２．極限球，極限円の定義

2-1．定義

図 1.　球と平面

(ユークリッド空間，

双曲空間共通)

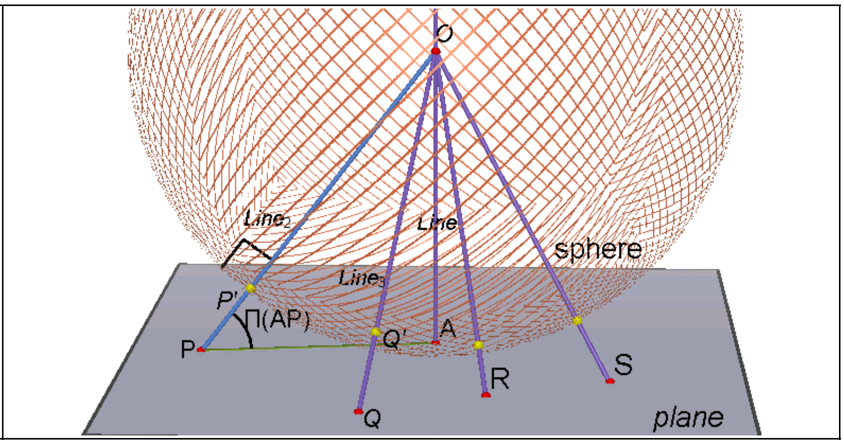


図 2. 極限球と平面

(双曲空間での image 図)

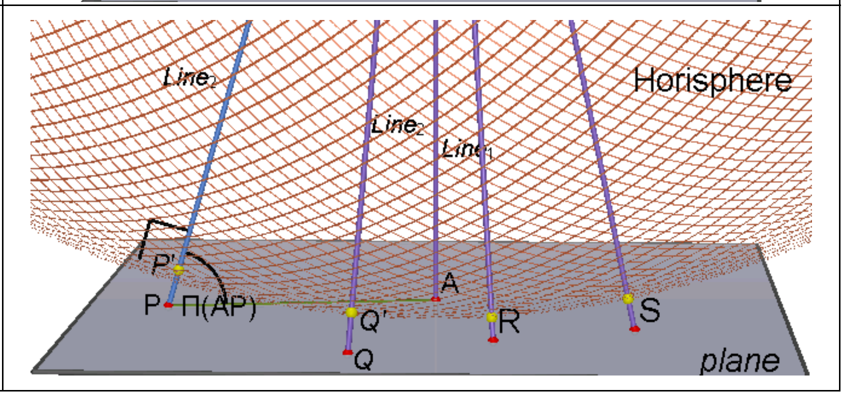
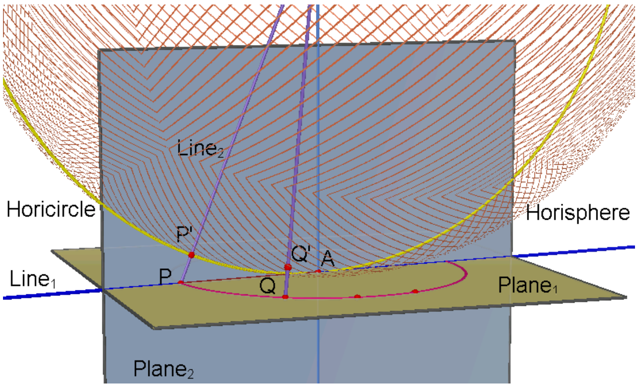


図 1 で,赤い球は点 A において平面と接する中心 O の球で，点 P，Q などは平面上の点です．故に直線 OP,OQ…は球と直交しています．ここで, O を限りなく, A の真上に遠ざけます.

この時，ユークリッド空間では，∠APO は 90° に限りなく近づき，赤い球の極限は平面と一致します．ところが，双曲空間では∠APO は，90° より小さい角，即ち線分 AP に対する**平行線角** Π(AP) に近づきます．一方，線分 OP と球 S は直交したままなので，赤い球は「平面と異なるある曲面」に近づきます．この曲面のように「中心が無限遠点にある球」を「極限球(horisphere)」と呼び，その半径を延長した直線 PI を「軸」と呼びます．軸は PO,QO,RO,AO など無数にありますが，すべて無限遠点 O を共有するので**極限平行**です．

horisphere.definition.cg3

明らかに 極限球は，軸 OA の周りに回転対称で，軸 OA は「回転軸」です．　しかし軸 OA は特別ではなく「全ての軸は回転軸となること」も言えます．（後述）

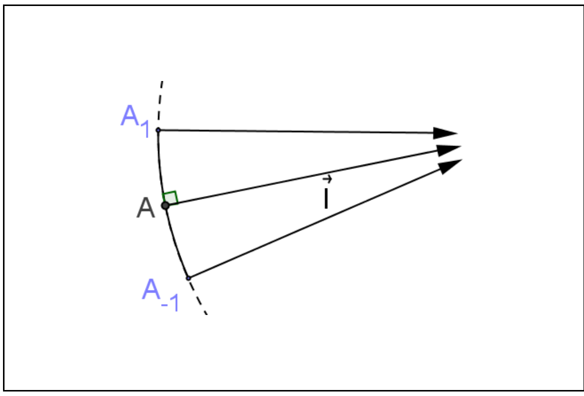


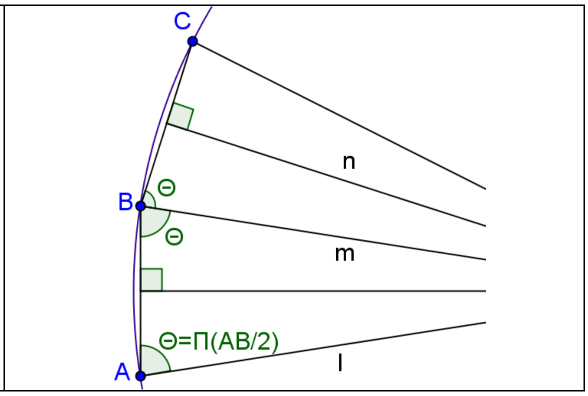
極限球の回転軸を含む平面による切り口を「極限円(horicircle)」と言います.(図の黄色線)

極限球は「その曲面上の任意の点における(曲面に対する)垂線が極限平行となる曲面」,
極限円は「平面曲線で,その曲線上の任意の点における垂線が極限平行となる曲線」
とも定義できます.

2-2. 極限球の一意性(全ての軸は回転軸)

従って,極限円上の任意の点で,傾き(極限円と接する直線の傾き)が定まります.故に,
「ユークリッド平面上の曲線 $y = f(x)$ が,微分方程式 $dy/dx = g(x,y)$ と1点から定まる」
のと同様の理由で,A を通り l と平行な軸を持つ極限円が ただ1つ定まります.(左下図).
ゆえに,極限円は「極限球の任意の軸を含む平面による切り口」とも言えます.



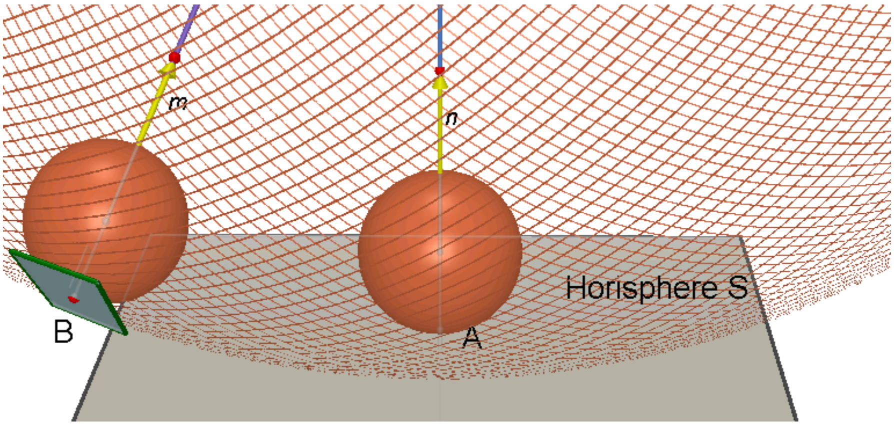


例えば,次の様にして極限円が描けます. l と A を含む平面を考え,右上図の様に, l と適当な(90°より少し小さい)角 θ だけ傾けた直線上に, $\theta = \Pi$(AB/2)をみたすような点 B をとります.B から直線 BA に関し θ の角で直線 m を引くと, $m // l$ です.同様にして m と θ の角をなす半直線上に, $\theta = \Pi$(BC/2)をみたす点 C をとります.(当然 AB=BC です.)
この操作を繰り返して B,C・・・を作り, θ を直角に近づけると(=「AB を小さくすると」)
A,B,C …は,求める極限円に限りなく近づきます.

注)これは本質的には,Lobachevsky の方法です.Bolyai は,もっと幾何的な作図を述べています.

同様に考えると, 1点Aを通りある直線 l と平行な軸を持つ極限球もただ1つに定まります.

すなわち 点Aで平面に接する球の中心を, 平面の法線ベクトル $\vec{n}$ 方向に無限に遠ざけると極限球Sができます. このときS上に点Bをとります. BはS上の点なので, Bに於けるSの接平面の法線ベクトル $\vec{m}$ は $\vec{n}$ と平行です. そしてBで平面と接する球の中心を $\vec{m}$ 方向に無限に遠ざけた時にも極限球Tができますが, TはSと一致します.

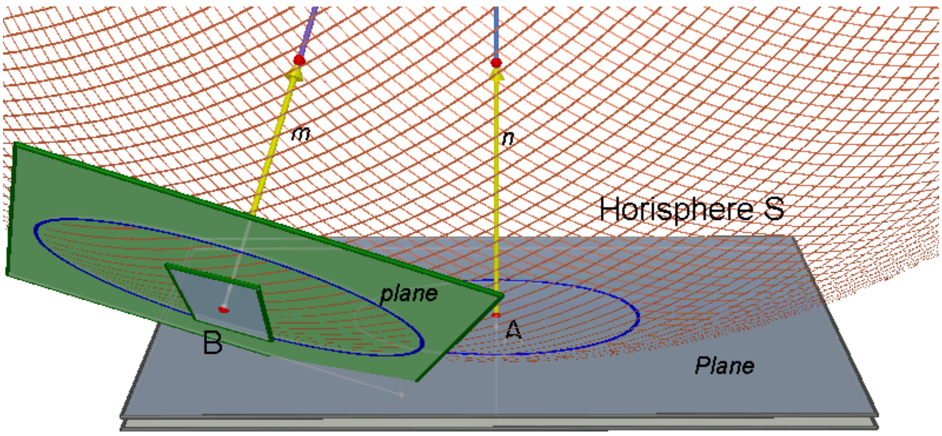


したがって, 極限球では全ての軸は回転軸です. 即ち上の例で「A を通り $\vec{n}$ と平行な直線に関してSは回転対称」また「Bを通り $\vec{m}$ と平行な直線に関してTは回転対称」である事は明らかですが, SとTは一致するので, この2本の軸に対してSは回転対称となります.

（これはちょっと意外です. Sの場合は Aを通る軸が特別に**見える**のですが, 本当は全ての軸が同等です.）

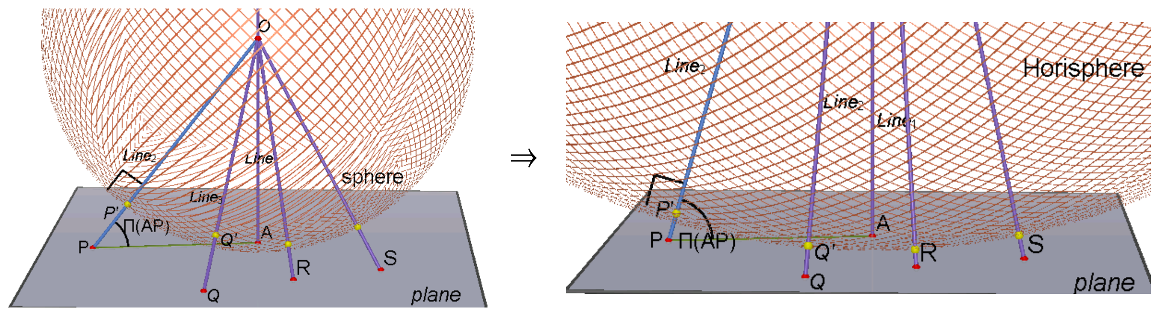
2-3. 極限球と平面の交線

このことから, 平面が軸を含んでないとき, 極限球と平面の交線は円となる事もいえます.
まず $\vec{n}$ と垂直な平面によるSの切り口が円となる事は明らかですが, S =Tなので, $\vec{m}$ と垂直な平面によるSの切り口も円となります.



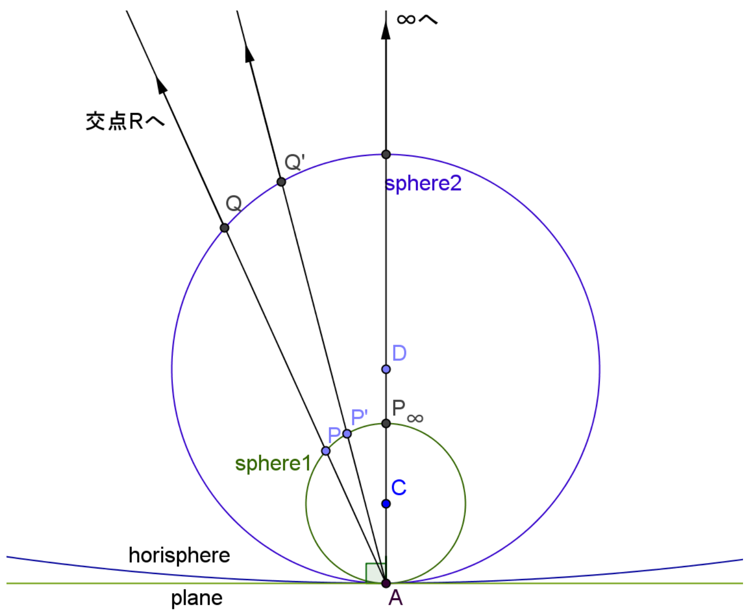
2-4. 極限球の形（その１）

極限球は，球の南半球（下半分）だけを引き伸ばした「お皿のように丸い凹型の曲面」と思われるかもしれません．ところが「北半球の点の極限」も極限球上には含まれます．

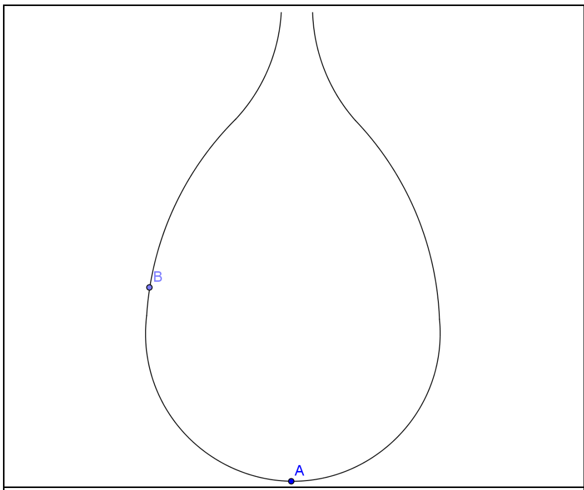


球　　　極限球

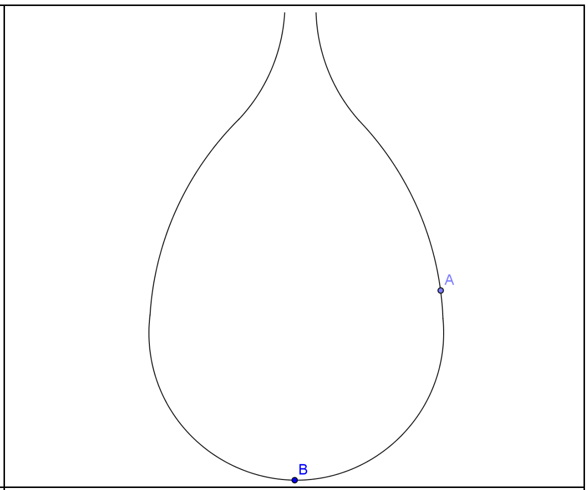
下図は極限球の軸 AC を含む平面による断面で，円と極限円と平面の断面が書いてあります．点 A に接しながら球の中心が無限遠上方に動くと，極限球になります．このとき 球$_1$ の中心 C が 球$_2$ の中心 D より A に近いならば，球$_1$ は球$_2$ に「すっぽりと」含まれ，球$_1$ 上の任意の点 P に対し，半直線 AP は球$_2$ と交わります．故に P がどこにあっても，AP は極限球と交点 R を持ちます．そして P が A の真上に近づくにつれ，R と A との距離は増加します．そして，P が A の真上に来る時は，AP は球の中心 C を通るので，C が無限遠点になると，R も無限遠点となります．（∵同一直線上で，無限遠点の向こうは無限遠点）



即ち，この極限球は A の真上だけが突き抜けたひょうたんの様な形になっています．（しかし，それは平面を平らに考えているからで，本当は平面の方が曲がっています．）

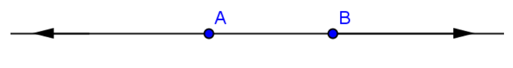


A から見た極限円の図



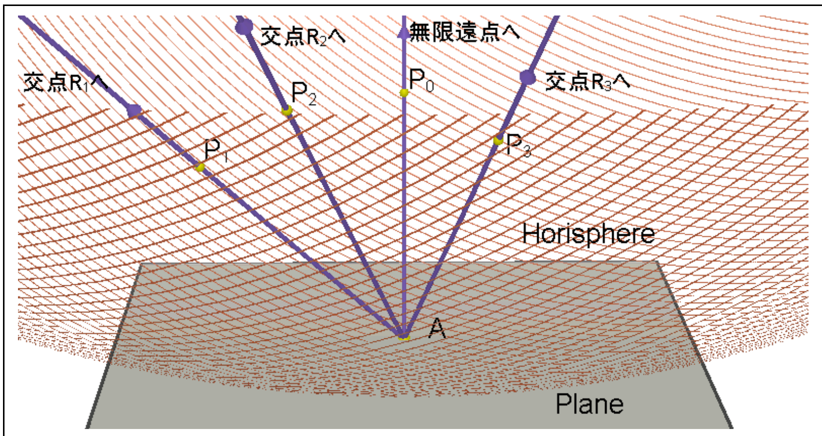
B から見た極限円の図

「A の真上を通る直線と球の交点は無限遠点」なので，極限円の周上をぐるっと回っても元に戻れません．途中に無限遠点があるので，そこを超えて進む事はできません．その意味では左上図の様なイメージですが，「全ての軸は回転軸」なので，B から見た極限円も同じに見えるはずです．これはユークリッド直線のように「均質でかつ無限に長い」と言うことを表しています．(下図)



ユークリッド直線では，A から見ても B から見ても同じ

以上から「A を底にした皿のような曲面が，均質かつ無限に広がっているのが極限球」としか言えません．どうやっても，ユークリッド空間中に「そのままの姿で」極限球を描くことはできません．



左の曲面を，均質かつ無限に広げたのが極限球のイメージ

[注]そのままの形というのは「長さと角度を保ったまま」と言う意味です．しかし,長さや角度を適当に変えれば，ユークリッド空間の中に埋め込むことができます．そういう図形を「モデル(model)」と呼びます．次章で簡単に，そのうちの 1 つ（H^3 モデル）を紹介します．