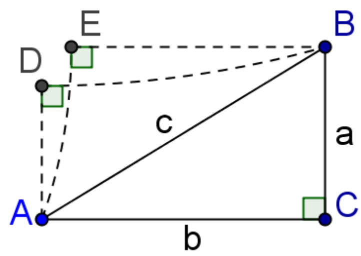
双曲空間の球面幾何

Bolyai の双曲空間の球面幾何について紹介します．Bolyai の「空間論 § 26」に当たります．双曲三角比の知識が必要なので，下に簡潔にまとめておきます．詳しくは「[概説のページ]」をご覧ください．

[準備] 双曲平面での三角法

双曲直角三角形の三角比　（「$k=1$」のとき）

$$\begin{cases} \sin A = \dfrac{\sinh a}{\sinh c} \cdots ①, \quad \sin B = \dfrac{\sinh b}{\sinh c} \cdots ② & \text{(sine公式)} \\ \dfrac{\cos A}{\sin B} = \cosh a \cdots ③, \quad \dfrac{\cos B}{\sin A} = \cosh b \cdots ④ & \text{(等距離線と線分の長さの比)} \\ \cosh a \cdot \cosh b = \cosh c \quad \cdots ⑤ & \text{(ピタゴラスの定理)} \end{cases}$$



以上の定理は，Bolyai が「空間論」で証明したものです．さらに，②,③,⑤より，

$$\boxed{\cos A = \cosh a \cdot \frac{\sinh b}{\sinh c} = \frac{\cosh c}{\cosh b} \cdot \frac{\sinh b}{\sinh c} = \frac{\sinh b}{\cosh b} \cdot \frac{\cosh c}{\sinh c} = \frac{\tanh b}{\tanh c} \cdots ⑥ \qquad \text{(cosine公式)}}$$

①，②，③より，

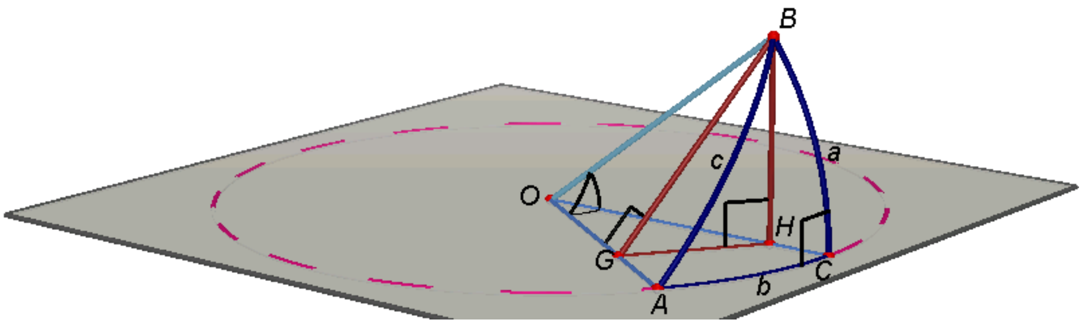
$$\boxed{\tan A = \frac{\sin B}{\cos A} \cdot \frac{1}{\sin B} \cdot \sin A = \frac{1}{\cosh a} \cdot \frac{\sinh c}{\sinh b} \cdot \frac{\sinh a}{\sinh c} = \frac{\tanh a}{\sinh b} \cdots ⑦ \qquad \text{(tangent公式)}}$$

双曲空間における球面幾何

ユークリッド空間での**球面幾何**の三角比の定理は次の 3 つでした．この 3 つが，双曲空間内の球についても成り立つ事を証明する事が目的です．

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A} & (\text{長さの余弦定理}) \\ \cos \mathrm{A} = -\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} + \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \cos a & (\text{角度の余弦定理}) \\ \dfrac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \dfrac{\sin b}{\sin \mathrm{B}} = \dfrac{\sin c}{\sin \mathrm{C}} & (\text{正弦定理}) \end{cases}$$

1. 双曲球面上の正弦定理



双曲空間内に球面 O があり，A,B,C は S 上の異なる 3 点で，∠ACB は直角とします．更に点 B から双曲的線分 OA,OC に下ろした垂線の足をそれぞれ G,H とします．

△OBG と△OBH に「sin 公式」を使って，

$$\begin{cases} \dfrac{\sinh(\mathrm{BH})}{\sinh(\mathrm{OB})} = \sin\angle\mathrm{COB} = \sin a \\ \dfrac{\sinh(\mathrm{BG})}{\sinh(\mathrm{OB})} = \sin\angle\mathrm{GOB} = \sin c \end{cases}$$

$$\therefore \ \frac{\sinh(\mathrm{BH})}{\sinh(\mathrm{BG})} = \frac{\sinh(\mathrm{BH})}{\sinh(\mathrm{OB})} \cdot \frac{\sinh(\mathrm{OB})}{\sinh(\mathrm{BG})} = \frac{\sin a}{\sin c} \quad \cdots ①$$

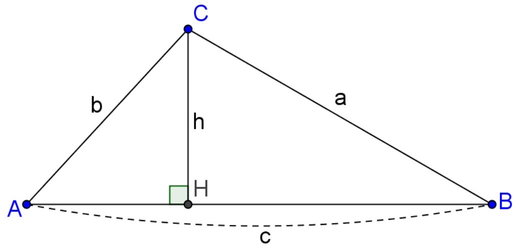
「3 垂線の定理」より「GH⊥OA」なので，∠A=(平面 AOB と平面 BOC のなす角)=∠BGH

よって，直角三角形 BGH に「sin 公式」を使って，

$$\frac{\sinh(\mathrm{BH})}{\sinh(\mathrm{BG})} = \sin\angle\mathrm{BGH} = \sin \mathrm{A} \quad \cdots ②$$

①,②より，

$$\frac{\sin a}{\sin c} = \sin A \quad \cdots \# \ (\text{直角三角形の正弦定理})$$



一般の三角形については, 頂点Cから直線ABに下ろした垂線の長さをhとすると, (#)から,

$$\begin{cases} \dfrac{\sin h}{\sin b} = \sin \mathrm{A} \\ \dfrac{\sin h}{\sin a} = \sin \mathrm{B} \end{cases}$$

これから,

$$\frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin b}{\sin \mathrm{B}}$$

Bから直線ACに垂線を下ろして考えることにより,

$$\frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin \mathrm{c}}{\sin \mathrm{C}}$$

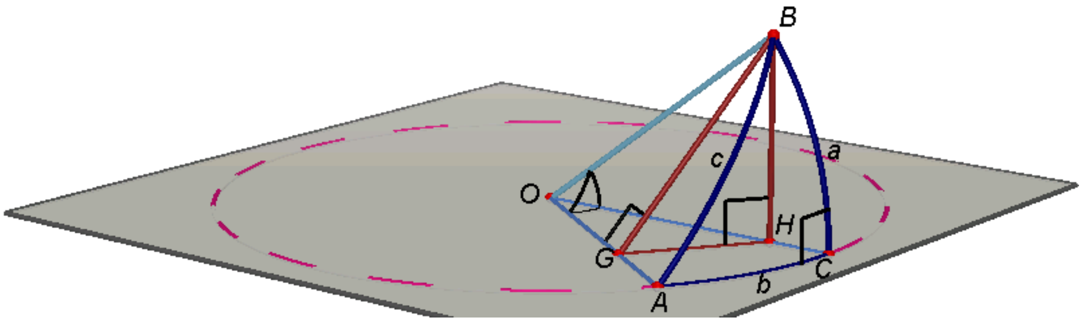
ゆえに,

$$\boxed{\frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\sin \mathrm{c}}{\sin \mathrm{C}} \qquad \text{(正弦定理)}}$$

以上で，双曲空間内の球についても，正弦定理が成り立つ事が分かりました．

(注) Bolyaiは「この定理から周知のごとく全ての球面三角法が導ける(寺坂先生訳)」として，これだけしか証明していません．(「円・正弦定理」だけを使い，平面三角法より前のセクションで証明しています.）しかし，私はこれから残りの球面三角法の公式は導けなかったので，自分なりに工夫してやってみました．(次頁)　どなたかご存知の方がいれば，教えてください．

2. 双曲球面上の「ピタゴラスの定理」



「cosine 公式」を，△BOH，△GOH，△OBG に使って，

$$\begin{cases} \cos a = \cos\angle\mathrm{BOH} = \dfrac{\tanh(\mathrm{OH})}{\tanh(\mathrm{OB})} \\ \cos b = \cos\angle\mathrm{GOH} = \dfrac{\tanh(\mathrm{OG})}{\tanh(\mathrm{OH})} \\ \cos c = \cos\angle\mathrm{BOG} = \dfrac{\tanh(\mathrm{OG})}{\tanh(\mathrm{OB})} \end{cases}$$

したがって，

$$\boxed{\cos a \cdot \cos b = \frac{\tanh(\mathrm{OH})}{\tanh(\mathrm{OB})} \cdot \frac{\tanh(\mathrm{OG})}{\tanh(\mathrm{OH})} = \frac{\tanh(\mathrm{OG})}{\tanh(\mathrm{OB})} = \cos c \qquad (\text{ピタゴラスの定理})}$$

3. 双曲球面上の「cosine 公式」

「tangent 公式」を，△GOB と△GOH に使って，

$$\begin{cases} \tan b = \tan\angle\mathrm{GOH} = \dfrac{\tanh(\mathrm{GH})}{\sinh(\mathrm{OG})} \\ \tan c = \tan\angle\mathrm{GOB} = \dfrac{\tanh(\mathrm{GB})}{\sinh(\mathrm{OG})} \end{cases}$$

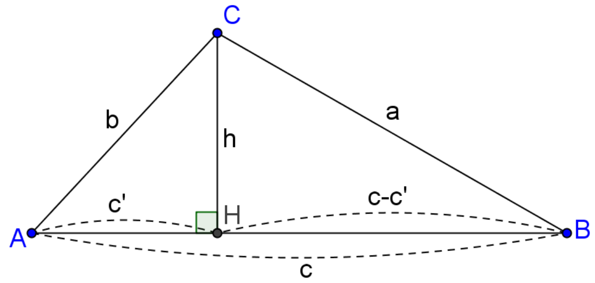
「cosine 公式」を，△BGH に使って，

$$\cos \mathrm{A} = \cos\angle\mathrm{BGH} = \frac{\tanh(\mathrm{GH})}{\tanh(\mathrm{GB})}$$

これから，

$$\boxed{\cos \mathrm{A} = \frac{\tanh(\mathrm{GH})}{\tanh(\mathrm{GB})} = \frac{\tanh(\mathrm{GH})}{\tanh(\mathrm{OG})} \cdot \frac{\tanh(\mathrm{OG})}{\tanh(\mathrm{GB})} = \frac{\tan b}{\tan c} \qquad (\cos\text{ine公式})}$$

4. 双曲球面上の三角法



以上から，一般の球面三角形の三角法を導けます．平面三角比と同様,「ピタゴラスの定理」と「cosine 公式」を使います．頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の足を H，垂線の長さを h， $\mathrm{AH}=c'$ とします．△ACH と△BCH でピタゴラスの定理より，

$$\begin{cases} \cos b = \cos c' \cdot \cos h \\ \cos a = \cos(c-c') \cdot \cos h \\ \qquad = (\cos c \cos c' + \sin c \sin c') \cos h \end{cases}$$

第 2 式を第 1 式で割ると，

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \sin c \cdot \tan c' \quad \cdots ①$$

ここで，「cosine 公式」より

$$\cos \mathrm{A} = \frac{\tan c'}{\tan b} = \frac{\cos b \cdot \tan c'}{\sin b} \quad \cdots ②$$

①,②より

$$\boxed{\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin c \cdot \cos b \cdot \tan c' = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \mathrm{A} \quad \text{(辺の余弦定理)}}$$

「角の余弦定理」は,「辺の余弦定理」から計算のみで導けます．これは平面の三角比と同様です．

以上から,「双曲空間での球面幾何の公式」は下の表の様になり,「ユークリッド空間での球面幾何の公式」と一致します．

$$\boxed{\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A} & \text{(長さの余弦定理)} \\ \cos \mathrm{A} = -\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} + \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \cos a & \text{(角度の余弦定理)} \\ \dfrac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \dfrac{\sin b}{\sin \mathrm{B}} = \dfrac{\sin c}{\sin \mathrm{C}} & \text{(正弦定理)} \end{cases}}$$

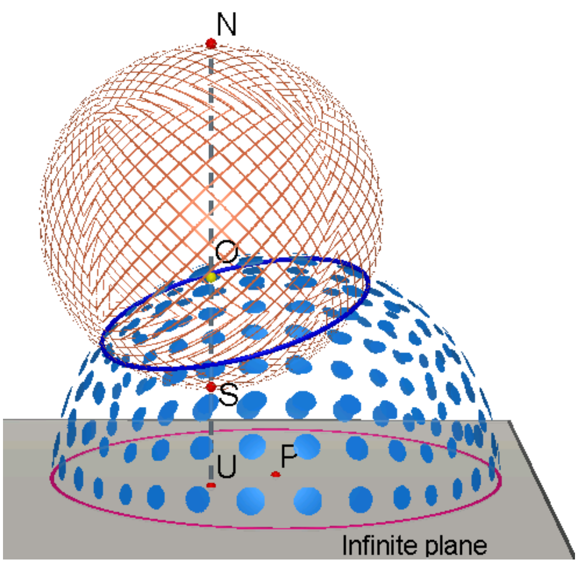
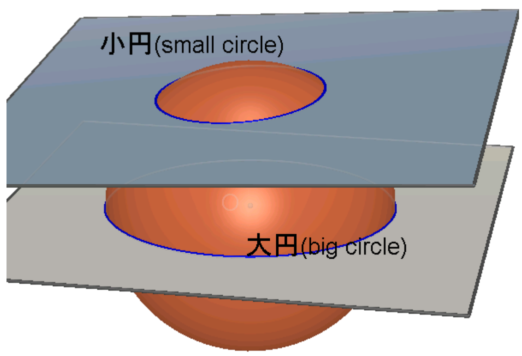
5. H^3 モデルでの球面三角法

H^3 の双曲球面はユークリッド球です．しかし中心は異なります．今，球の双曲的中心を O, z 成分が最大，最小となる点をそれぞれ N と S,　直線 NS と無限遠平面の交点を U，更に S,N,O の z 成分をそれぞれ p,q,r とすると，[O,S]＝[O,N] より，

$$\int_p^r \frac{dz}{z} = \int_r^q \frac{dz}{z} \iff \log\frac{r}{p} = \log\frac{q}{r} \iff pq = r^2$$

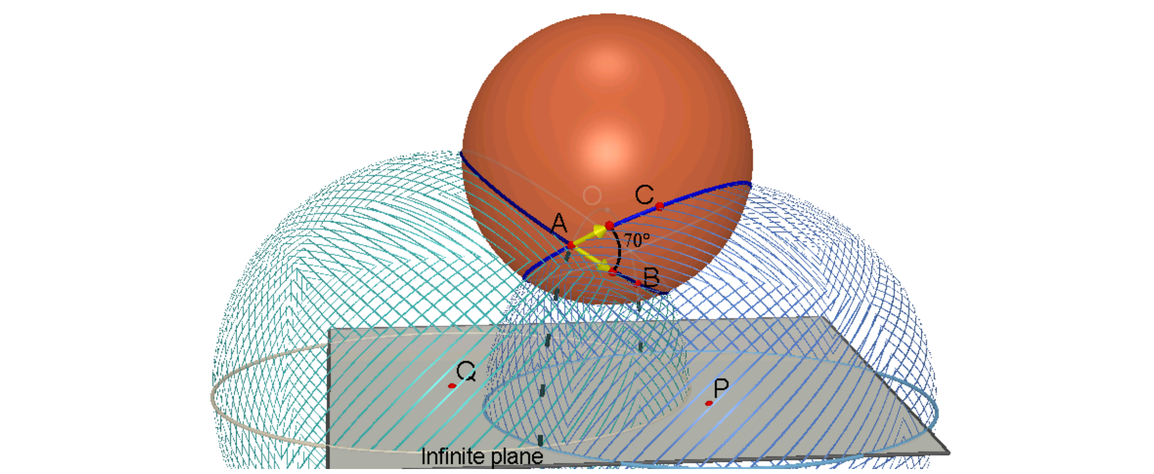
すなわち「OU は SU と NU の相乗平均」となっています．(但し，AB はユークリッド的長さで，[A,B]は双曲的長さを表すものとします.)

大円は「中心を通る平面と球の交線」なので，「中心が $z=0$ 上にあり O を通る球」と球 O の交線が，双曲的球の大円（球面幾何の直線）となります．

	
双曲的球での大円（H^3 モデル）	ユークリッド的球での大円と小円

[line.cg3]

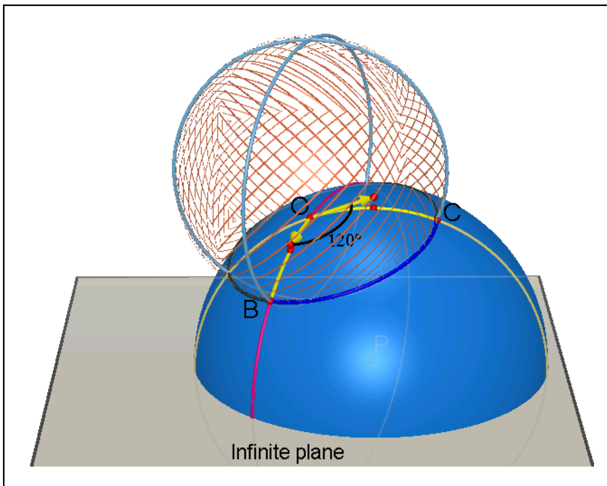
「H³ モデルでの角度はユークリッド的角度と同じ」なので，この大円のなす角が，2 つの双曲的直線のなす角となります．(下図で「2 つの接ベクトルのなす角」が「2 つの大円のなす角」)

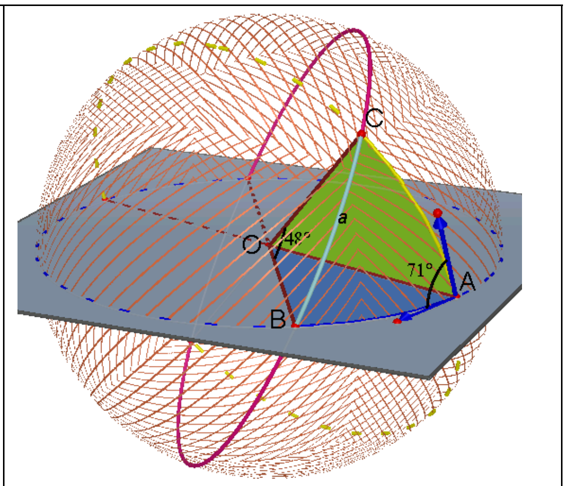


双曲的球での 2 直線（大円）のなす角（H³ モデル）

angle.cg3

また曲面上の線分 BC の長さは，∠BOC で測ります．H³ モデルでは，2 つの双曲的直線 OB と OC のなす角(その接ベクトルのなす角)が，線分 BC の長さになります．





双曲的球での線分の長さ（H³ モデル）	ユークリッド的球での 線分の長さと角度

length.cg3

以上の様にして角度と長さを測ると，H³ モデルで「正弦定理」,「ピタゴラスの定理」,「cosine 定理」などが成り立つ事が確認できます．　trigonometry.cg3