8. 双曲三角比の定理

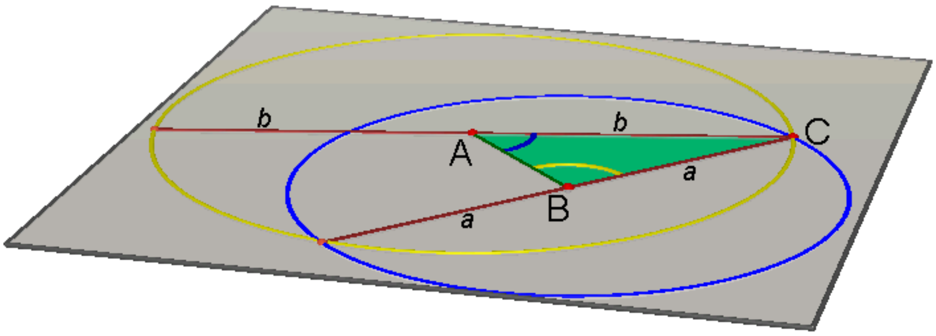
この章は Bolyai の「空間論」に従って，かなり厳密に証明しました．ただ「平行線角」と「円周の長さ」については Bolyai のやり方からかなりずれていますが，これは Bolyai の「平行線角」の証明が(図形的で素晴らしいのですが)やや難しいので，一部私の方で変更したからです．よって，変更部分の証明は間違っているかもしれませんが，もちろん結果の方は大丈夫なので，ご安心ください．(^_^.)

8-1. 円・正弦定理

この章と次章は「双曲空間の三角比の定理」を述べます．まず Bolyai の数ある定理の中でも，非常に有名でかつ印象的な定理からスタートします．「空間論」の§25 です．

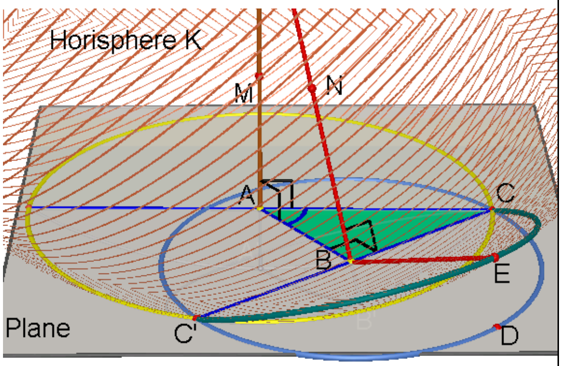
> **「円･正弦定理」**平面三角形では, 辺を半径として描いた円周の長さは対角の正弦に比例する. 即ち,
>
> $$\frac{\bigcirc BC}{\sin A}=\frac{\bigcirc CA}{\sin B}=\frac{\bigcirc AB}{\sin C}$$

[注]○AB は，A が中心で点 B を通る円の円周（円周長）を表す Bolyai 独特の用語です．ユークリッド平面では「○BC=$2\pi a$, ○CA=$2\pi b$ 」だから，通常の正弦定理（の一部）：「$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$」となります．

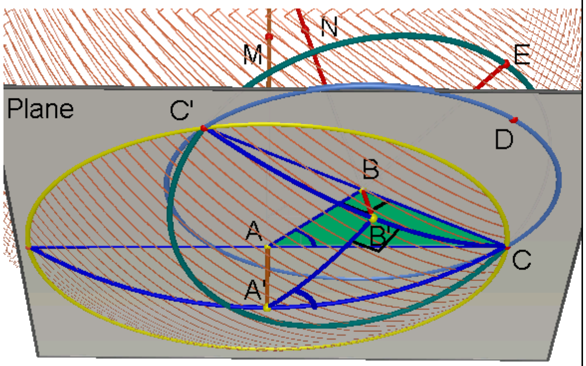


「証明」まず，∠B が直角の三角形について「$\sin A = \dfrac{\bigcirc BC}{\bigcirc CA}$」を証明します． その為に，軸が「A を通る平面と垂直な直線 AM」で かつ点 C を通る極限球 K を考えます．（この時 K は，平面と○AC を共有します.）B を通り AM と極限平行な直線を BN，そして直線 AM, BN と K の交点をそれぞれ A',B'とすると，AM,BN は軸なので，弧 A'B',B'C,CA'は極限円弧です． さらに B に関し C と対称な点を C'とすると，3 垂線の定理より「BC⊥BN」なので，B を通り BN と垂直な平面による K の断面は，直径が CC'の円 CEC'となります．

circle&sin_theorem.cg3　(是非動かしてみてください)



平面の上から見た図



平面の下から見た図

∠B'A'C は，平面 ABM と平面 ACM のなす角と等しいですが，平面⊥AM なので

$$\angle B'A'C = \angle BAC \quad \cdots①$$

また，C と C'は平面 ABN に関し対称なので，

$$\angle A'B'C = 90^{\circ} \quad \cdots②$$

極限球上ではユークリッド幾何が成り立つ」ので，①，②より，

$$\sin\angle BAC = \sin\angle B'A'C = \frac{\text{弧}B'C}{\text{弧}A'C} = \frac{2\pi\times\text{弧}B'C}{2\pi\times\text{弧}A'C} = \frac{\bigcirc B'C}{\bigcirc A'C} \quad (\text{K 上の円})$$

ところが，平面と K は○A'C を共有するので「○A'C=○AC」，同様に「○B'C＝円 CEC'」ですが，円 CDC'と円 CEC'は直径を共有するので「○B'C=円 CEC'=円 CDC'=○BC」
故に，

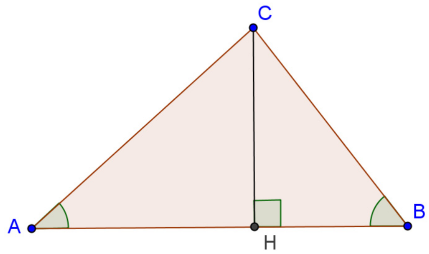
$$\sin\angle BAC = \frac{\bigcirc AC}{\bigcirc BC} \quad (\text{平面 ABC 上の円})$$

即ち 直角三角形に関しては定理が成り立ちます．一般の三角形では，二つの直角三角形に分割して，下図で

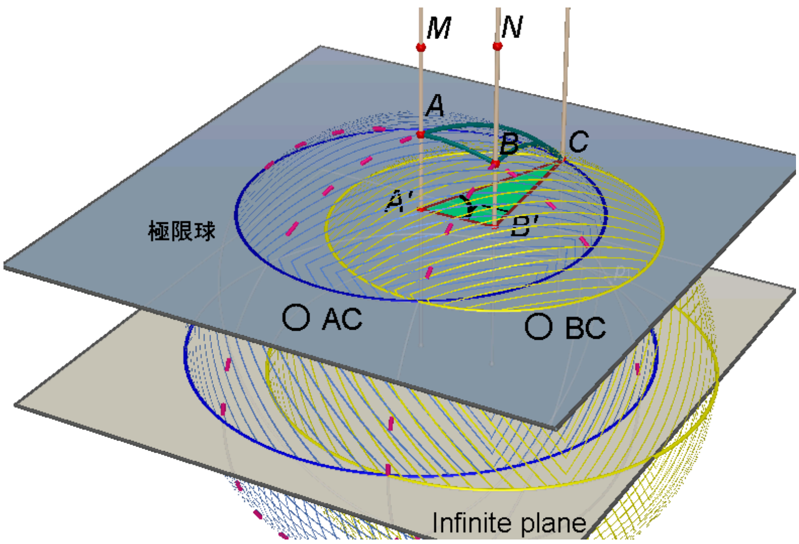
$$\sin A = \frac{\bigcirc CH}{\bigcirc AC},\ \sin B = \frac{\bigcirc CH}{\bigcirc BC}$$

ゆえに

$$\sin A : \sin B = \bigcirc BC : \bigcirc AC$$

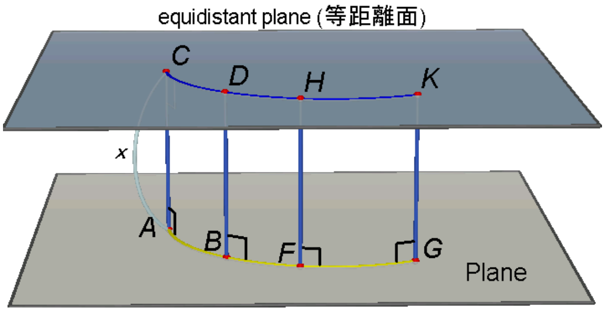


[コメント]
この定理はかなり人気の定理らしく，Bonola の本にも Gray の本にも取り上げられています．どちらの本も Bolyai の定理のほんの一部しか解説していないことを考えると，意味深いです．またこの証明では，一つの円を「極限球上の円」とも「平面上の円」とも取っていますが，Bolyai は，さらに「等距離平面上の円」とも見て，等距離平面の関係式を導いています．即ち，円は「3 つの顔」を持っています．この 3 つの顔を Bolyai は 実に見事に使い分けます．なお，下図は同じ図形の H^3 モデル版です．以前は，私はこちらの方が分かり易かったです．（H3.cg3）



8-2. 「平面と等距離面上の曲線の長さの比」と角度

(この節では，等距離線は真直ぐに，等距離線と比較するときは，直線は曲げて描いてあります．)



第 7 章で「等距離面と平面の距離を x」とすると，上の図で，

$$\boxed{\frac{(\text{対応する})\text{等距離面上の曲線長}}{\text{平面上の曲線長}}\left(=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AF}}=\frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{AG}}=\cdots\right)=\cosh(kx)}$$

となることを「結果だけ」述べましたが，この比と角度には，興味深い関係があります．
即ち，

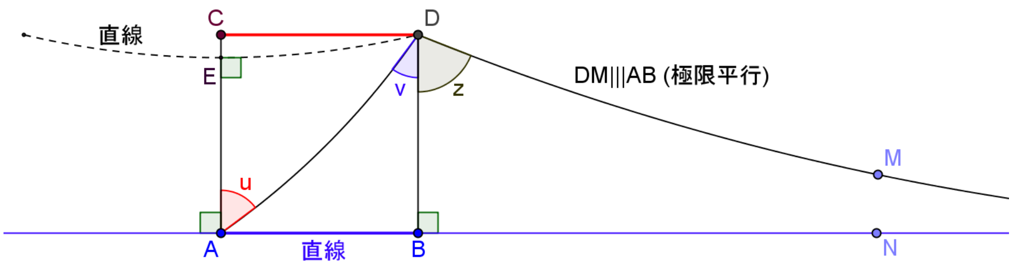
「平面と等距離面の対応する長さの比 (等距離面·正弦定理)」

下図で CD は, 線分ABからの等距離線. $\angle\mathrm{CAD}=u$, $\angle\mathrm{ADB}=v$ とすると,

$$\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{AB}}=\sin u:\sin v \quad \cdots(*)$$

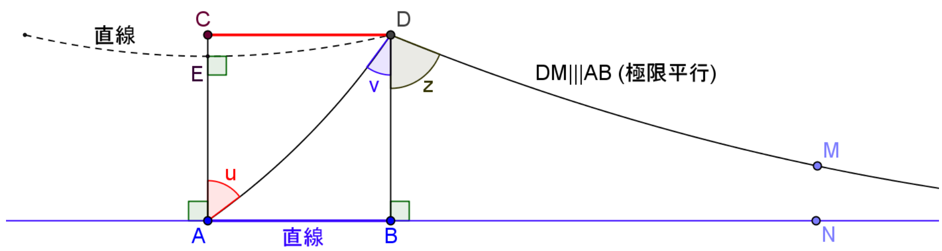
さらに BDの平行線角: $\Pi(\mathrm{BD})=z$ とすると,

$$\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{AB}}=\sin u:\sin v\ =1:\sin z \quad \cdots(**)$$



[証明]

「平面上の円周の長さ」と「対応する等距離面上の円周の長さ」を比べて証明します.



D から直線 AC に下ろした垂線の足を E とすると,「円・正弦定理」より,

$$\sin u = \frac{\bigcirc \mathrm{ED}}{\bigcirc \mathrm{AD}}\ ,\ \ \sin\ v = \frac{\bigcirc \mathrm{AB}}{\bigcirc \mathrm{AD}}$$

ゆえに,

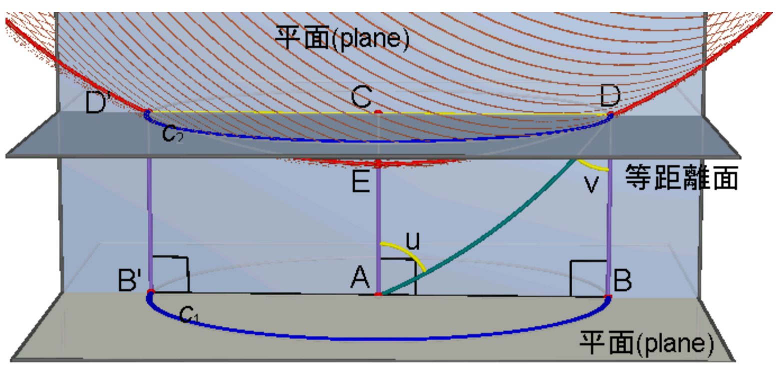
$$\sin u\ :\ \sin\ v = \bigcirc \mathrm{ED} : \bigcirc \mathrm{AB} \quad \cdots①$$

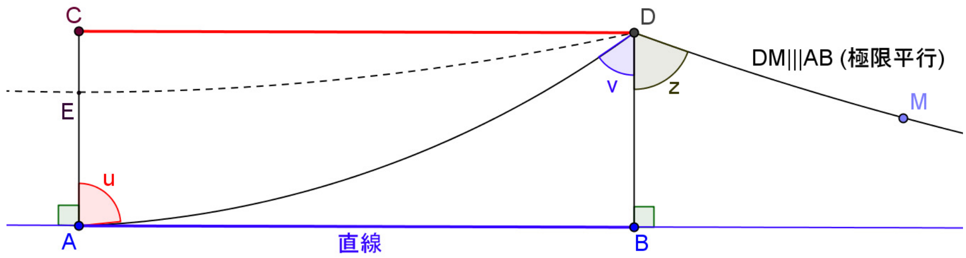
ここで上の図形を AC を軸にして回転させると, 下図のように, 直線 AB は平面 π を作り, 点 B は π 上の円 C_1, そして D の軌跡は「π からの等距離面上の円 C_2」となる. ところが, ○ED と C_2 は同じ円だから, ①より,

$$\sin u : \sin v = (\ \mathrm{C}_1\text{の長さ}\ ) : (\ \mathrm{C}_2\text{の長さ}\ )$$

平面とその等距離面上の対応する曲線の長さの比は一定だから, この比は円でなくとも, 任意の曲線についても一定である（等距離面と平面の距離のみに依存する）. よって,

$$\overline{\mathrm{CD}}\ :\ \overline{\mathrm{AB}} = \sin u : \sin v \quad \cdots(*)$$





さらに，この比は**任意の長さの曲線**についても同じだから，上図で B,D を固定し，A を B から無限に左の方に動かしても「$\sin u : \sin v$」の値は変わりません．そして，この時，DA は BA の極限平行線に近づくので，u は $\angle R$ に，v は「BD に対する平行線角$=\Pi(\mathrm{BD})$」に限りなく近づきます．

ゆえに　$z = \Pi(\mathrm{BD})$ とすると，

$$\therefore \quad \overline{\mathrm{CD}} : \overline{\mathrm{AB}} = \sin u : \sin v = \sin 90^\circ : \sin z = 1 : \sin z \quad \cdots(**)$$

証明終

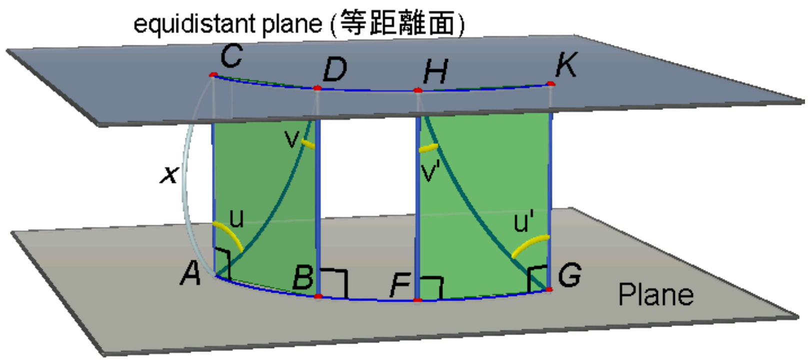
［$f(x)$ の定義］

以上より，

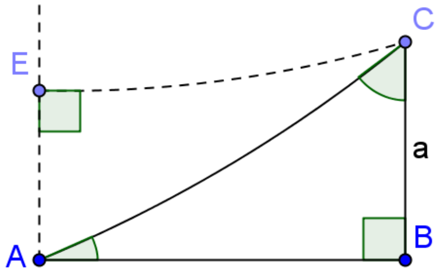
平面とその等距離平面との距離が x の時，対応する曲線の長さの比を $f(x)$

とすると，

$$\boxed{f(x) = \frac{(\text{対応する})\text{等距離面上の曲線長}}{\text{平面上の曲線長}} \left(= \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AF}} = \cdots \right) = \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{\sin u'}{\sin v'} = \cdots}$$



この比は距離だけの関数になるのみでなく，u や v のとり方にもよりません．以後，この章では，$f(x)$ は「等距離面と平面上の対応する曲線の比」を表すものとします．



角度をより正確に描いた図（直線 AC と CE は「真直ぐ」でない）

すると，∠B が直角の直角三角形 ABC において，

$$\frac{\cos \mathrm{A}}{\sin \mathrm{C}} = \left(\frac{\cos \angle \mathrm{BAC}}{\sin \angle \mathrm{ACB}} \right) = \frac{\sin \angle \mathrm{CAE}}{\sin \angle \mathrm{ACB}} = f(a)$$

が成り立つ事が分かります．さらに，第 7 章で「$f(x) = \cosh(kx) \quad \cdots$(ア)」と証明抜きで，結果のみ述べてあるので，これと定理の結果も使うと，

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\cos \mathrm{A}}{\sin \mathrm{C}} = \cosh(ka) & \cdots(\text{イ}) \\ \dfrac{1}{\sin(\Pi(a))} = \cosh(ka) & \cdots(\text{ウ}) \end{cases}}$$

(イ)は，双曲平面における直角三角形の三角比の公式の 1 つです．ユークリッド平面では「$\cos \mathrm{A} = \sin \mathrm{C}$」なので，「$a = 0$」を表し無意味です．双曲平面では∠C も∠A もユークリッド平面と比べて小さいので，$\cos \mathrm{A}$ はより大きく，$\sin \mathrm{C}$ はより小さくなって，左辺は 1 より大きくなります．（ウ）も平行線角と線分の長さを結びつける非常に重要な公式です．

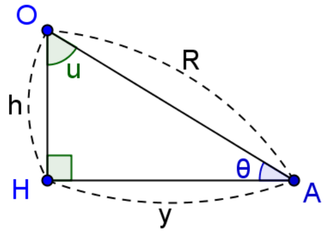
なお，次節で (ア)を証明します．　すると(イ)と(ウ)も証明できる事になります．

(注) $f(x)$ というのは, 私が勝手に置きました. 名前があった方が分かり易いと思ったからです.

8-3. $f(x)$の式 & 円周の長さの式

直角三角形 OAH に於いて「$\angle \mathrm{OAH}=\theta,\ \angle \mathrm{AOH}=u$」とおくと，8-1 と 8-2 の定理より，

$$\begin{cases} \sin\theta=\dfrac{\bigcirc h}{\bigcirc \mathrm{R}} & \cdots ① \\ \sin u=\dfrac{\bigcirc y}{\bigcirc \mathrm{R}} & \cdots ② \\ \dfrac{\cos\theta}{\sin u}=f(h) & \cdots ③ \end{cases}$$



（但し 「$\bigcirc h$ は半径が h の円周の長さ」を表す．これも Bolyai の記号）

①,②,③より

$$\frac{\bigcirc h}{\bigcirc y}=\frac{\sin\theta}{\sin u}=\frac{\cos\theta}{\sin u}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=f(h)\tan\theta$$

ゆえに，

$$\therefore\ \bigcirc y=\frac{\bigcirc h}{f(h)}\cdot\frac{1}{\tan\theta}\quad\cdots(ア)$$

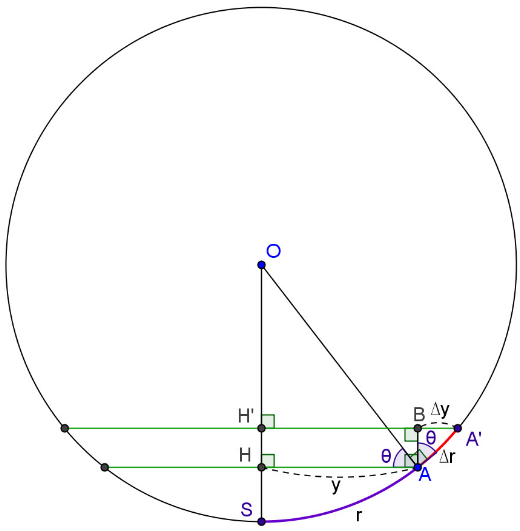
次に半径 R の円周上に定点 S と動点 A をとり，
半径 OS に A から下ろした垂線の足を H，

$\overline{\mathrm{AH}}=y$, 弧$\mathrm{SA}=r$, $\angle \mathrm{OAH}=\theta$ とおく．

さらに A が A'に移動した時の r, y の増加量を
それぞれ $\Delta r, \Delta y$ ，A を通る OS の等距離線と
直線 A'H'との交点を B とすると，

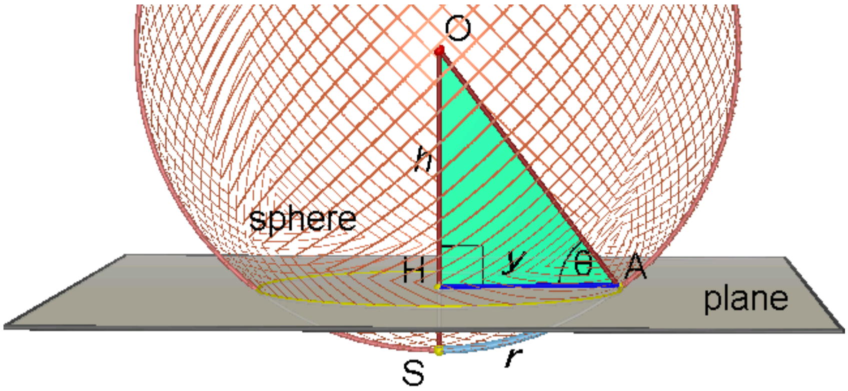
$$\overline{\mathrm{A'B}}=\Delta y,\quad \angle \mathrm{A'AB}\approx\theta$$

(但し $\overline{\mathrm{A'B}}$ は線分 A'B の長さ，$\angle \mathrm{A'AB}$ は直線 AB と円周のなす角)



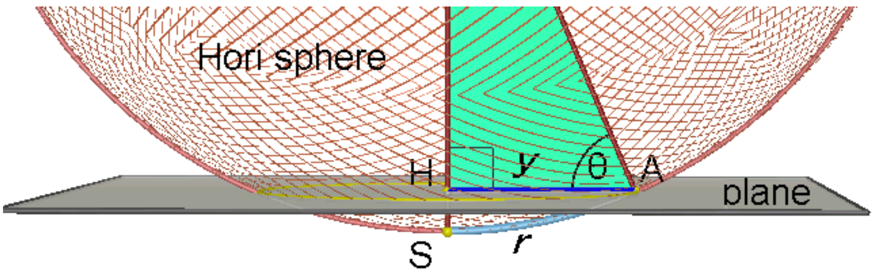
「双曲平面でも，微小距離ではユークリッド的」と考えられるので，Δr が非常に小さい極限では，△AA'B は「斜辺が Δr，θ の対辺が Δy の直角三角形」に限りなく近づく．よって，

$$\frac{dr}{dy}=\frac{1}{\sin\theta}\quad\cdots(イ)$$



中心が O の球が平面 π 上の点 A を通る．O から π に下ろした垂線の足を H，半直線 OH と球の交点を S，弧 AS の長さを r，線分 AH の長さを y とすると，前頁の(ア),(イ)より

$$\begin{cases} \bigcirc y = \dfrac{\bigcirc h}{f(h)} \cdot \dfrac{1}{\tan\theta} & \cdots(\text{ア}) \\ \dfrac{dr}{dy} = \dfrac{1}{\sin\theta} & \cdots(\text{イ}) \end{cases}$$



ここで A と H を動かさないで，球の半径 R を限りなく大きくすると，球は極限球となり，θ は線分 AH に対する平行線角 $\Pi(y)$ になる．一方，極限球はユークリッド的で「$\bigcirc y$ は極限球上で半径が r の円」だから「$\bigcirc y=2\pi r$」．故に「$\dfrac{\bigcirc h}{f(h)}=2\pi c$ (c は定数)」とおくと，

$$r = \frac{c}{\tan\theta} \quad (\text{但し}\,\theta = \Pi(y)) \cdots(\text{ア})'$$

さらに，(イ)の関係は任意の半径の球について成り立つので，極限球についても成りたち，

$$\frac{dr}{dy} = \frac{1}{\sin\theta} \quad \cdots(\text{イ})$$

すなわち $\boxed{r = \dfrac{c}{\tan\theta} \quad \cdots(\text{ア})', \quad \dfrac{dr}{dy} = \dfrac{1}{\sin\theta} \quad \cdots(\text{イ})}$ の方程式を解けばよい．

「$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$」へ代入して，$\theta$ を消去すると，

$$\frac{dr}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{r}{c}\right)^2} \qquad \therefore \int \frac{dr}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{c}\right)^2}}=dy$$

「$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+A$ (A は定数)」だから，

$$\log\left(\frac{r}{c}+\sqrt{1+\left(\frac{r}{c}\right)^2}\right)=\frac{y}{c}+A \qquad \therefore\ \frac{r}{c}+\sqrt{1+\left(\frac{r}{c}\right)^2}=e^{\frac{y}{c}}\times e^A$$

「$r\to 0$ のとき $y\to 0$」だから「$e^A=1$」．ゆえに，

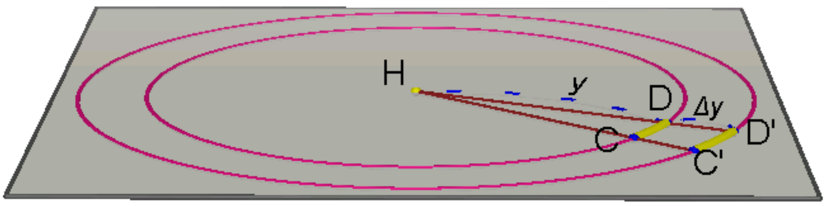
$$\sqrt{1+\left(\frac{r}{c}\right)^2}=e^{\frac{y}{c}}-\frac{r}{c} \qquad \therefore\ r=c\cdot\frac{e^{\frac{y}{c}}-e^{-\frac{y}{c}}}{2}$$

よって，平面上で半径 y の円周の長さを $C(y)$ とすると，「取り敢えず」，

$$C(y)=2\pi r=2\pi c\cdot\frac{e^{\frac{y}{c}}-e^{-\frac{y}{c}}}{2}=2\pi c\cdot\sinh\left(\frac{y}{c}\right) \quad \cdots(\text{ウ})$$

これから, y が非常に大きい時，「半径 y の円弧 CD」と「半径 $y+\Delta y$ の円弧 C'D'」の比は

$$\frac{弧\mathrm{C'D'}}{弧\mathrm{CD}}=\frac{e^{\frac{y+\Delta y}{c}}-e^{-\frac{y+\Delta y}{c}}}{e^{\frac{y}{c}}-e^{-\frac{y}{c}}}\approx\frac{e^{\frac{y+\Delta y}{c}}}{e^{\frac{y}{c}}}=e^{\frac{\Delta y}{c}}$$



ところが，y が非常に大きい極限では，円は極限円に限りなく近づき，

$$\frac{弧\mathrm{C'D'}}{弧\mathrm{CD}}=e^{k\Delta y}$$

これら２式を比べて，$\qquad c=\dfrac{1}{k} \qquad \cdots(\text{エ})$

従って，半径 y の円周の長さ $C(y)$ は，次のように定まります．（C は circumference の略）

$$\boxed{C(y)=\frac{2\pi}{k}\cdot\frac{e^{ky}-e^{-ky}}{2}=\frac{2\pi}{k}\cdot\sinh(ky)\quad\cdots(*)}$$

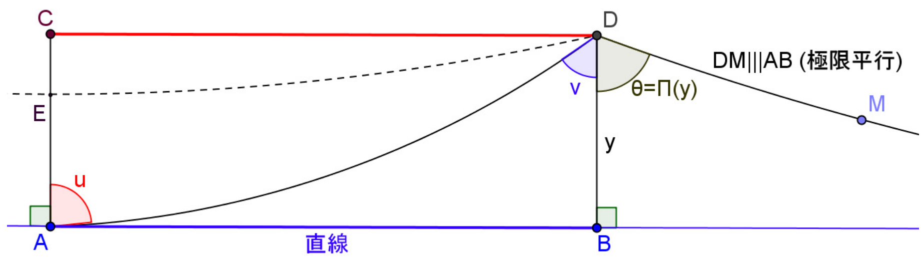
また(イ)より，長さ y とその平行線角「$\theta=\Pi(y)$」の関係は,

$$\frac{1}{\sin(\Pi(y))}=\frac{dr}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{ky}-e^{-ky}}{2}\right)=\frac{e^{ky}+e^{-ky}}{2}=\cosh(ky)$$

前節の「等距離面・正弦定理」と合わせると，「$\theta=\Pi(y)$」のとき，平面 π 上の曲線と，π からの距離が y の等距離面上の　対応する曲線の長さの比が,

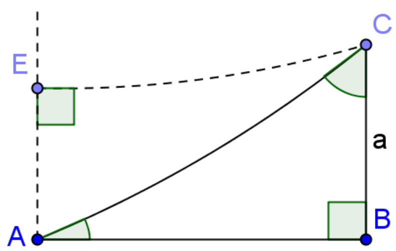
$$\boxed{\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\sin u}{\sin v}=\frac{\sin 90^\circ}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\Pi(y)}=\cosh(ky)\quad\cdots(**)}$$

となる事が分かります．



また 三角形 ABC に於いては「∠CAB=90° − ∠CAE」なので，次の２式も成り立ちます．

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{\cos\mathrm{A}}{\sin\mathrm{C}}=\cosh(ka)\\[2ex]\dfrac{1}{\sin(\Pi(a))}=\cosh(ka)\end{cases}\quad\cdots(***)}$$

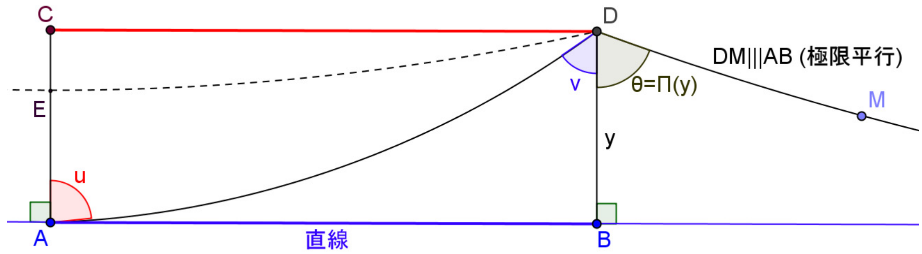


8-4. 「等距離面と平面の長さの比の公式」の直感的な説明

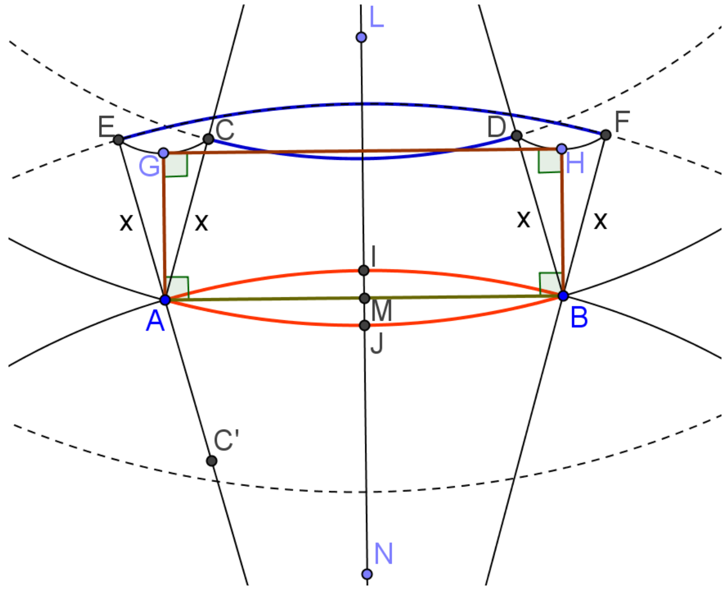
前節より 平面 π 上の曲線と，π からの距離が y の等距離面上の対応する曲線の長さの比は，

$$\boxed{\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}\left(=\frac{\sin u}{\sin v}=\frac{\sin 90^\circ}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\right)=\cosh(ky)=\frac{e^{ky}+e^{-ky}}{2}\quad\cdots(**)}$$

となります． 証明は終わったので，今度は「直感的に」理解してみましょう．(次頁)



線分 AB の中点を M，M を通り AB と垂直な直線を半直線 ML と MN に分ける．下図で AC,BD は ML と極限平行，　EA と FB は MN と極限平行で「$\overline{\mathrm{AG}}=\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BF}}=x$」．G,H はそれぞれ線分 EC,DF の中点とする．
「2 等辺三角形の中線は，底辺を垂直に 2 等分する」から「線分 AG⊥線分 CE」かつ「線分 BH⊥線分 DF」．さらに「∠C'AB=∠CAB」も考慮すると「AG⊥AB かつ BD⊥AB」．



ここで，弧 AJB，CD は軸 ML の極限円の円弧，弧 AIB,EF は軸が MN の極限円の円弧，さらに，GH は直線 AB からの等距離線分とすると，　第 4 章より，

$$\begin{cases}(\text{弧CD})=(\text{弧AJB})\cdot e^{-kx}\\(\text{弧EF})=(\text{弧AIB})\cdot e^{kx}\end{cases}$$

弧 AIB と弧 AJB の長さは等しいから，

$$\frac{(\text{弧CD})+(\text{弧EF})}{2}=(\text{弧AJB})\cdot\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}\quad\cdots①$$

一方，前節の公式(**)より，

$$(\text{等距離線分GH})=\overline{\mathrm{AB}}\cdot\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}\quad\cdots②$$

「$\overline{\mathrm{AB}}\to 0$」の時，円弧 AJB と線分 AB の長さは限りなく等しくなるから，

等距離線分 GH の長さは，「円弧 CD と弧 EF の長さの平均」に限りなく近づく．

弧 EF は上に上がる程長くなり，弧 CD は短くなる．そして「AG⊥AB，HB⊥AB」だから，等距離線分 GH の長さはその中間となる訳です．「なんとなく」納得できます．

8-5. 「円周の長さの式」の直感的な説明

8-3 より，平面上の半径 r の円周の長さを $C(r)$ とすると，（r は半径に取り直しました）

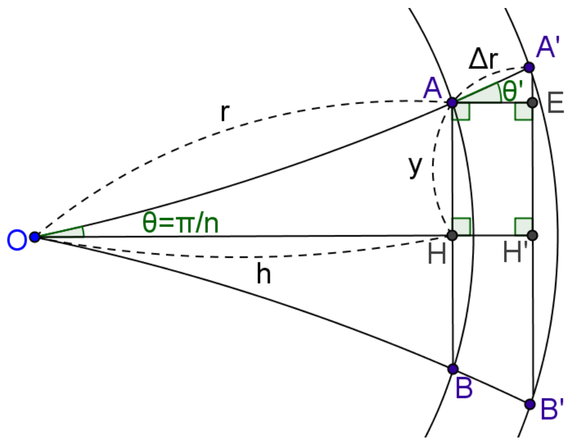
$$\boxed{C(r)=\frac{2\pi}{k}\cdot\frac{e^{kr}-e^{-kr}}{2}=\frac{2\pi}{k}\cdot\sinh\left(kr\right)\quad\cdots(*)}$$

証明は終わったので，今度はこれを「直感的に」理解してみましょう．

中心 O ,半径 r の円に内接する正 n 角形を考え，隣接する頂点を A と B．AB の中点を H,

$\overline{\mathrm{AH}}=y$, $\overline{\mathrm{OH}}=h$，∠AOH= θ とすると，AH⊥AB となるので，$\theta=\pi/n$．　また r を Δr

増加した時の対応する点を A’,B’,H’, 更に, A を通る OH からの等距離線と A’B’の交点を E,
∠EAA’= θ ’とします.



8-2 の「等距離面と平面上の曲線の長さの比の定理(**)」より，

$$\frac{\cos\angle\mathrm{OAH}}{\sin\theta}=\cosh(kh)$$

Δr が非常に小さい時「$\angle\mathrm{OAH}+\angle\mathrm{EAA}'\approx 90^{\circ}$」だから,「$\cos\angle\mathrm{OAH}\approx\sin\theta'$」．よって

$$\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}=\cosh(kh)\quad\cdots①$$

微小な距離では双曲空間もユークリッド的なので，Δr が非常に小さいとき，

$$\overline{\mathrm{AE}'}\approx\overline{\mathrm{AA}'}\times\sin\theta'=(\Delta r)\sin\theta\cdot\cosh(kh)$$

よって，半径 r の円に内接する正 n 角形の周りの長さを $L(n,r)$ とすると，$\Delta r\approx 0$ のとき，

$$\frac{\Delta L}{\Delta r}=\frac{L(n,r+\Delta r)-L(n,r)}{\Delta r}\approx 2n\cdot\frac{\overline{\mathrm{A}'\mathrm{E}}}{\Delta r}=2n\cdot\sin\theta\cdot\cosh(kh)=2n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cosh(kh)$$

n を非常に大きくすると「$r \to h$」，かつ L は円周の長さに限りなく近づくので，

$$\frac{d\ C(r)}{dr} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta L}{\Delta r} = \lim_{n\to\infty} 2n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cosh(kh) = 2\pi\cosh(kr)$$

$$\therefore\ C(r) = \int_0^r 2\pi\cosh(kr)\ dr = \frac{2\pi}{k}\cdot\sinh\left(kr\right)$$

双曲平面で，円周が双曲関数的に長くなる理由が分かった気がします．

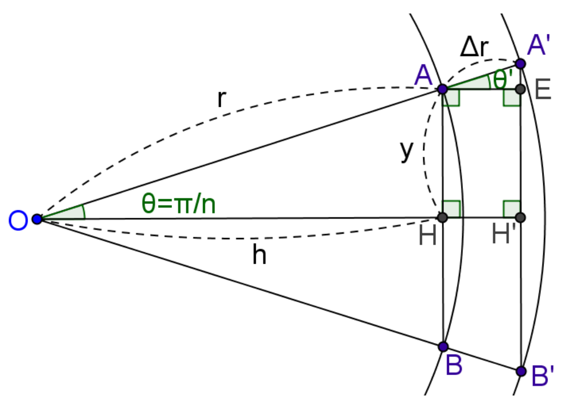
ちなみに，ユークリッド平面の円では，「$\theta = \theta'$」だから，

$$\overline{\mathrm{AE}'} \approx \overline{\mathrm{AA}'} \times \sin\theta' = (\Delta r)\sin\theta$$

$$\therefore\ \frac{\Delta L}{\Delta r} = \frac{L(n, r+\Delta r) - L(n,r)}{\Delta r} \approx 2n\cdot\frac{\overline{\mathrm{A'E}}}{\Delta r} = 2n\cdot\sin\theta = 2n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\therefore \frac{d\ C(r)}{dr} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta L}{\Delta r} = \lim_{n\to\infty} 2n\cdot\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi$$

$$\therefore\ C(r) = \int_0^r 2\pi\ dr = 2\pi r$$



「双曲平面でも，微小距離ではユークリッド的」ですが，双曲平面では，角度がユークリッド的でありません．この事が，ユークリッド幾何との違いを生み出していることが，上の例でも分かります．

8-5-1. 擬球モデルでの円

双曲平面のモデルは色々有りますが，そのうちの 1 つに「**擬球モデル**」があります．擬球モデルでは，長さと角度が「見た目どおり」です．即ち，普通に定規や分度器を当てて測った長さと角度は，そのまま双曲平面での長さと角度になります．例えば，図1での三角形は「二つの角が 35 度ぐらいの直角 2 等辺三角形」に見えますが，実際にその様な「双曲的直角 2 等辺三角形」です．三角形の角度の和は180°より小さく見えます．図1の太線は双曲的直線ですが，頂点から底円に向かって垂直に降りてくる曲線（経線）も直線です．なお，底円と平行な円（緯線）は，極限円です．（他の形の極限円もあります）．

しかし**擬球モデル**は, 双曲平面の一部しか表せません.「双曲平面に開いた細長い窓」です. 例えば図2 ,図3は緑の点が中心の双曲的円ですが， 図3では円の下半分が切れています.

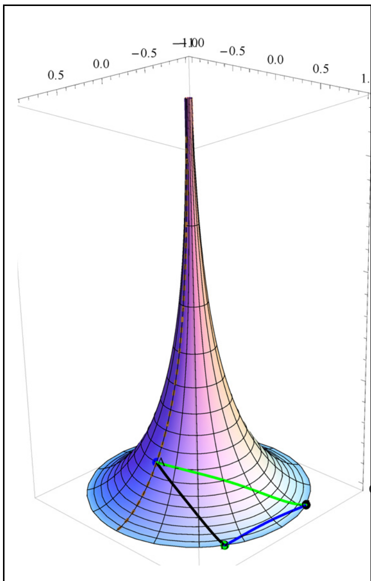
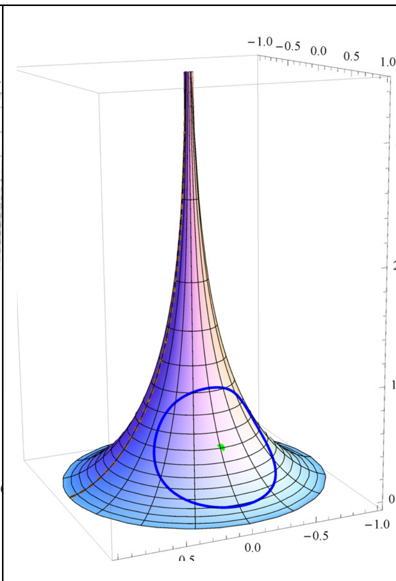
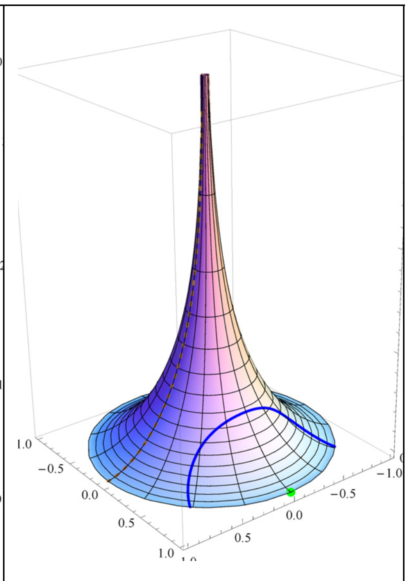
		

図 1. 三角形	図 2. 円	図 3. 円

line&circle.nbp（Mathematica player が必要）

なお，擬球モデルは「見た目どおり」なので，図形の局所的な性質－　例えば「三角形の内角和が180°より小さい事」,「等距離線が対応する線分より如何に長いか？」や「円周が半径につれて如何に大きくなるか？」などを見るには適しています．大局的な事は苦手ですが，上方には無限に伸びているので，「同側内角の和が180°より小さい２直線は交わるか？」などを見ることもできます．しかし 3D の曲面と曲線なので，プログラミングが大変という点が欠点？ です．　なお，擬球モデルの詳細については，擬球モデルのページをご覧ください．*Mathematica6* で作りました．動かして見ることもできます．

8-6. 双曲三角比

8-6-1. 直角三角形の三角比

Bolyai は直角三角形について，次の公式を挙げました.

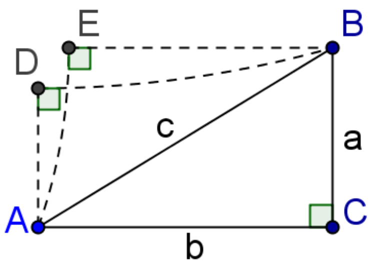
∠Cが直角の直角三角形において，

$\boxed{1}$. $$\frac{\sinh ka}{\sin \mathrm{A}}=\frac{\sinh kb}{\sin \mathrm{B}}\left(=\frac{\sinh kc}{\sin \mathrm{C}}\right)=\sinh kc$$ (正弦定理)

$\boxed{2}$. $$\frac{\cos \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}}\left(=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}\right)=\cosh ka$$

$$\frac{\cos \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}\left(=\frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\overline{\mathrm{BC}}}\right)=\cosh kb$$ (等距離線と線分の長さの比)

$\boxed{3}$. $\cosh ka \cdot \cosh kb=\cosh kc$ (ピタゴラスの定理)



$\boxed{1}$ は，円周の公式：「$C(r)=\dfrac{2\pi}{k}\cdot\dfrac{e^{kr}-e^{-kr}}{2}=\dfrac{2\pi}{k}\cdot\sinh(kr)$」と

円・正弦定理：「$\dfrac{\bigcirc\mathrm{BC}}{\sin \mathrm{A}}=\dfrac{\bigcirc\mathrm{CA}}{\sin \mathrm{B}}=\dfrac{\bigcirc\mathrm{AB}}{\sin \mathrm{C}}$」から明らかです.

$\boxed{2}$ は，8-3 で証明済みです.

残る $\boxed{3}$ ですが, Bolyai は「言われてみれば…」のやり方で，見事に証明しています（次頁）.

なお， x が非常に小さいときは，一般に，

$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\approx\frac{\left(1+x+\dfrac{x^{2}}{2}\right)+\left(1-x+\dfrac{x^{2}}{2}\right)}{2}=1+\frac{x^{2}}{2}$$

よって， a,b,c が非常に小さいときは， $\boxed{3}$ は三平方の定理と一致します.

$$(1+k^{2}a^{2}/2)(1+k^{2}b^{2}/2)\approx 1+k^{2}c^{2}/2 \rightarrow a^{2}+b^{2}\approx c^{2}$$

$\boxed{3}$ の証明

平面 ABC に垂直な平面 π 上の直線を l とします．AC を π 上に置き l と直交させます．BC は π に垂直に立てます．この状態で l に沿って，△ABC を△A'B'C'まで滑らせます．
（下図では，直線は真直ぐに，等距離線は曲げて描いてあります.）

平面 AA'B 上で BB'は AA'からの等距離線だから「等距離線と線分の長さの比の公式」より，

$$\frac{\text{等距離線分BB'}}{\overline{\mathrm{AA}'}}=\cosh(kc)$$

同様に，CC'は AA'からの等距離線だから，

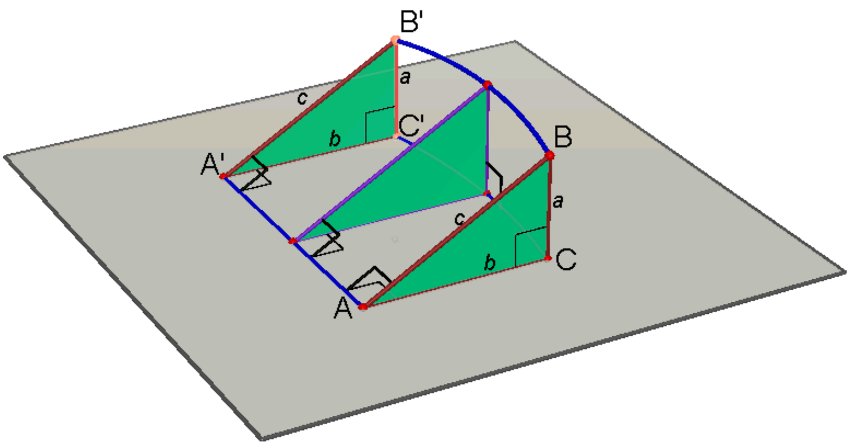
$$\frac{\text{等距離線分CC'}}{\overline{\mathrm{AA}'}}=\cosh(kb)$$

さらに BB'は，CC'からの等距離曲線だから，（π からの等距離面上の曲線だから）

$$\frac{\text{等距離線分BB'}}{\text{等距離線分CC'}}=\cosh(ka)$$

以上より，

$$\cosh(ka)\cosh(kb)=\cosh(kc)$$



Bolyai's_pythagoras.cg3

これを読んだときは，私はあっけに取られてしまいました.「こんなの有り？」と言う感じです.
「言われてみれば，なるほど…」と言う証明だと思います．こういう証明が多いので，Bolyai の本は非常に面白いです.

8-6-2. 一般の三角形の三角比

次の**球面幾何**の三角比の定理は次の 3 つでした.

$$\begin{cases} \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos \mathrm{A} & (\text{長さの余弦定理}) \\ \cos \mathrm{A}=-\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}+\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}\cos a & (\text{角度の余弦定理}) \\ \dfrac{\sin a}{\sin \mathrm{A}}=\dfrac{\sin b}{\sin \mathrm{B}}=\dfrac{\sin c}{\sin \mathrm{C}} & (\text{正弦定理}) \end{cases}$$

双曲平面の三角比の公式は，これと酷似しています.（簡単のため，ここでは「$k=1$」としています. $k\neq 1$ の時は「$\cosh(a)\to\cosh(ka)$, $\sinh(a)\to\sinh(kb)$」などと変えるだけです.)

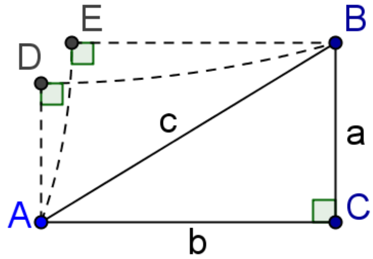
$$\begin{cases} \cosh a=\cosh b\cdot\cosh c-\sinh b\cdot\sinh c\cdot\cos \mathrm{A} & (\text{長さの余弦定理}) \\ \cos \mathrm{A}=-\cos \mathrm{B}\cdot\cos \mathrm{C}+\sin \mathrm{B}\cdot\sin \mathrm{C}\cdot\cosh a & (\text{角度の余弦定理}) \\ \dfrac{\sinh a}{\sin \mathrm{A}}=\dfrac{\sinh b}{\sin \mathrm{B}}=\dfrac{\sinh c}{\sin \mathrm{C}} & (\text{正弦定理}) \end{cases}$$

さて，8-6-1 の $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$ から，計算だけで，一般の三角形の三角比の公式を導けます. (Bolyai は導いていません.「当然」と言うことなのでしょう.）

まず，正弦定理は 8-6-1 で 既に証明済みです.

次に「長さの余弦定理」を証明します.「$k=1$」のとき，8-6-1 から次の公式が得られます.

$$\begin{cases} \sin \mathrm{A}=\dfrac{\sinh a}{\sinh c}\cdots①,\quad \sin \mathrm{B}=\dfrac{\sinh b}{\sinh c}\cdots② & (\text{sine公式}) \\ \dfrac{\cos \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}}=\cosh a\cdots③,\quad \dfrac{\cos \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}=\cosh b\cdots④ & (\text{等距離線と線分の長さの比}) \\ \cosh a\cdot\cosh b=\cosh c \quad\cdots⑤ & (\text{ピタゴラスの定理}) \end{cases}$$



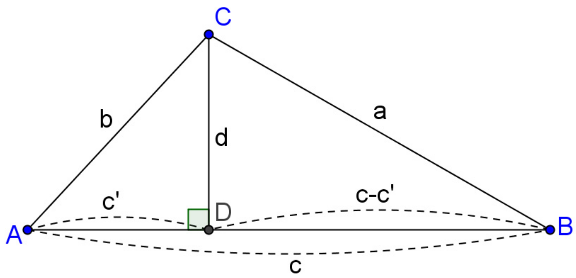
これからまず，直角三角形に関する公式が導かれます．②，③，⑤より，

$$\cos \mathrm{A} = \cosh a \cdot \frac{\sinh b}{\sinh c} = \frac{\cosh c}{\cosh b} \cdot \frac{\sinh b}{\sinh c} = \frac{\sinh b}{\cosh b} \cdot \frac{\cosh c}{\sinh c} = \frac{\tanh b}{\tanh c} \cdots ⑥ \qquad \text{(cosine 公式)}$$

①，②，③より，

$$\tan \mathrm{A} = \frac{\sin \mathrm{B}}{\cos \mathrm{A}} \cdot \frac{1}{\sin \mathrm{B}} \cdot \sin \mathrm{A} = \frac{1}{\cosh a} \cdot \frac{\sinh c}{\sinh b} \cdot \frac{\sinh a}{\sinh c} = \frac{\tanh a}{\sinh b} \cdots ⑦ \qquad \text{(tangent 公式)}$$

次に「cosine 公式」と「ピタゴラスの定理」を用いて，「長さの余弦定理」を証明します．
（以下は「ユークリッド幾何から現代幾何へ」小林昭七著 に拠ります．）



C から AB に下ろした垂線の足を D，$\overline{\mathrm{AD}} = c'$, $\overline{\mathrm{CD}} = d$ とすると，ピタゴラスの定理より，

$$\begin{cases} \cosh b = \cosh d \cdot \cosh c' \\ \cosh a = \cosh d \cdot \cosh(c - c') \\ \qquad\quad = \cosh d (\cosh c \cdot \cosh c' - \sinh c \cdot \sinh c') \end{cases}$$

2 番目の式を 1 番目の式で割って，

$$\frac{\cosh a}{\cosh b} = \cosh c - \sinh c \cdot \tanh c'$$

ここで⑥より「$\cos \mathrm{A} = \dfrac{\tanh c'}{\tanh b} \Longleftrightarrow \tanh c' = \tanh b \cdot \cos \mathrm{A}$」だから，

$$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos \mathrm{A} \qquad \text{(長さの余弦定理)}$$

「角度の余弦定理」は「長さの余弦定理」から計算のみで導かれます．小林先生の本をご覧になって下さい．なお，球面幾何と同様に「双対三角形」（角と辺を逆にした三角形）を使って導くことも出来ます．Lobachevsky の本，または，深谷先生の本をご覧ください．

[注] x が非常に小さいときは，一般に，

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx x$$

が成り立ちます．

ゆえに，a, b, c が非常に小さいときは「$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos \mathrm{A}$」は，次の様に近似され，通常の余弦定理と一致します．

$$1 + \frac{1}{2}a^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2}b^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}c^2\right) - bc\cos \mathrm{A} \Longleftrightarrow a^2 \approx b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$$

また「$\cos \mathrm{A} = -\cos \mathrm{B} \cdot \cos \mathrm{C} + \sin \mathrm{B} \cdot \sin \mathrm{C} \cdot \cosh a$」は次の様に近似され「三角形の内角の和が 180°」を表します．

$$\begin{aligned} \cos \mathrm{A} \approx -\cos \mathrm{B} \cdot \cos \mathrm{C} + \sin \mathrm{B} \cdot \sin \mathrm{C} &\Longleftrightarrow \cos \mathrm{A} \approx -\cos(\mathrm{B} + \mathrm{C}) \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} \approx 180^\circ \end{aligned}$$

すなわち，辺の長さが短いときは，双曲三角形はユークリッド三角形と一致します．以上は，球面の三角形でも同様です．

8-7．「平行線角の公式」の Bolyai による導き方

8-3 で微分を用いて「平行線角と長さの関係公式」と「円周の長さ」の公式を導きましたが，これは Bolyai の方法と違っています．Bolyai は後のセクションで面積や体積を求める時は微分や積分も用いているのですが，三角比の公式を導くまでは，（等距離線に関する定理で微分的な考えも一部使っていますが，それ以外は）幾何的な方法に従っています．私が微分を用いたのは，自分で最初に「空間論」を読んだとき，そこで躓いてしまったからですが，（つまりちょっと難しいのですが）非常に味わうべき証明なので，ここで Bolyai の証明（「空間論」の§28 と§29）を紹介します．

8-7-1.「軸が共通な２つの極限円の弧長の比」と，角度の関係

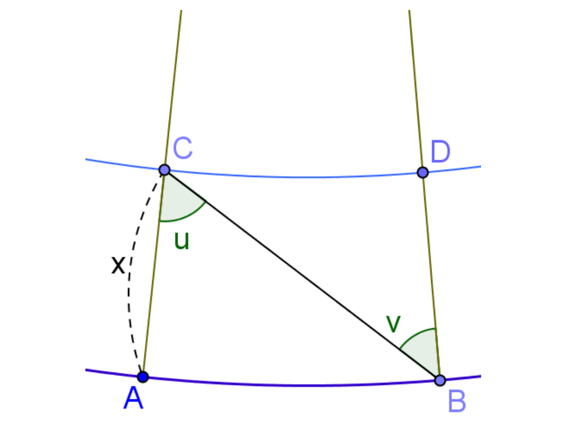
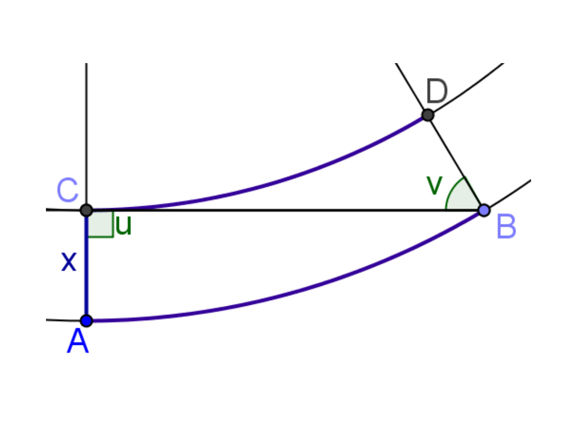
軸が共通な２つの極限円があり，A,B と C,D は各々その上の２点で，AC，BD はその軸とする．このとき $\overline{\mathrm{AC}}=x,\ \angle\mathrm{ACB}=u,\ \angle\mathrm{CBD}=v$ とすると，

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\sin v}{\sin u}\ \left(=e^{-kx}\right)$$

特に $u=90^{\circ}$ のときは，

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\sin v=e^{-kx}$$

注)但し x は「直線に沿って測った距離」，$\overline{\mathrm{AB}},\overline{\mathrm{CD}}$ は「極限円に沿って測った距離」とします．また，右辺の値が「e^{-kx}」となることは，第４章で説明済みです．

一般の場合	$u=90^{\circ}$ のとき
	

[証明] B,C から軸 AC,BD に下ろした垂線の足をそれぞれ F,G とする．円・正弦定理より，

$$\frac{◯\mathrm{FB}}{◯\mathrm{BC}}=\sin u,\quad \frac{◯\mathrm{GC}}{◯\mathrm{BC}}=\sin v$$

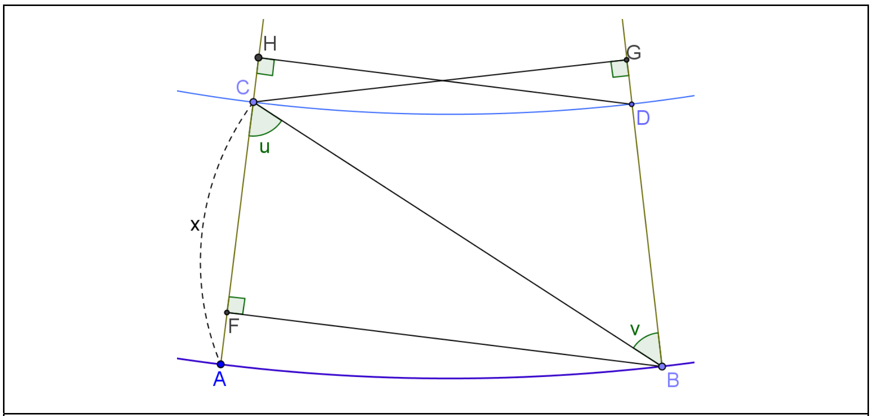
$$\therefore \frac{◯\mathrm{GC}}{◯\mathrm{FB}}=\frac{\sin v}{\sin u}\cdots①$$

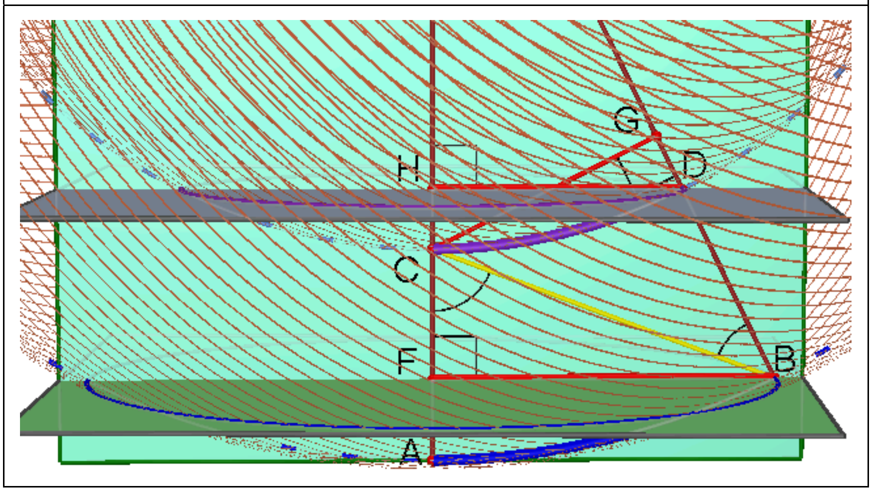
しかし，◯FB と◯AB は同じ円なので（下図），◯FB＝◯AB．同様に◯GC＝◯DC．故に ①より，

$$\frac{◯\mathrm{DC}}{◯\mathrm{AB}}=\frac{\sin v}{\sin u}\quad\cdots①'$$

さらに「極限球上では，ユークリッド的」で，「円周と直径の比は π (≒3.14)」となるから，

$$\frac{\sin v}{\sin u}=\frac{◯\mathrm{DC}}{◯\mathrm{AB}}=\frac{2\pi\cdot\overline{\mathrm{CD}}}{2\pi\cdot\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}\qquad \text{(Q.E.D)}$$



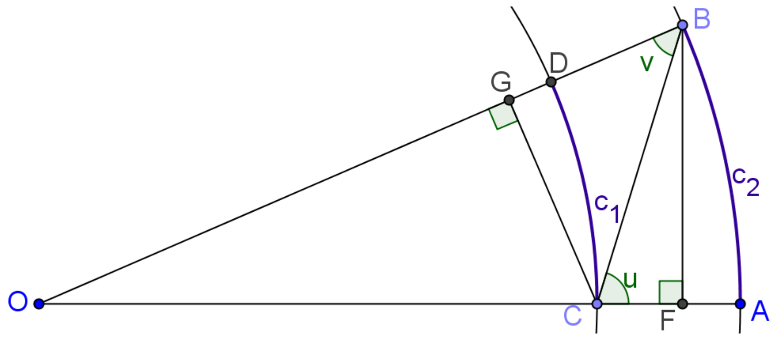


horicircle&angle.cg3

[注 1]　ユークリッド平面上の円でも　同じ関係が成り立ちます.

下の円はユークリッド平面上の円とします. 弧 CD, AB の長さをそれぞれ c_1, c_2 とすると,

$$c_1 : c_2 = \overline{\mathrm{OC}} : \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{CG}} : \overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{CB}} \sin v : \overline{\mathrm{CB}} \sin u = \sin v : \sin u$$

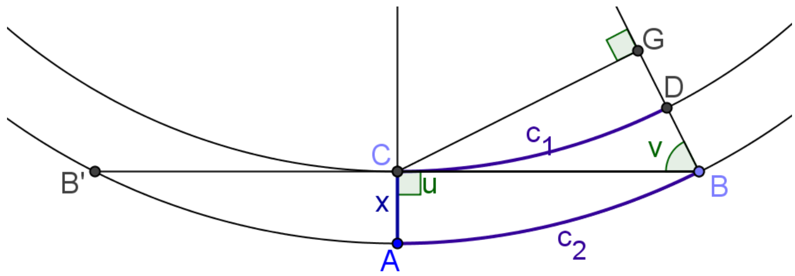


面白いことに，双曲平面上の円では，この関係は成り立ちません．$(c_1 : c_2 \neq \overline{\mathrm{OC}} : \overline{\mathrm{OB}})$

[注２]　双曲空間の極限球に戻ります．公式で，特に $u = 90^\circ$ のときは,

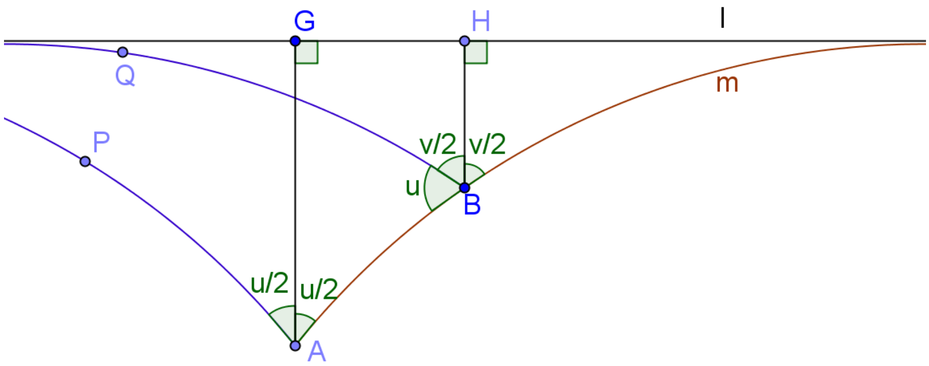
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin v}{\sin u} = \sin v = e^{-kx}$$

となります．この時，v は線分 BC に対する平行線角 $\Pi(\mathrm{BC})$ と一致しています!
即ち，この公式は，平行線角と x=AC の関係を与えています．平行線角と線分 BC の長さの関係を求めるために，Bolyai は 直線 BC を軸とする極限円を考えます.（次頁）

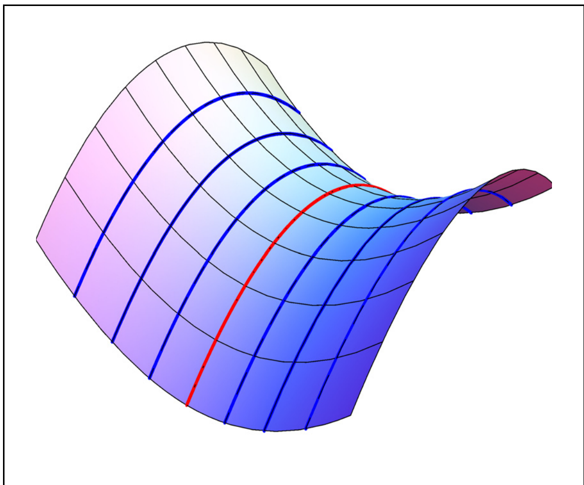


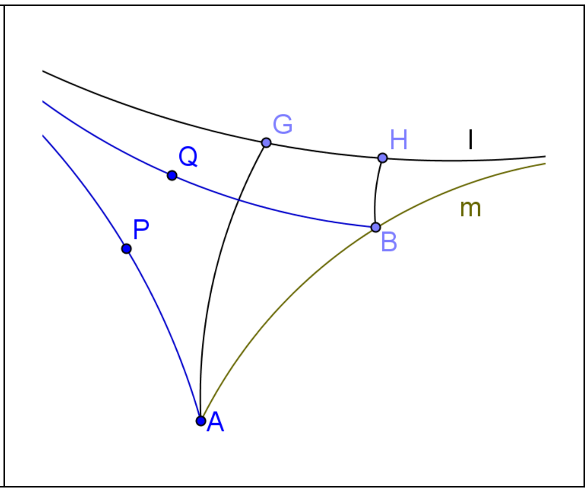
8-7-2.　平行線角と線分の長さの関係式

まず，直線 l 上の点 G で立てた垂線上に，「$\Pi(AG)=u/2\ (0<u<90^\circ)$」となる点 A をとります．次に A から引いた l への極限平行線を m とし，l と m 上に「$\Pi(BH)=v/2$ $(u+v=180^\circ)$」となる点 H と B をそれぞれ取ります．（$0^\circ<u<90^\circ<v<180^\circ$ なので，この様な点は必ず取れます.）　次に m を AG と BH に関し対称移動すると，図の様に「$\angle HBQ=v/2$，$\angle GAP=u/2$」で「$u+v=180^\circ$」だから「$\angle PAB=\angle QBA=u$」かつ，直線 AP, BQ は l と極限平行になります．即ち，AB, AP,BQ は「極限 2 等角三角形」を作ります．(図では，直線 m とその像は「曲げて」描きました．）

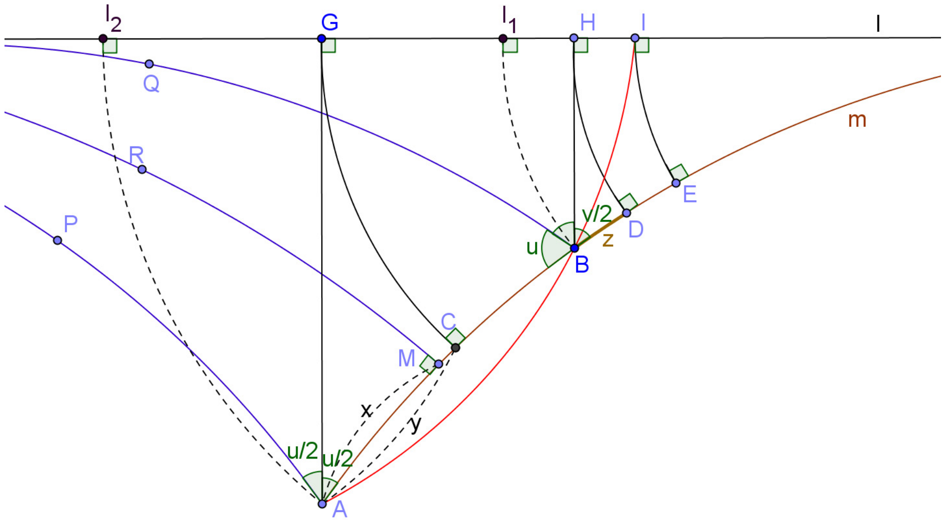


[ちょっと一言]イメージが持ち辛い場合は，左下のような曲がった曲面上の，右下のような図をイメージしてみて下さい．（本当は，直接，左図の上に描きたかったのですが，面倒なのでこれで勘弁してください．また下図は擬球ではないので，極限円は存在しません．直線や等距離線は描けます.）





(続き) 次に AB の中点 M を通り AP と平行な直線を MR，軸が MR で点 A を通る極限円 K を考えると，AM=BM，MR⊥AB より，この極限円は B も通ります．そして K と l の交点を I とします．さらに「G,H,I を通る軸が HI の極限円」と m の交点を，それぞれ C,D,E とし，「B,A を通る軸が BE の極限円」と l の交点を それぞれ I_1, I_2 とします．



MR と HG は極限平行なので K は「軸が HG の極限円」，一方, BI_1 は「軸が HI の極限円」で「BH ⊥ l」だから，極限円弧 BI と BI_1 は BH に関し対称．よって「$HI = HI_1$」．更に IE, HD, I_1B は軸が共通の極限円だから「$HI = DE$, $I_1H = BD$」．

故に，

$$\overline{BD} = \overline{DE} \qquad \cdots ①$$

同様な理由で，

$$\overline{AC} = \overline{CE} \qquad \cdots ②$$

よって「$\overline{AM} = x$, $\overline{AC} = y$, $\overline{BD} = z$」とすると，「$\overline{AE} = 2y = 2x + 2z$」

$$\therefore\ x = y - z \qquad \cdots ③$$

ここで 8-7-1 の「極限円の弧長に関する定理」より，

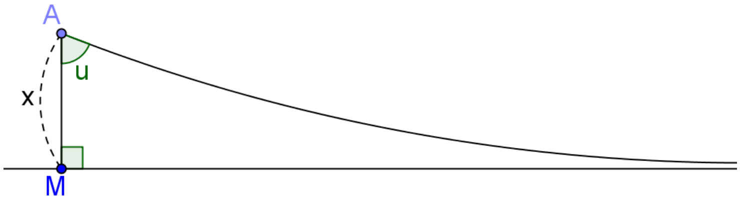
$$\begin{cases} \dfrac{弧DH}{弧BI_1} = \sin\dfrac{v}{2} = e^{-kz} \\ \dfrac{弧CG}{弧AI_2} = \sin\dfrac{u}{2} = e^{-ky} \end{cases} \qquad \cdots ④$$

③，④より，x と u の 次の関係式が得られます．

$$e^{-kx} = e^{k(z-y)} = \frac{e^{-ky}}{e^{-kz}} = \frac{\sin\frac{u}{2}}{\sin\frac{v}{2}} = \frac{\sin\frac{u}{2}}{\sin\left(90^\circ - \frac{u}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}} = \tan\frac{u}{2} \quad \cdots(\#)$$

ところが「$u=\Pi(x)$」なので，「平行線角と線分の長さの関係」が導かれた事になります．
即ち，

$$\boxed{e^{-kx}=\tan\frac{u}{2}=\tan\frac{\Pi(x)}{2}\quad\cdots(\#)}$$



8-7-3. 等距離線と線分の公式&円周の公式.

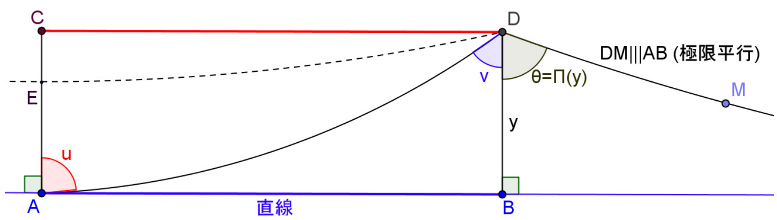
(#)から，

$$\begin{cases}\sin u=2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}=\dfrac{2\tan\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}}=\dfrac{2e^{-kx}}{1+e^{-2kx}}=\dfrac{2}{e^{kx}+e^{-kx}}\\[2ex]\tan u=\dfrac{2\tan\frac{u}{2}}{1-\tan^2\frac{u}{2}}=\dfrac{2e^{-kx}}{1-e^{-2kx}}=\dfrac{2}{e^{kx}-e^{-kx}}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{\sin u}=\dfrac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}=\cosh(kx)\quad\cdots⑤\\[2ex]\dfrac{1}{\tan u}=\dfrac{e^{kx}-e^{-kx}}{2}=\sinh(kx)\quad\cdots⑥\end{cases}$$

⑤は 8-3 で証明した式：$\boxed{\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin u}{\sin v}=\dfrac{\sin 90^\circ}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\Pi(y)}=\cosh(ky)}$ と一致します．

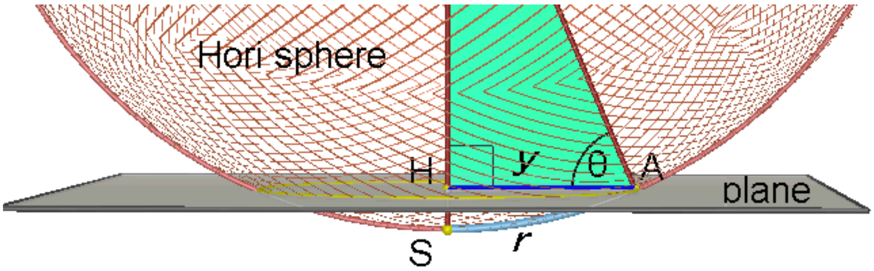
このようにして，Bolyai は「等距離線と線分の長さの比の公式」を導きました．



更に 8-3 の関係式：「$r = \dfrac{c}{\tan\theta}$ （ $\theta = \Pi(y)$, c は定数）」と⑥から，半径 y の円周の式：

$$C(y) = 2\pi r = 2\pi c \cdot \sinh ky$$

も導くことができます．（r は下図の極限球の弧の長さ， y は平面上の円の半径の長さ.）



この様にして, Bolyai は, 微分を使うことなく, 三角比の公式を全て導きました.（§25~31）

この後，彼は微分や積分を駆使して面積や体積を求めています．（§32）
さらに，ある条件の下で,「円の等積変形（円の面積と同じ面積の正方形を作図すること)」ができる事も示しています．（§43）

これらについては，後ほど，アップロードするつもりです.