

# クラインモデル(Klein Model)

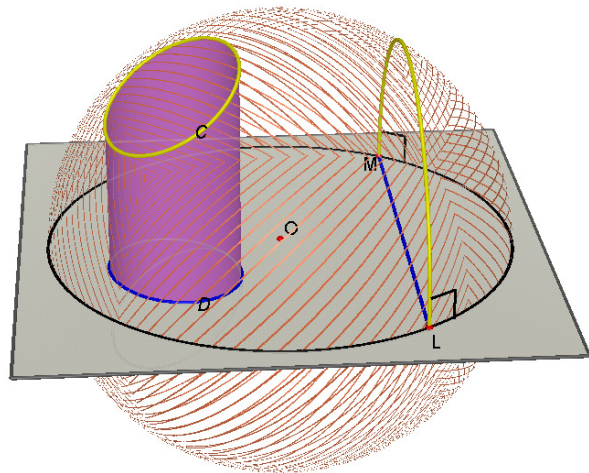
## 1. クラインモデルの基本図形

クラインモデルの基本図形は 半球面モデルの基本図形を,  $xy$  平面に正射影して得られる図形です. メリットは双曲的直線がユークリッド的線分になる事です. 但し, 双曲的円はユークリッド的楕円になり, 角度や距離の定義も「複比」を使わないと難しくなります.

### 1-1. 双曲的直線, 双曲的円, 等距離線, 極限円

クラインモデルの直線と円は, 半球面モデルの直線と円を,  $xy$  平面上に正射影して得られる図形です. (右図で線分  $ML$  が直線, 楕円  $D$  が円です.)

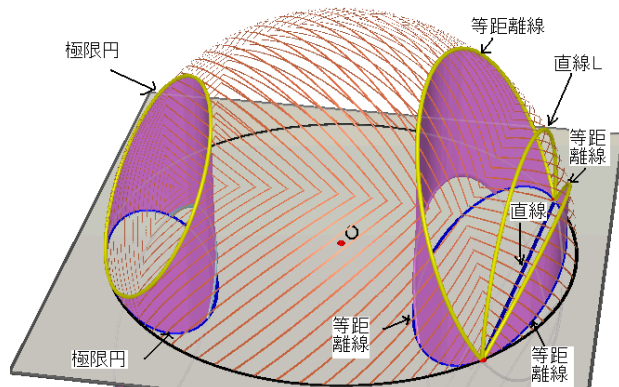
クラインモデルの直線は「ユークリッド的線分」に, また円は「単位円と共有点を持たない楕円」となります. 但し「短軸の延長線が原点を通る楕円」です.



クラインモデルの等距離線と極限円は, 半球面モデル上の等距離線と極限円を,  $xy$  平面に正射影した図形です.

極限円は「単位円と1点で接する楕円」となります.

等距離線は「単位円と2点で接する楕円の半分」となります.



右上図の半球面モデルで 直線  $L$  からの等距離線は 2 本あり, これらを  $xy$  平面に正射影しクラインモデルの等距離線が 2 本できます. しかし半球面上の 2 本の等距離線の一つの円にまとめ ( $xy$  平面に関し対称移動し  $z < 0$  にも伸ばす),  $xy$  平面に正射影しても同じ正射影が得られるので, クラインモデルの 2 本の等距離線を束ねた楕円は 単位円と接します.

### 1-1-2. Cabri3D による検証

直線と円.

Drag P,Q,R,L,M

[line&circle with SphereModel.html](#)

極限円と等距離線.

Drag P1,P2,Q1,Q2,R1,R2

[horicircle&equiline with Sphere.html](#)

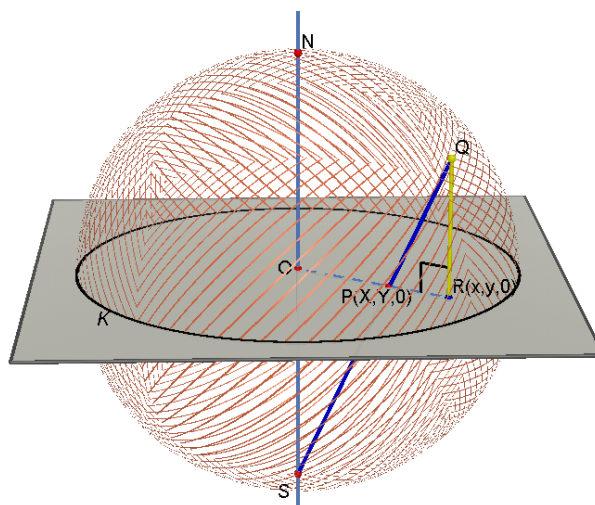
## 1- 2. ポアンカレ円盤とクラインモデル

ポアンカレ円盤上の点を  $P(X,Y,0)$ , それを 南極  $S$  からの立体射影で上半球面に移した点を  $Q$ ,  $Q$  を  $xy$  平面に正射影した点を  $R(x,y,0)$  とすると, 半球面モデル **2-1** より,

$$\begin{cases} x = \frac{2X}{1+X^2+Y^2} \\ y = \frac{2Y}{1+X^2+Y^2} \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

また, この逆変換は, (単純計算で)

$$\begin{cases} X = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ Y = \frac{y}{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{cases} \dots \textcircled{2}$$

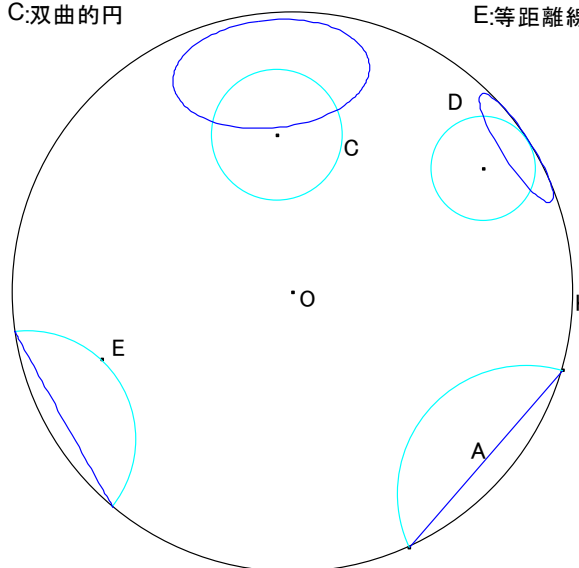


**O, P, R** は当然, 一直線上に並びます. ①を使って, ポアンカレ円盤内の基本図形 (水色) を, クラインモデル内の基本図形 (青) に移すことができます.

クラインモデルの円や極限円, 等距離線は楕円ですが, これらはポアンカレ円盤の円を①を用いて変換したものであるため, **3点で決まります**. 図形的には「**短軸の延長線が原点を通るような楕円**」です.

A:双曲的直線  
C:双曲的円

D:極限円  
E:等距離線



### 1-2-1. Cabri II による検証

青い色の図形はクラインモデルの基本図形で、薄い円や直線はポアンカレ円盤の対応する図形です。 Drag B,C,D,E,X,Y [basic\\_objects\\_with\\_PoincareDisk1.html](http://basic_objects_with_PoincareDisk1.html)

3点 P,Q,R を通る基本図形（円，極限円，等距離線）ができます。 Drag P,Q,R.

[basic\\_objects\\_with\\_PoincareDisk2.html](http://basic_objects_with_PoincareDisk2.html)

,