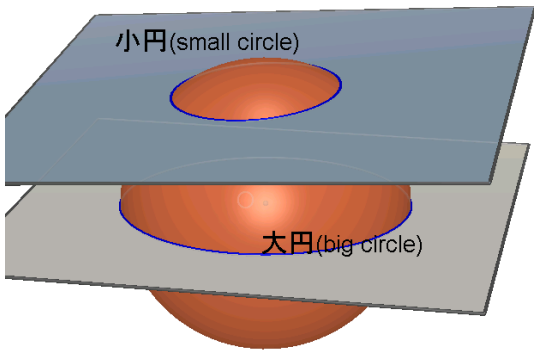
5. 双曲空間の球面幾何

球面幾何は 簡単に触れました．例えば「球面での**直線**は大円であること」や，「2 本の直線は必ず 2 点で交わること」さらに「大円の極限が極限円で，2 本の極限円は交わらないこともある」(点 A を通り極限円 BC と交わらない極限円は 1 本だけ引ける)ことを述べました．ここでは，双曲空間内の球面三角比の公式について調べてみます．

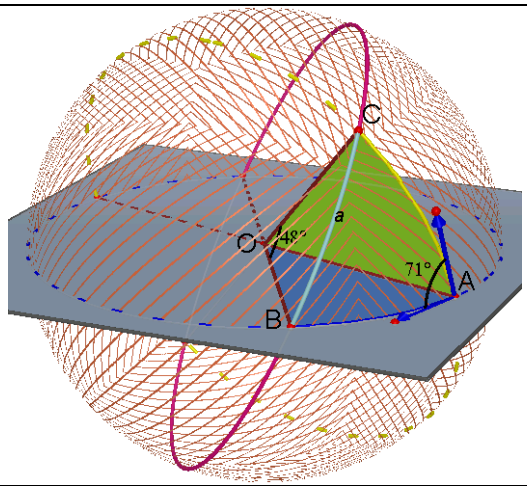
球面上に 3 点 A,B,C を取った時，

$\angle BAC =$ (平面OABと平面OACのなす角)， $a =$ (線分BCの長さ) $= \angle BOC$

のように，**線分の長さは中心角，２直線のなす角は２平面のなす角**で測ります．（定義）



球面幾何の直線は大円



線分の長さと 2 直線のなす角

spherical_geometry.cg3

上の定義は，ユークリッド空間と双曲空間で共通です．さらに，ユークリッド空間では，次のような球面三角比の公式が成り立ちます．（G・ジェニングス著「幾何再入門」）

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A & \text{(長さの余弦定理)} \\ \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a & \text{(角度の余弦定理)} \quad \cdots(*) \\ \dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C} & \text{(正弦定理)} \end{cases}$$

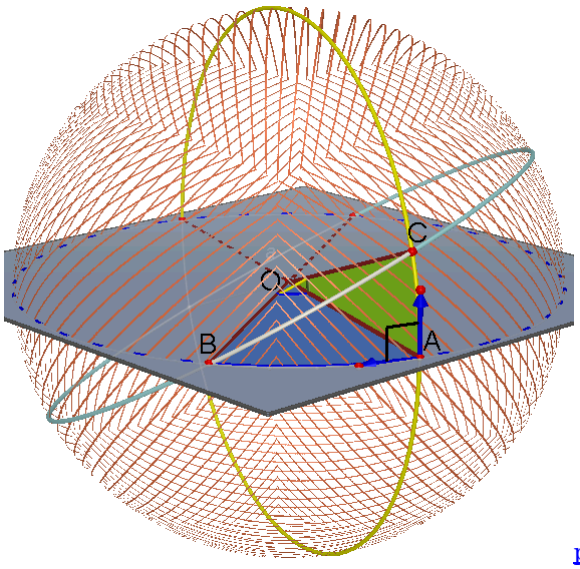
ところが，意外な事に，**双曲空間内の球に関しても，全く同じ公式が成り立ちます．** １つの理由は**「球面三角比の公式」は全て「角度に関する公式」であり，双曲空間でも１回転は360° だから**です．一方「(円周の長さ)=$2\pi r$」等の「(純粋な) 長さに関する公式」は，双曲空間とユークリッド空間で異なります．

例として球面直角三角形を考えます．まず「長さの余弦定理」より「球面三角形の三平方の定理」は 次の様になります．（ユークリッド空間での初等的な証明は[こちら]）

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \xrightarrow{A=90^\circ} \cos a=\cos b\cos c \quad \text{（三平方の定理）}$$

a,b,c が非常に小さい時は，近似的に 平面の三平方の定理と一致して「納得」です．

$$\cos a=\cos b\cos c \Longleftrightarrow 1-\frac{1}{2}a^2\approx\left(1-\frac{1}{2}b^2\right)\left(1-\frac{1}{2}c^2\right)\Longleftrightarrow a^2\approx b^2+c^2$$



pythagoras.cg3

例えば「$b=\angle\mathrm{COA}=20^\circ$, $c=\angle\mathrm{AOB}=40^\circ$」のとき，ユークリッド空間の球面では，

$$a=\angle\mathrm{BOC}=\cos^{-1}(\cos b\cdot\cos c)=43.95\cdots\text{度}\approx 45^\circ$$

となりますが，これは，

$$\text{「弧AC=}\frac{1}{18}\times\text{円周，弧AB=}\frac{1}{9}\times\text{円周」のとき，「弧BC}\approx\frac{1}{8}\times\text{円周」}$$

を表しています．従って「球の全方位への対称性」を考えると，双曲空間内の球でも上の関係が成り立つ事は，**「なんとなく」うなずけます**．

(注)もちろん Bolyai や Lobachevsky は，この様な直感的な議論ではなく，もっと厳密に証明しています．（Bolyai の方は ちょっと簡潔すぎる気もしますが…）Bolyai の証明と，H^3 モデルによる検証を [Topics のページ]に置いておきます．証明には，双曲三角比の公式（第 8 章）を使います．