

2-4. 境界が多角形の時の円周率

2-4-1. 境界が3角形の時の円

境界が三角形のとき、 O が中心の円と直線 AO, BO, CO との交点を 図の様に点 D, F, E とすると、点 B からの射影を考えて、

$$[F, E | A, A''] = [O, D | A, A']$$

故に

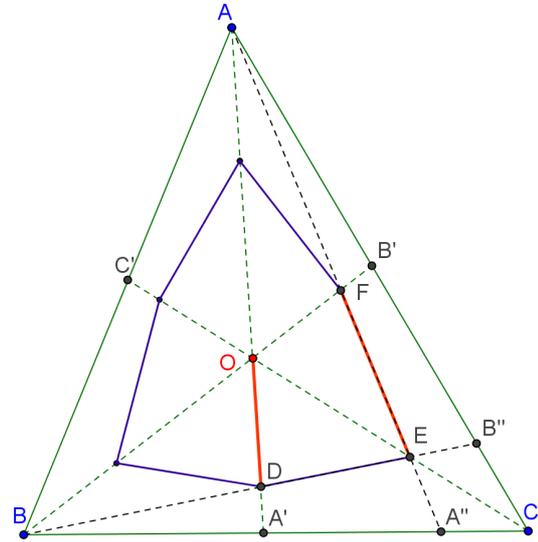
$$disH(E, F) = disH(O, D) = (\text{半径})$$

同様にして、円の他の「辺」の長さも半径と等しくなるから、

$$\frac{\text{円周}}{\text{半径}} = 6$$

即ち「円周率は3」で一定となります。

これを利用し、 H の境界が三角形の時に 三角関数を定義することもできます。(第6節)



2-4-2. 境界がn角形($n \geq 4$)の時の円

四角形 $ABCD$ が境界のとき、 O が中心の円の「頂点」を $Q_k (1 \leq k \leq 8)$ とする。 B が中心の、直線 CC' から FZ の上への射影を考えて、

$$[O, Q_6 | C', C] = [Q_7, Q_6 | Z, F] < [Q_7, Q_6 | E, F]$$

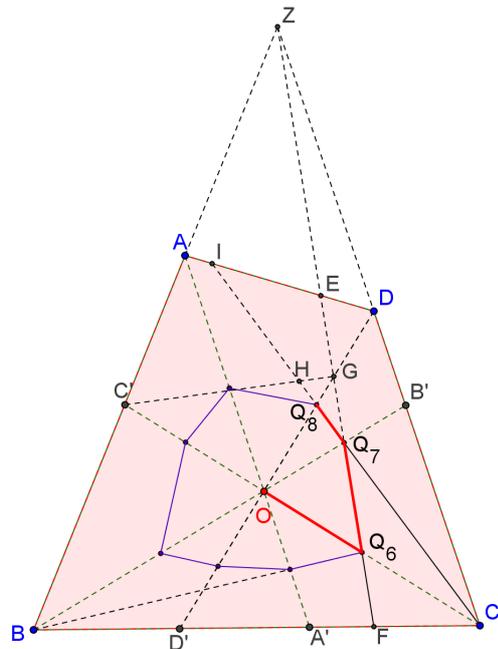
$$\therefore disH(O, Q_6) < disH(Q_7, Q_6) \quad (\text{半径} < \text{辺})$$

G が中心、 CC' から CH の上への射影を考えて、

$$[O, Q_6 | C', C] = [Q_8, Q_7 | H, C] > [Q_8, Q_7 | I, C]$$

$$\therefore disH(O, Q_6) > disH(Q_8, Q_7) \quad (\text{半径} > \text{辺})$$

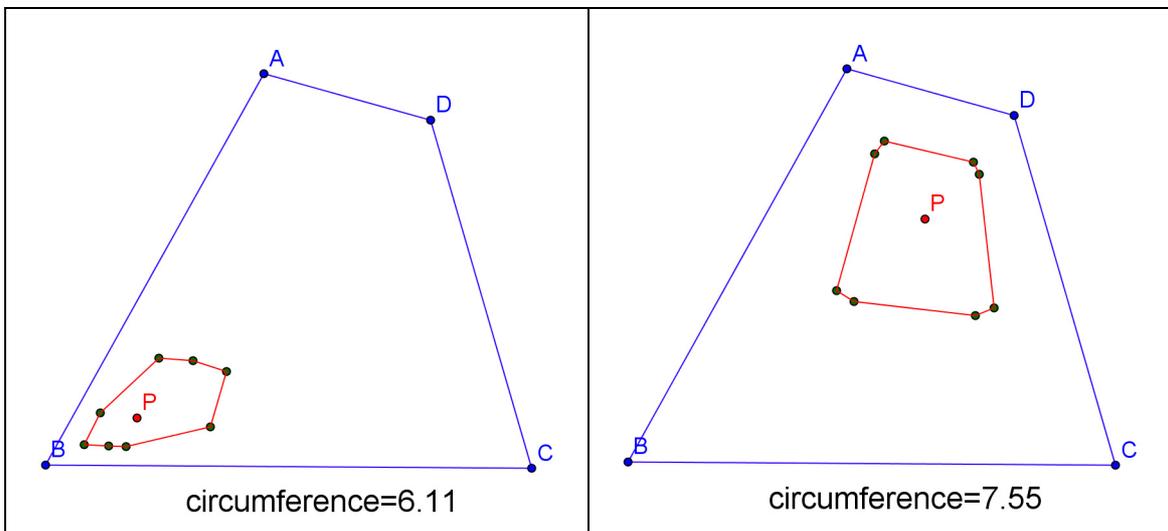
「辺」と半径の長さの比は一定ではありません。



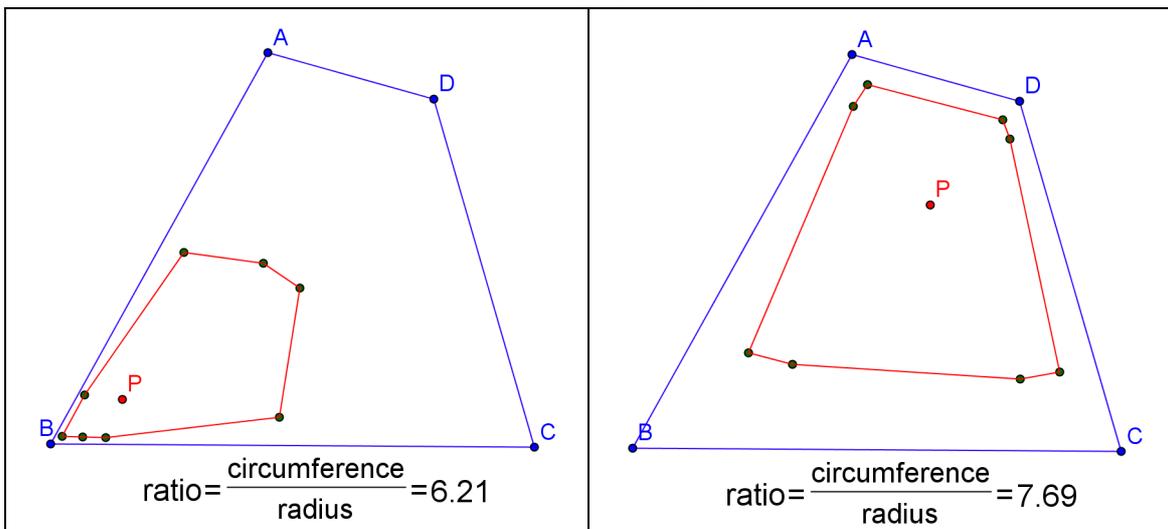
2-5. 境界が n 角形の時の円周率

$n=3$ のときは、「円周率」は 3 です。しかし $n \geq 4$ のときは、「円周率」は 3 より大きくなります。しかも、円の中心や半径の長さで 円周率が変わります。(クラインモデルでは円周率は半径によって変化しますが、中心の位置には無関係です。)

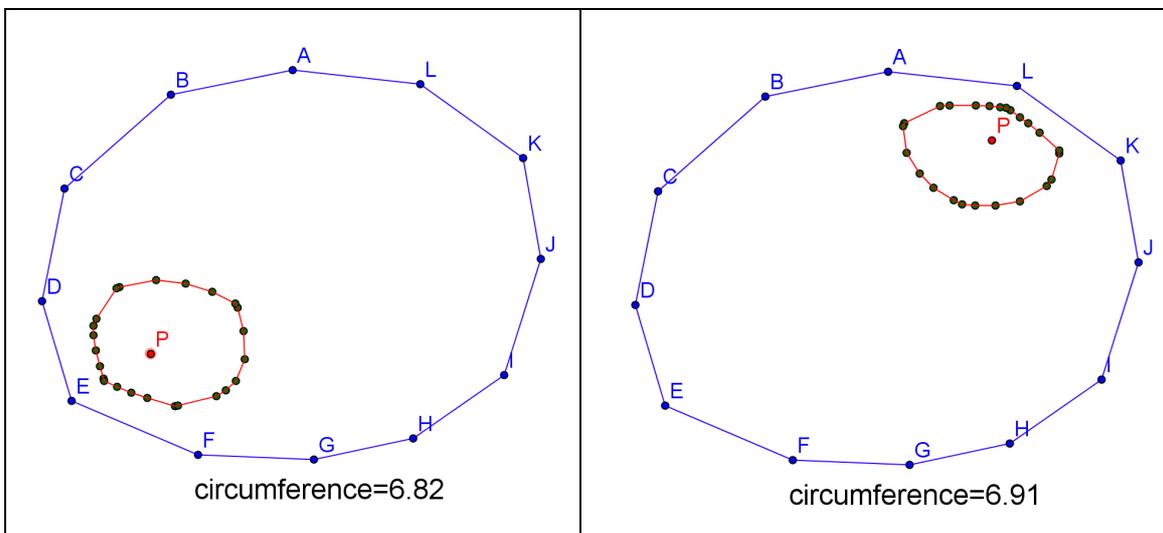
下図は共に半径 $r=1$ の円です。円周長(circumference)は、中心の位置で異なります。すなわちこの「宇宙」は、等方的ではありません。円周率を測ることによって宇宙の中で絶対的位置を知ることが出来ます。



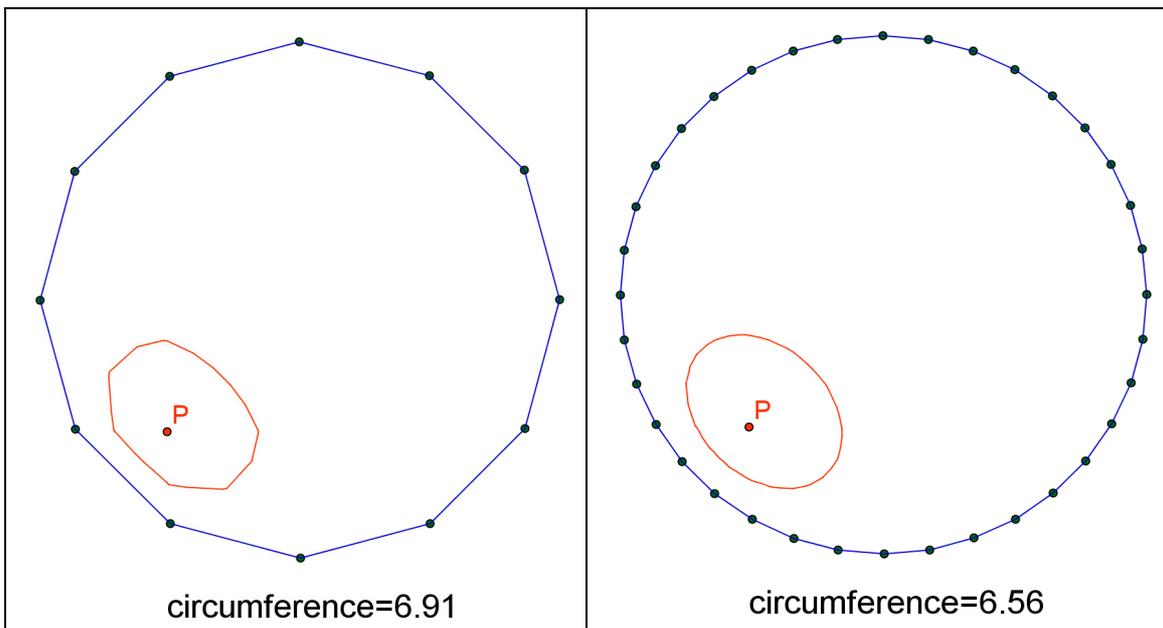
下図は共に $r=2$ の円です。円周率(ratio)は、半径の長さによっても変わります。



n が大きくなり境界が conic(2次曲線)に近づくと、中心が動いても円周の長さはあまり変化しません。下図は $n=12$, 半径 $r=1$ の時の円周の長さを表します。



次の図では、境界は 正多角形です。左は $n=12$, 右は $n=36$ で 共に半径 $r=1$ です。



クラインモデルで、半径が r の時の円周の長さを $C(r)$ とすると、

$$C(r) = 4\pi \sinh\left(\frac{r}{2}\right) = 2\pi\left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}\right)$$

特に $r=1$ とすると、 $C(1) = 2\pi\left(\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 6.548\dots$ なので、「 $n \rightarrow \infty$ 」の時は、円周の長さは クラインモデルでの長さに近づくことが判ります。

2-5-1. Geogebra, Cabri による検証

3 角形; [circumference\(n=3\).ggb](#), [circle in triangle.fig](#)

4 角形; [circumference\(n=4\).ggb](#), [circle in quadrangle.fig](#)

6 角形; [circumference\(n=6\).ggb](#)

12 角形; [circumference\(n=12\).ggb](#)

正多角形; [circumference in regular polygon.ggb](#)

多角形; [circumference in polygon.ggb](#)

「[circumference\(n=3\).ggb](#)」 から「[circumference\(n=12\).ggb](#)」までの 4 個のファイルは全て同じプログラムです。「[circumference in polygon.ggb](#)」のファイルに **点を追加**しファイルを作成しました。点を追加するのは、Geogebra のメニューバーの「view」から「**algebra window**」を表示させておき、以下のようにしてください。

1. メニューバーの、左から 2 番目の項目を選択し、適当なところに点を追加する。
2. 「**algebra window**」で「**ppts**」を選択し、**F3** キー を押す。
3. 最下部の「**input window**」に「**ppts**」の項目が現れます。点の名前を追加しリターンキーを押します。例えば、三角形 ABC に点 D を追加し四角形 ABCD にするには **ppts={A,B,C,D}** と 直接入力します。

詳しくは [ここ](#) をご覧ください。残念ながら、点を減らすことは難しいです。