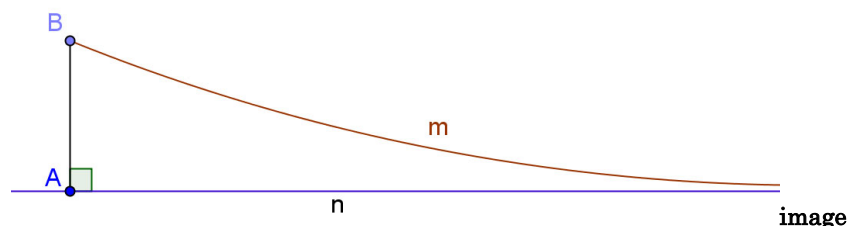


6. 三角形の内角和

6-1. 双曲三角形の内角和は 180 度より小さい

双曲平面上で「直線 $AB \perp$ 直線 n 」かつ「 B を通る直線 m は n と平行」とします。この時、「 m と n のなす角は 0° 」だから、この三角形の内角和は「 $\Pi(AB) + 90^\circ + 0^\circ < 180^\circ$ 」です。



ここで、 m を少しだけ n の方に寄せると、 m と n のなす角は非常に小さい正の角となり、連続性も考えると、その三角形の内角和も 180° より小さくなります。そこで問題は「 m をどれだけ n に近づけても、内角和は 180° より小さいか？」という事です、

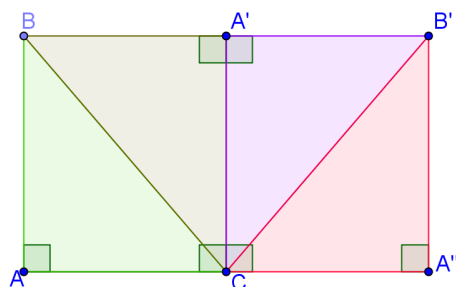
- ①. 三角形の内角和は 180° と等しいか、または 180° より小さい。
- ②. 内角和が 180° の三角形が 1 つでもできると、全ての三角形の内角和も 180° となる。

と言う定理があるので、双曲空間では、**三角形の内角和は常に 180 度より小さくなります。**

注 1) 上の定理は「Legendre の第 1, 第 2 定理」といいます。最初に発見したのは Saccheri(サッケリー) ですが、なぜか忘れられていました。100 年後、彼とは独立に Legendre が再発見し、彼の名声とその証明の分かり易さから彼の名が付きしました。

注 2) 球面では 2 点を通る直線は 1 本とは限らず（北極と南極など）かつ直線も無限に延ばせないのです、ユークリッドの第 1&第 2 公準を満たしません。よって①の対象にはなりません。またこの定理の証明は、小林昭七著「ユークリッド幾何から現代幾何へ」の p16 と p39 にあります。またブルーバックス「非ユークリッド幾何の世界」の付録にも乗っています。それらによると、②の証明は「三角形の面積は、内角和と 180 度の差であるという定理」を使っています。Lobachevsky の証明もこれらと本質的に同じ証明で、面積を使っています。なお Bolyai は全く異なった方法で証明しています。

定理の厳密な証明は面倒なので、ここでは直角三角形について直感的な説明をします。



いま $\triangle ABC$ に於いて「 $\angle A = 90^\circ$, $\angle B + \angle C = 90^\circ$ 」とします．図の様に三角形をつなぎ合わせると「 $\angle ACA'' = 180^\circ$, $\angle BA'B' = 180^\circ$ 」．故に直線 AA'' と直線 BB' は 4 つの四角形の辺 $AC, CA'', BA', A'B'$ をつなぎ合わせたものになります．これを繰り返すと，無限に長い 2 本の直線で，かつ「互いの距離がどちらの方向に進んでも無限大にならない」直線ができるので，第 1 章：

I. 2 直線が平行の時－

2 直線は平行となる方向には限りなく近づき，逆方向には限りなく離れる

II. 2 直線が超平行の時－

2 直線の距離が最小となる点が存在する．（共通垂線の足）その点からは，どちら側に進んでも，互いの距離は限りなく離れる．

と矛盾します．よって直角三角形の内角和は常に 180 度より小さくなります．直角三角形以外では，垂線を下ろして二つの直角三角形に分ければ証明できます．

(注)なお，この 2 直線間の距離は一定ではありません．例えば AC の中点と $A'B$ の中点の間の距離は AB より短くなります．（ $\because$ 上の II から）直線 AC からの距離が等しい曲線は， AC からの**等距離線**といいます． AC の長さが非常に短い三角形を考えれば， B の軌跡は，近似的に等距離線となります．

6-2. 平面，球面，極限球三角形の内角和の関係

証明は終わったので，big picture を見てみます．（概観してみます．）

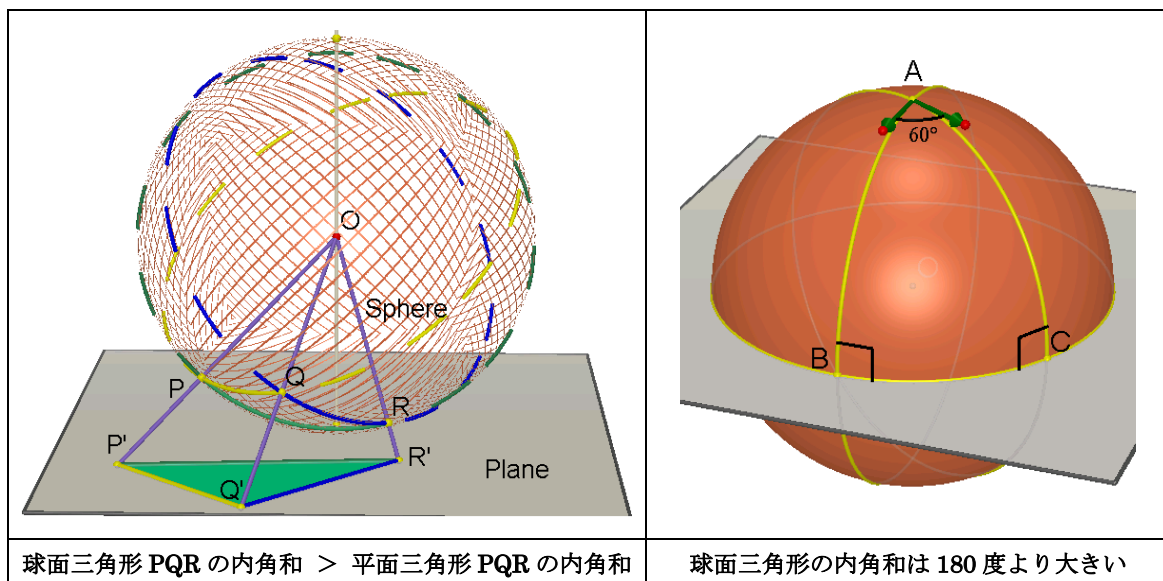
6-2-1. ユークリッド空間中の球面と平面の三角形

右下図の様に，球 O 上に 3 点 P, Q, R をとり， O から平面上に射影し点 P', Q', R' を取ります．この時，球面三角形 PQR の内角和は 180° より大きく，平面四角形の内角和は 180° だから，

球面三角形 PQR の内角和 $>$ 平面三角形 PQR の内角和

このように球から平面に射影すると，内角の和は小さくなります．

なぜなら $\angle RPQ$ は「平面 OPQ と平面 OPR のなす角」で， $\angle RPQ$ はその交線 OP に対し垂直な断面上での 2 平面のなす角です．一方， $\angle P'$ は交線に対し斜めの断面（平面 $P'Q'R'$ ）上での 2 平面のなす角なので， $\angle P > \angle P'$ となります．



angle.sum.cg3

6-2-2. 双曲空間中の球と極限球と平面の三角形

双曲空間内の球 O 上に3点 P, Q, R をとり、 O から平面上に射影し点 P', Q', R' を取ります。次に O を無限遠点に動かすと、 $\triangle PQR$ は極限球上の三角形と変わり、内角和は 180° です。一方、球面三角形の内角和は 180° より大きく、双曲平面上の三角形の内角和は 180° より小さいので、

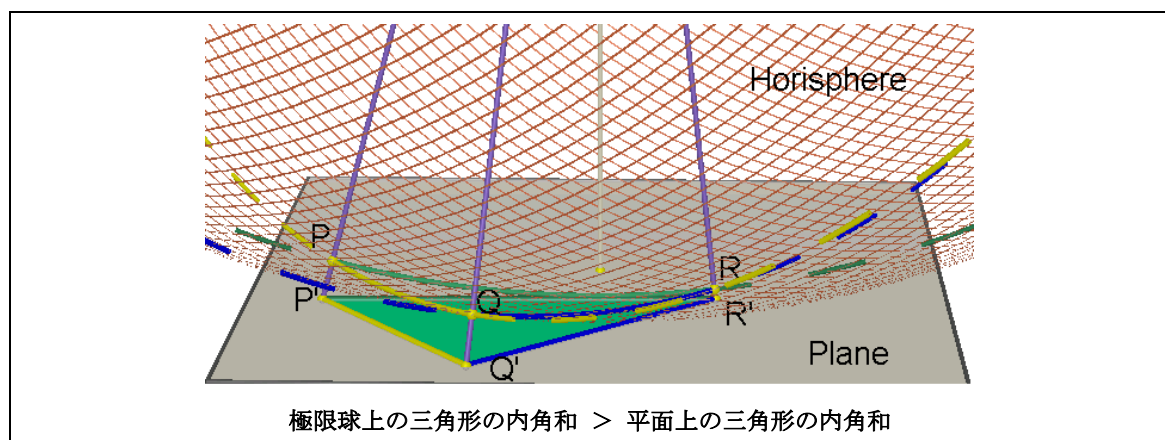
球上の三角形の内角和 $>$ 極限球上の三角形の内角和 $>$ 平面三角形の内角和

となります。

「球から極限球へ」、「極限球から平面へ」と射影するに従って、内角の和は小さくなり、

180° より大きい $\rightarrow 180^\circ$ に等しい $\rightarrow 180^\circ$ より小さい

と変わっていきます。



[補足] 双曲三角形の内角和は 180 度より小さいので、双曲四角形の内角和は 360 度より小さくなります。これは四角形を2つの三角形に分けると明らかです。