[参考]H+における直線の方程式が，§24 と§28 から得られる

左下図は，双曲平面で，*x=k* は極限平行な直線で無限遠上方で交わります．　*y=k* はそれを軸とする極限球です．故に *x=k* と *y=k* は直交します．しかし $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{CD}}$ です．よって左下図は 角度は正しく表していますが，長さは正しく表していません．(右下図も同様)

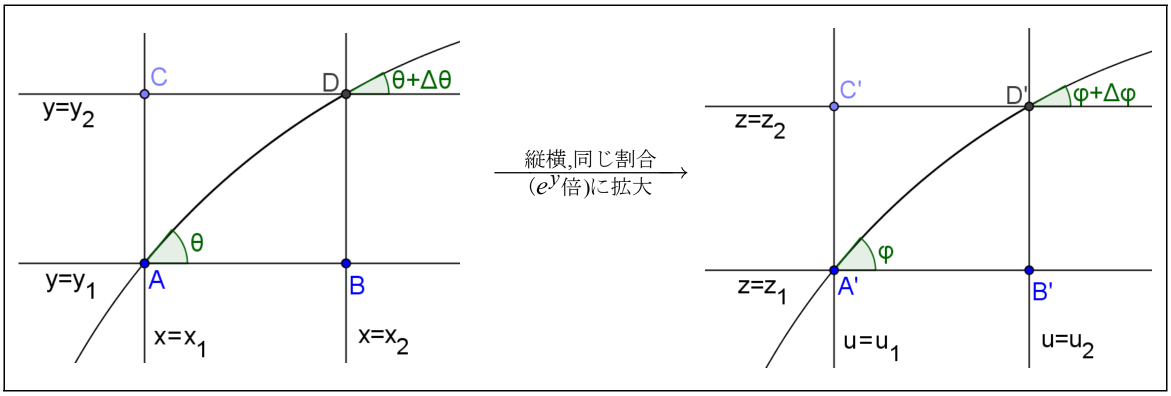
ここで「$\Delta x=x_2-x_1, \Delta y=y_2-y_1$」とおくと，§24 と§28 から，

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=e^{-\Delta y} & \cdots① \\ \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)}{\sin(90^\circ-(\theta+\Delta\theta))}=\dfrac{\cos\theta}{\cos(\theta+\Delta\theta)} & \cdots② \end{cases}$$

①,②より

$$\frac{\cos(\theta+\Delta\theta)}{\cos\theta}=e^{\Delta y} \qquad \therefore 1-(\sin\theta)\Delta\theta\approx 1+\Delta y \ \ (\Delta y\approx 0 \text{ のとき})$$

したがって，
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\theta}=-\tan\theta\cdots③ \\ \dfrac{dy}{dx}=\tan\theta \ \ \cdots④ \end{cases} \qquad \therefore e^y=C_1\cos\theta\cdots③'$$



次に y の代わりに「$z=e^y$」で「垂直成分」を表すと，「$-\infty<y<\infty$」より「$0<z<\infty$」

x成分も y 成分と同じ割合で拡大し，$\begin{cases} \Delta z\approx(\Delta y)z \\ \Delta u\approx(\Delta x)z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dy}=z \\ \dfrac{du}{dx}=z \end{cases}$ となるように u を定める．

さらに，$\angle \mathrm{B'A'C'}=\varphi$ とおくと「縦横同じ割合 (e^y倍) で，点 A の周りに拡大する」ので，「$\varphi=\theta$」．　念のため 計算してみると，

$$(\tan\varphi=)\ \frac{dz}{du}=\frac{\dfrac{dz}{dx}}{\dfrac{du}{dx}}=\frac{\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{du}{dx}}=\frac{z}{z}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}=\tan\theta \quad \cdots⑤$$

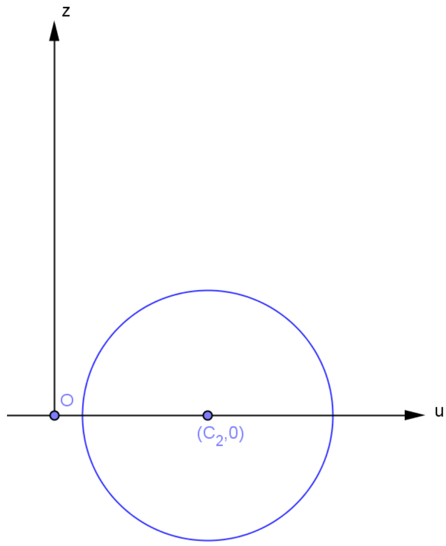
③'と⑤より，

$$\frac{dz}{du}=\tan\theta=\pm\frac{\sqrt{C_1^2-z^2}}{z}$$

$$\therefore\int\frac{z}{\sqrt{C_1^2-z^2}}dz=\pm du$$

$$\therefore\sqrt{C_1^2-z^2}=\mp u-C_2$$

$$\therefore(u-C_2')^2+z^2=C_1^2$$



よって u - z 平面では，双曲的直線は「$z=0$」上の点を中心とする半円となる．（右図）