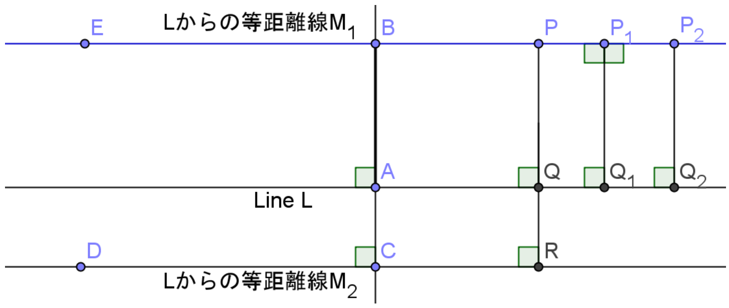
7．等距離線，等距離面

(この節では，等距離線は真直ぐに，等距離線と比較するときは，直線は曲げて描いてあります．)

7-1．等距離線，等距離面の定義

平面上で考えます．L をその上の双曲的直線とします．このとき「直線 L に対して直角に立てた，真っ直ぐな棒の一端 A を L 上で滑らせたとき，棒のもう一方の端 B の描く軌跡」が「L からの**等距離線**」です．この等距離線 M_1 上の任意の点を P，P から L に下ろした垂線の足を Q とすると，P から L までの距離($\overline{PQ}$)は一定です． さらに $\overline{QQ_1} = \overline{Q_1Q_2}$ となる点 Q_1, Q_2 を L 上に取ると「擬四角形 QQ_1P_1P≡擬四角形 $Q_1Q_2P_2P_1$」となるので，

$\angle Q_1P_1P = \angle Q_1P_1P_2 = 90^\circ$． ゆえに PQ は L の等距離線とも直交します．

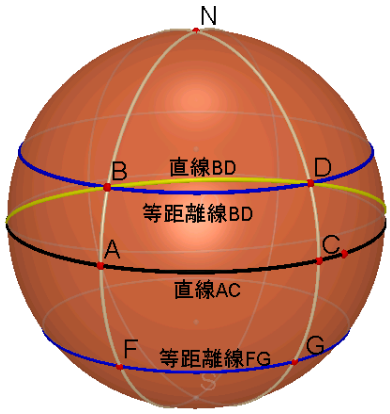


注）擬四角形 QQ_1P_1P は，辺 QQ_1, Q_1P_1, QP は直線で，辺 PP_1 は等距離線の四角形です．「2 点を通る等距離線はただ一通りに決まる」ので「擬四角形 QQ_1P_1P≡擬四角形 $Q_1Q_2P_2P_1$」です．

一方「$\angle PP_1P_2 = 180^\circ$」なので「$P_1Q_1 \perp PP_2$」です．

ここでもう 1 本，直線 L からの等距離線 M_2 を考え，A,Q から M_2 に下ろした垂線の足を C,R とすると「$\overline{PR} = \overline{BC}$ (一定)，$BC \perp M_1$，$BC \perp M_2$」です．故に，直線 L からの等距離線は無数にありますが，これらの等距離線の間の距離も一定です．同様に「L からの等距離線」から等距離な曲線は，やはり「L からの等距離線」です．**即ち等距離線は，直線を頭**（かしら）**としたグループを作り 1 つのグループには，直線は 1 本しか有りません．**（「親分の子分の子分」は，やはり「親分の子分」で，親分は一人しか居ません．）**そして，同じグループに属する等距離線と直線は，無限遠点を共有します．（同じ点に向かって遠ざかって行きます.）**

以上の事は，球面上の等距離線を考えると容易に納得できます．球面でも等距離線は考えられ，例えば赤道からの等距離線は緯線です．緯線はグループを作っています．このグループには直線は 1 本だけです．（もちろん他の大円を取ると，その大円に対する等距離線のグループが作れます.）



［参考］放物的移動と双曲的移動

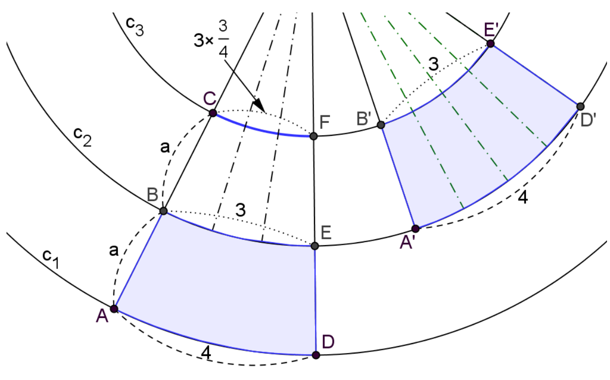
等距離線は「**直線**からの距離が等しい点の集合」ですが，「**極限円**からの距離が等しい点の集合」は，元の極限円と軸が同じ極限円となります．（下図は，極限円&その軸で第 4 章と同じ図）

言い換えて見ましょう．今，次の二つの軌跡を考えます．

1. 鉛筆の一方の端を直線上に置き，垂直を保ちつつ動かした時，他方の端 C の描く軌跡
2. 鉛筆の一方の端を極限円上に置き，垂直を保ちつつ動かした時，他方の端 C の描く軌跡

[1]の場合は「等距離線」で，[2]の場合は「極限円」です．

[1]の場合，C の移動を「**双曲的移動**」，[2]の場合は「**放物的移動**」と呼びます．（これらは後世の用語で，Bolyai や Lobachevsky の言葉ではありません.）これらに「**回転移動**」を合わせた変換が，双曲幾何の「向きを変えない合同変換」の代表例です．（平行移動はありません.）



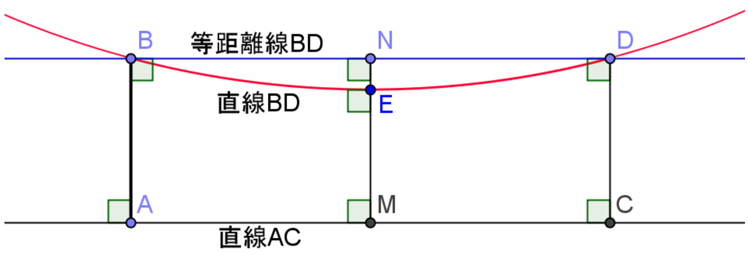
7-2. 直線との関係

ユークリッド平面では, L からの等距離線は L と平行な直線です. しかし, 双曲平面では, 等距離線は双曲的直線にはなりません. なぜなら「双曲四角形の内角和は 360 度より小さい」ので, 曲線 BD を直線 AC からの等距離線とすると, 直線 BD は B と D の間では「等距離線の内側」に入り, 外側では「等距離線の外側」を走ります. 以上は, 第一章の定理:

II. 2 直線が超平行の時－

2 直線の距離が最小となる点が存在する. (共通垂線の足) その点からは, どちら側に進んでも, 互いの距離は限りなく離れる.

からも明らかです. (ここで共通垂線の足となるのは線分 AC, BD の中点 M, E です.)



なお球面では「三角形の内角和は 360 度より大きい」ので, 直線 BD は B と D の間では「等距離線の外側」を走ります. (上図)

7-3. 等距離線分と線分の長さの比

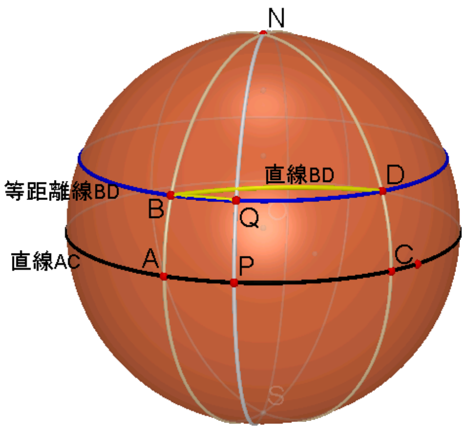
下図の球面で，等距離線 BD 上に点 Q を，直線 AC 上に点 P を，PQ⊥AC となるように取ります．このとき，明らかに，

$$\overline{\mathrm{AP}} : \widetilde{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{AC}} : \widetilde{\mathrm{BD}}$$

（$\overline{\mathrm{AP}}$，$\overline{\mathrm{AC}}$ は「直線に沿って測った長さ」，$\widetilde{\mathrm{BQ}}$，$\widetilde{\mathrm{BD}}$ は「等距離線に沿って測った長さ」とします．

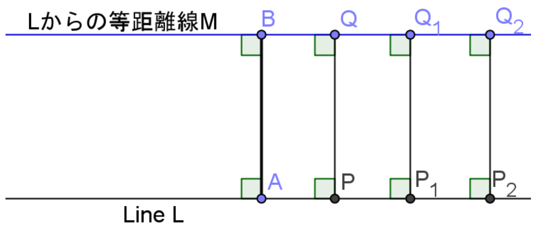
等距離線は，直線の内側や外側に出たり入ったりするので，この記号を選びました．）

即ち，線分 AP とその等距離線分 BQ の長さの比は，直線と等距離線の間の距離 AB のみに依存します．線分 AP が長くなったり，短くなってもその比は変わりません．



これと全く同じ性質が，双曲平面上の直線とその等距離線に関しても成り立ちます．
下図で A,Q,Q_1,Q_2 は等間隔に並ぶとすると，図の 4 つの擬四角形は全て合同となるので，

B,P,P_1,P_2 も等間隔に並びます．よって，$\overline{\mathrm{AP}} : \widetilde{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{AP}_1} : \widetilde{\mathrm{BQ}_1} = \overline{\mathrm{AP}_2} : \widetilde{\mathrm{BQ}_2}$ です．

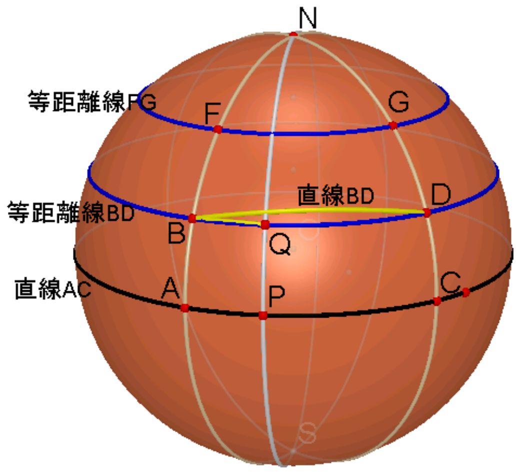


即ち，双曲平面でも，線分 AP とその等距離線分 BQ の長さの比は，直線と等距離線の間の距離 AB のみに依存します．

7-4. 等距離線の長さの変化

球面上の「赤道からの等距離線の長さ」は，赤道から遠ざかるにつれ，減少します．

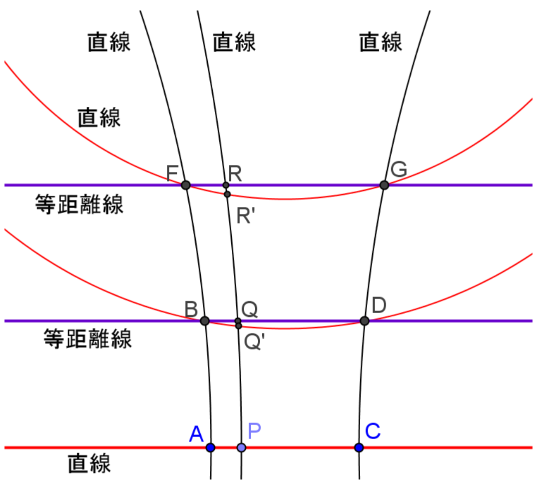
即ち，下図で $\overline{\mathrm{AC}} > \widetilde{\mathrm{BD}} > \widetilde{\mathrm{FG}}$ です．

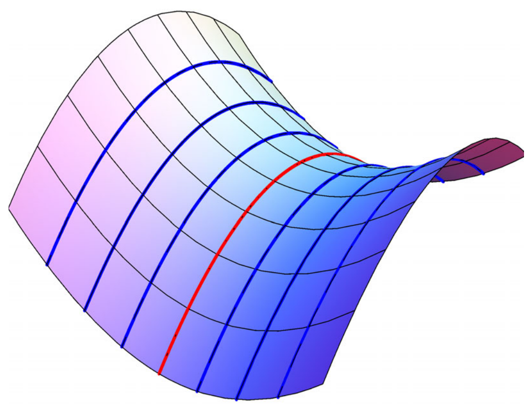


双曲平面では「直線 L からの等距離線の長さ」は，L から遠ざかるにつれ，増加します．

なぜなら，2 直線が超平行の時は，

> 2 直線の距離が最小となる点が存在する．（共通垂線の足）その点からは，どちら側に進んでも，互いの距離は限りなく離れる．（第 1 章）





［イメージ図］距離は正確ではありません，特に左図では 角度は全く正しくありません．

故に直線 AC を「直線 AB と CD の共通垂線」とすると，「 $\overline{\mathrm{AC}} < \overline{\mathrm{BD}} < \overline{\mathrm{FG}}$ 」です．即ち，「直線 L からの線分の長さ」は，L から遠ざかるにつれ増加します．それにつれ「直線 L からの等距離線の長さ」も，L から遠ざかるにつれ増加します．

（補足）等距離線と線分の長さの比は，互いの距離だけによるので，　$\widetilde{BD}:\widetilde{FG}=\widetilde{BQ}:\widetilde{FR}$.

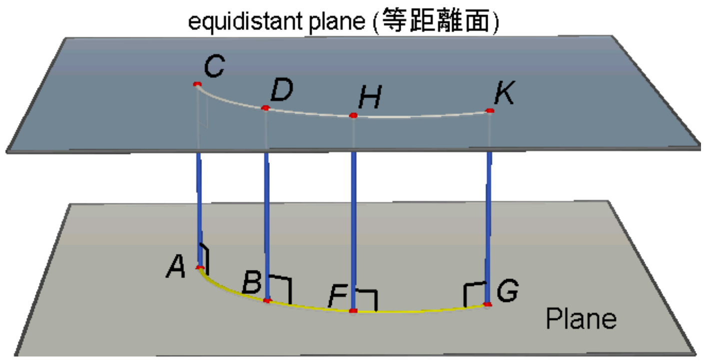
ところが A が P に非常に近いとき，等距離線と直線は一致するので，$\widetilde{BQ}:\widetilde{FR}=\overline{BQ}:\overline{FR}$

「直線 L からの線分の長さ」は，L から遠ざかるにつれ増加するので，　$\overline{BQ}<\overline{FR}$

したがって，$\widetilde{BD}<\widetilde{FG}$　となります．（証明終）

7-5．等距離面

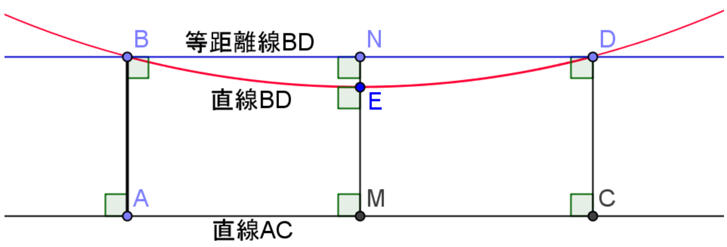
直線からの等距離線と全く同様に，平面からの等距離面が考えられます．

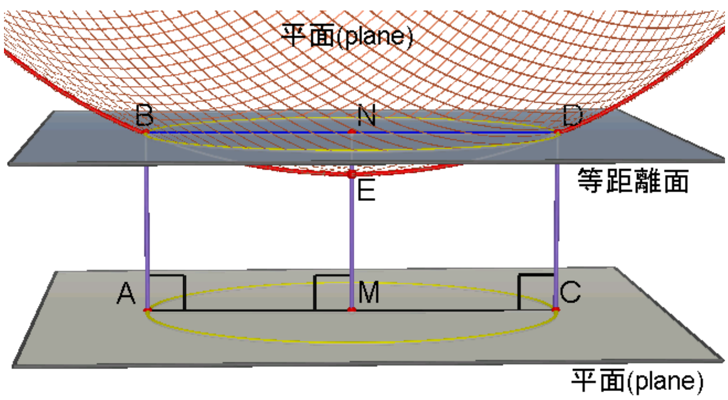


「平面 S に対して垂直に立てた，真っ直ぐな棒の一端 P を S 上で滑らせたとき，棒のもう一方の端 Q の描く軌跡」が「S からの**等距離面**」です．等距離線と同様に，等距離面もグループを作ります．そして，同じグループに属する等距離線と直線は，無限遠直線を共有します．（同じ地平線に向かって遠ざかっている様に見えます.）残念ながら，等距離線とは異なり，球面上に等距離面を取ることは出来ません．

また 7-2 の図を直線 NM を軸にして回転すると，円 K を共有する等距離面と平面が得られます．そして円 K を通る平面は，円の内部では，等距離面より下側となり，円の外部では等距離面より上側になります．

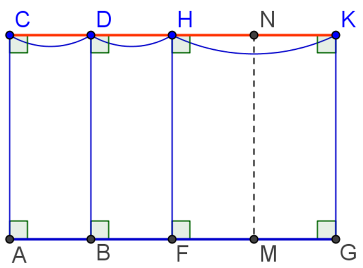
（注）図には有りませんが，「**E で平面と接し，軸が直線 MN の極限球」は，さらに平面の上側にあります．また円 K を共有する極限球は，K の内部では平面より更に，M の方に落ち込みます．以上は平面と球の関係から明らかです.**）

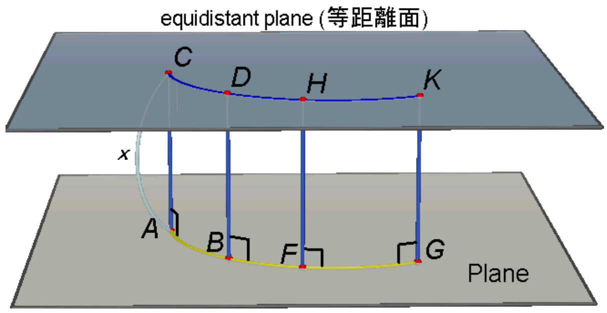




7-6. 平面と等距離面上の 曲線の長さの比

7-3 より，線分 AB と対応する等距離線分 CD の対応する長さの比は一定です．（$\overline{\mathrm{AC}}$ のみに依存します.）　よって AB が直線でなく「平面曲線 L」のときでも，L を微小線分に分割すれば　その各々の微小線分に関し同じ議論が出来るので，**L と L からの等距離曲線 L' の長さの比は一定で，平面と等距離面の距離($\overline{\mathrm{AC}}$)のみに関係します.**

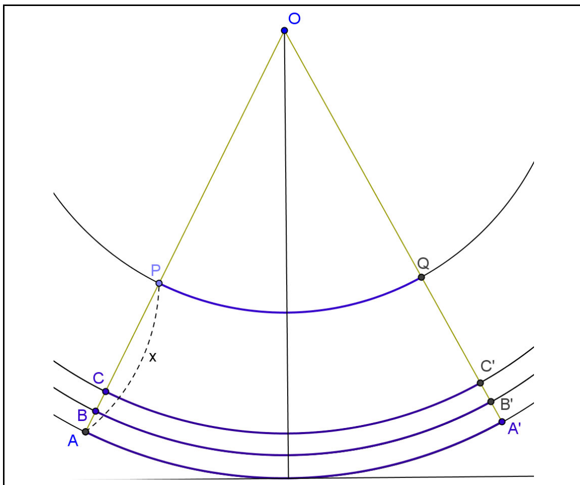




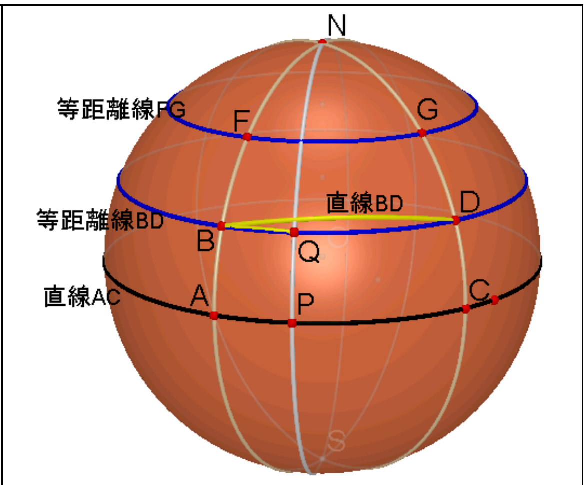
軸を共有する極限球間の対応する弦の長さの比も，極限球の距離 x のみに関係し，その比は，指数関数 e^{-kx} になります（第四章）．即ち左下図で「$\mathrm{AP}=x$」とすると，

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AA}'}=e^{-kx}\quad (\text{但し } k>0)\quad \cdots(*)$$

これは，極限円は「平ら」で，極限円 AA'上の弧と BB'上の弧は長さが等しければ重ね合わせることができたからでした．一方，等距離面や等距離線の場合は，緯度が違えば，長さが等しい 2 本の経線は重ね合わせることはできません．曲率が異なるからです．　したがってその比は(*)とは異なります.



軸が共通の極限円間の弦の長さの変化(極限球)



同じグループに属する等距離線の長さの変化（球）

それを導く事はかなり長くなるので，次章に廻すとして，ここでは結果だけを述べます．

左下図の球面上で「弧 AB の長さを x」とすると，

$$\frac{\text{等距離線分の長さ}}{\text{線分の長さ}}=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}=\cos\angle\mathrm{AOB}=\cos x \quad \cdots(*)$$

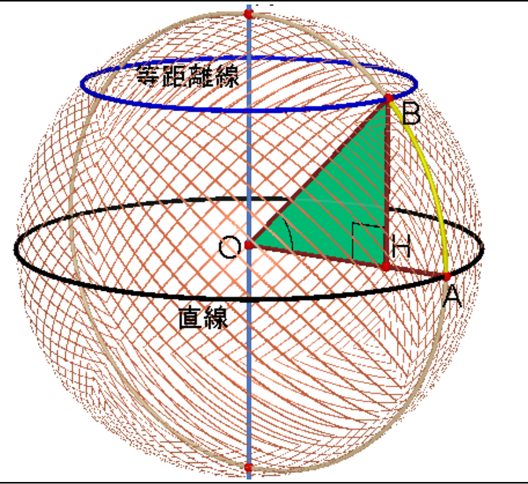
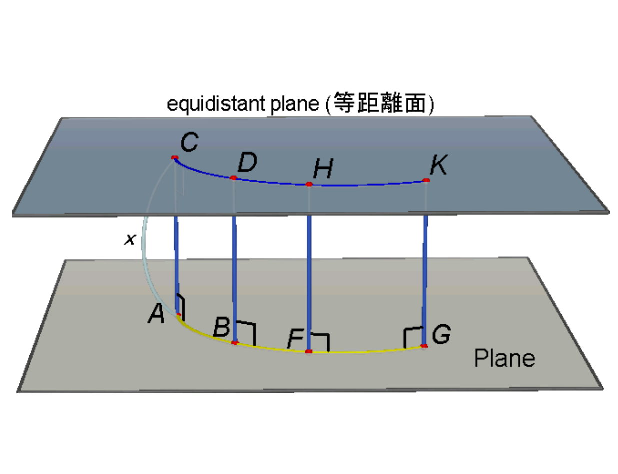
一方，右下図で「等距離面と平面の距離を x」とすると，

$$\boxed{\frac{\text{(対応する)等距離面上の曲線長}}{\text{平面上の曲線長}}\left(=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AF}}=\frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{AG}}=\cdots\right)=\cosh(kx)}$$

となります．ここで　「$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$」　で，$|x|$の増加関数です．多くの双曲幾何の公式は，球面上の長さに関する公式を，形式的に，

$$\cos x\to\cosh=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \sin x\to\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \tan x\to\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

と変えるだけで得られます．

	
球面上の直線と等距離線の長さの比	双曲空間での直線と等距離線の長さの比

(注) 双曲空間内の球面においても，(*)の公式は成り立ちます．つまり(*)は「角に関する公式」です．