

3-3. クラインモデルの特徴（微小距離の非等方性）

3-2 から，

$$(\Delta s)^2 \fallingdotseq \frac{|\vec{e}|^2}{(\mathrm{Q}_z)^2} = \frac{|\vec{e}|^2}{1-a^2-b^2} = \frac{(1-b^2)(\Delta x)^2 + 2ab(\Delta x)(\Delta y) + (1-a^2)(\Delta y)^2}{(1-a^2-b^2)^2} \cdots (**)$$

「ポアンカレ上半平面」，「ポアンカレ円盤」，「上半球面モデル」では，それぞれ，

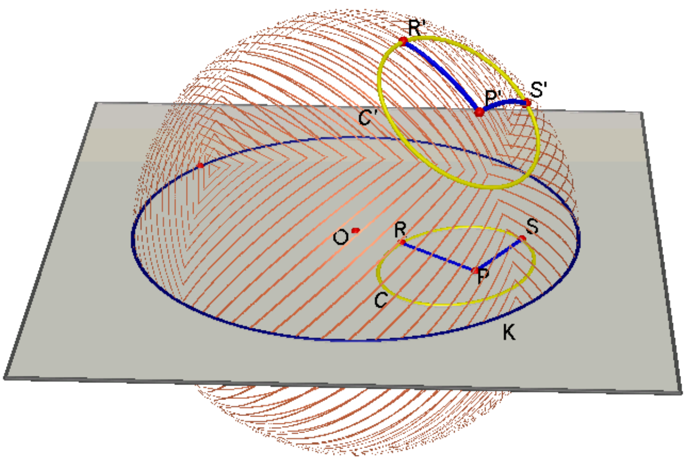
$$ds = \frac{dl}{y}, \qquad ds = \frac{2dl}{1-a^2-b^2}, \qquad ds = \frac{dl}{z} \qquad （但し\ dl = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}）$$

のように，ユークリッド的距離 dl が決まると，対応する双曲的距離も決まりました．

ところが，(**)より，クラインモデルでは，例えば「$(\Delta x, \Delta y) = (0.1\ ,0)$」のときと，「$(\Delta x, \Delta y) = (0,\ 0.1)$」のときでは，双曲的距離が異なることが分かります．

このように，クラインモデルでは 微小線分の非ユークリッド距離は，そのユークリッド距離だけでは決まらず，その方向によっても変わります．

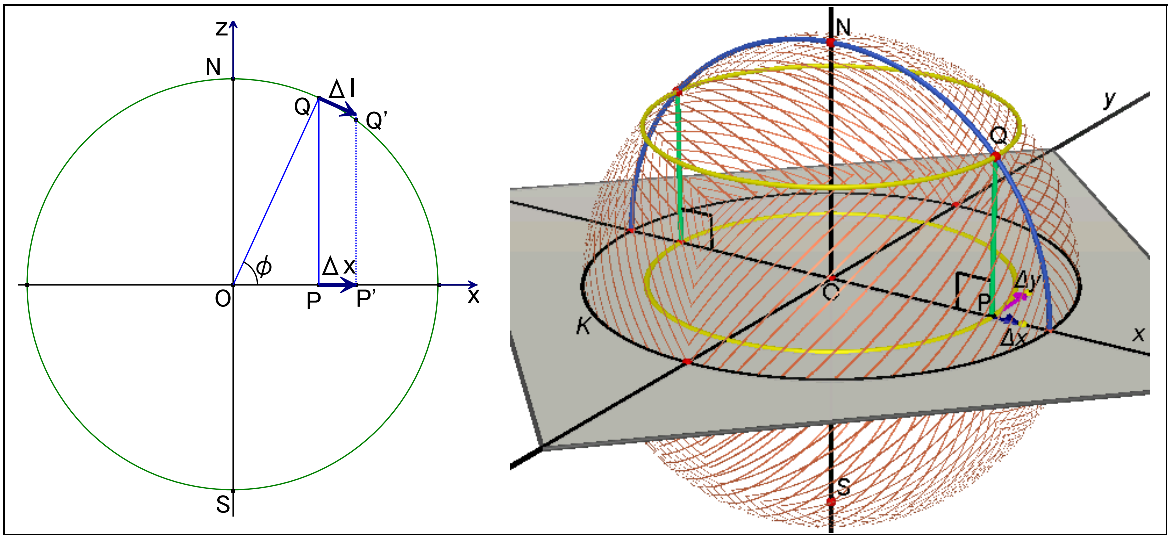
このことは クラインモデルの円が ユークリッド的楕円 であることからも明らか です．下図で C は P を中心とするクラインモデルの円で，半球面モデルの円 C' を xy 平面に正射影したユークリッド的楕円です．よって S が円 C 上を動いても，P と S の双曲的長さ [P,S] の長さは一定ですが，ユークリッド的距離 $\overline{\mathrm{PS}}$ は 変化します． 即ち，[P,S] と $\overline{\mathrm{PS}}$ の比は直線 PS の方向によって変わります．



Cabri による検証

Drag P,Q,R,S [P,S] と $\overline{\mathrm{PS}}$ の比が $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ の方向によって変わります． distance&angle.html

3-3-1．(**)の別の導き方（極形式を利用）



点 P が x 軸上にあるとし，P に対応する半球面モデル上の点を Q, P が $(\Delta x, \Delta y, 0)$ 移動した時，Q の「ユークリッド的微小距離」を Δl ,「双曲的微小距離」を Δs とします.

左上図より，P が動径方向(x 軸方向)に Δx だけ動いた時は,

$$\Delta l = \frac{\Delta x}{\sin\phi} = \frac{\Delta x}{Q_z} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore \Delta s = \frac{\Delta l}{Q_z} = \frac{\Delta x}{1-x^2} \cdots ①$$

右上図より，P が動径と垂直な方向(y 軸方向)に Δy だけ動いた時は,

$$\Delta l = \Delta y \qquad \therefore \Delta s = \frac{\Delta l}{Q_z} = \frac{\Delta y}{\sqrt{1-x^2}} \cdots ②$$

即ち「動径方向に動くか」,「動径と垂直な方向に動くか」で， Δl ， Δs は異なります.

①,②より， $\mathrm{P}(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ が動径方向に Δr ，それと垂直な方向に $r\Delta\theta$ 移動した時の「双曲的微小距離」は,

$$\boxed{(\Delta s)^2 = \left(\frac{\Delta l}{Q_z}\right)^2 = \left(\frac{\Delta r}{1-r^2}\right)^2 + \left(\frac{r\Delta\theta}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2 = \frac{(\Delta r)^2}{(1-r^2)^2} + \frac{r^2(\Delta\theta)^2}{1-r^2} \cdots (***)}$$

これを，直交座標系に直すと，前節の(**)の式が得られます.（詳しくはここ）