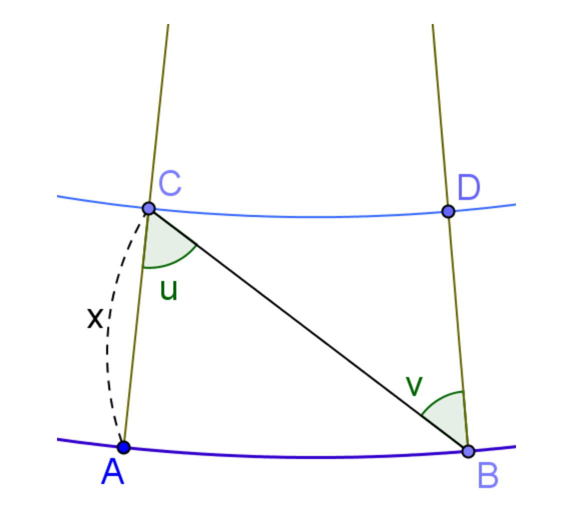
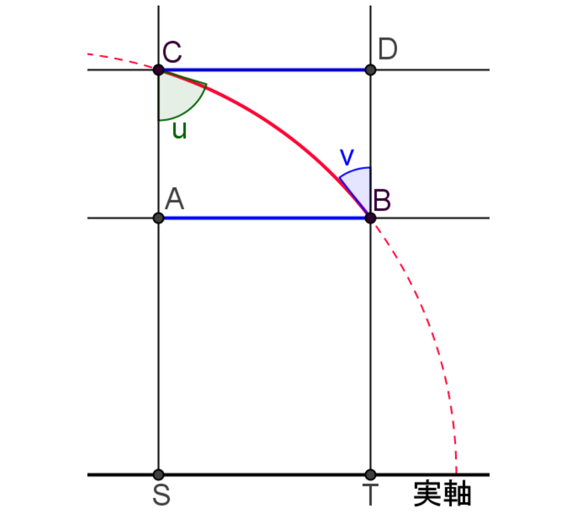
§28.「互いに等距離にある極限円上の 対応する弧長の比」（§24 の e^{-kx}） と，角度の関係

互いに等距離にある極限円があり，A,B と C,D は各々その上の２点で，AC, BD はその軸とする．このとき $\overline{\mathrm{AC}}=x$, $\angle\mathrm{ACB}=u$, $\angle\mathrm{CBD}=v$ とすると，

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=e^{-kx}=\frac{\sin v}{\sin u}$$

（但し x は「直線に沿って測った距離」，$\overline{\mathrm{AB}},\overline{\mathrm{CD}}$ は「極限円に沿って測った距離」とします）

Bolyai の図	H⁺での図
	

[証明] B,C から軸 AC,BD に下ろした垂線の足をそれぞれ F,G とする．§25 の定理（正弦定理）より，

$$\frac{\bigcirc\mathrm{FB}}{\bigcirc\mathrm{BC}}=\sin u,\quad \frac{\bigcirc\mathrm{GC}}{\bigcirc\mathrm{BC}}=\sin v$$

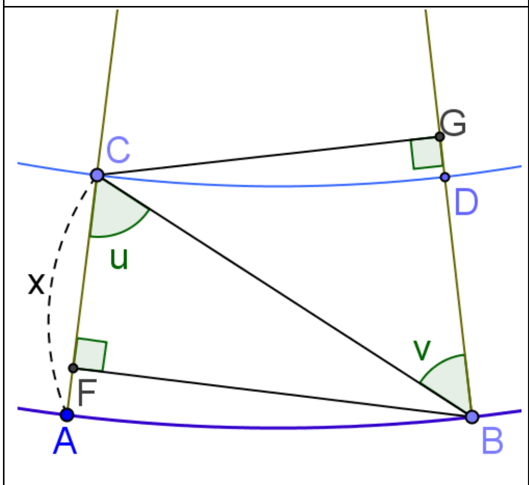
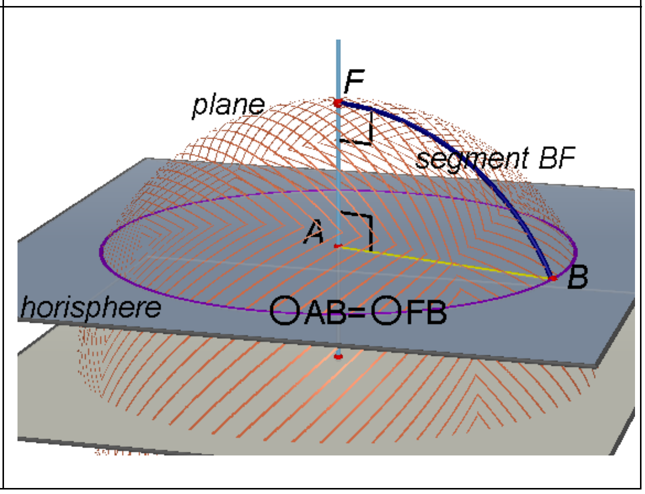
$$\therefore \frac{\bigcirc\mathrm{GC}}{\bigcirc\mathrm{FB}}=\frac{\sin v}{\sin u}\cdots①$$

しかし, ○FB と○AB は同じ円なので（右下図）, ◯FB = ◯AB . 同様に ◯GC = ◯DC .
故に ①より，

$$\frac{\bigcirc\mathrm{DC}}{\bigcirc\mathrm{AB}}=\frac{\sin v}{\sin u}\quad \cdots①'$$

さらに「極限球上では，ユークリッド的」で，「円周と直径の比は π (≒3.14)」となるから，

$$\frac{\sin v}{\sin u}=\frac{\bigcirc\mathrm{DC}}{\bigcirc\mathrm{AB}}=\frac{2\pi\cdot\overline{\mathrm{CD}}}{2\pi\cdot\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

<table>
<tr><th>Bolyai の図</th><th>H⁺での図（A,F,B の周辺）</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

[H$^+$モデルによる証明]　2 つの極限円は, 実軸と平行とする. このとき, 双曲的直線 BC は, 実軸上に中心を持つユークリッド的円だから，その中心を O とすると，

$$\angle\mathrm{COS}=u,\ \angle\mathrm{TOB}=v$$

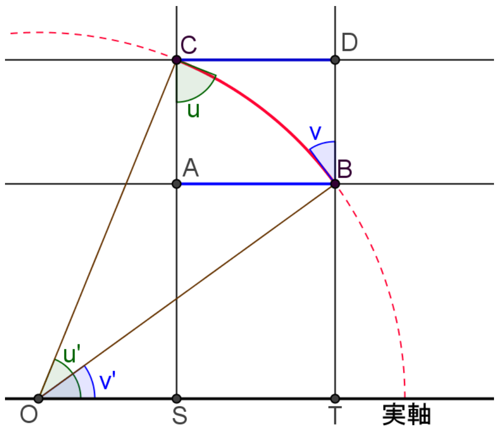
ゆえに,

$$\frac{\sin v}{\sin u}=\frac{\sin\angle\mathrm{TOB}}{\sin\angle\mathrm{SOC}}=\frac{\dfrac{\mathrm{BT}}{\mathrm{OB}}}{\dfrac{\mathrm{SC}}{\mathrm{OC}}}=\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{SC}}=\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SC}}\cdots①$$

H$^+$における距離の定義より　「$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{SA}},\ \overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{SC}}$ かつ OB=OC」 だから,

$$\frac{\sin v}{\sin u}=\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SC}}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

（ただし $\overline{\mathrm{AB}}$ は A と B の極限球上の双曲的距離を，SA など bar の付いてないものはユークリッド的距離を表すとします.）



$$\begin{cases} u=u' \\ v=v' \end{cases}$$

proof on H.ggb

[参考] Bolyai は，’モデル’を作るという発想は持っていませんでしたが，§24 とこのセクションの結果と微分方程式を使うと, H+における直線が, ユークリッド的円となることも証明できます．equation of line.pdf